Berechnung von Strukturfunktionen des Nukleons im Rahmen der QCD auf dem Gitter

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Physik
der Universität Hamburg

vorgelegt von

Harald Oelrich

aus Schleswig

Hamburg
1999

Gutachter der Dissertation:	Prof. Dr. G. Schierholz
	Prof. Dr. G. Mack
Gutachter der Disputation:	Prof. Dr. G. Schierholz
	Prof. Dr. J. Bartels
Datum der Disputation:	04.02.2000
Sprecher des Fachbereichs Physik und Vorsitzender des Promotionsausschusses:	Prof. Dr. F.-W. Büßer

Zusammenfassung

Zur Berechnung der Momente hadronischer Strukturfunktionen benötigt man gewisse Matrixelemente zusammengesetzter Operatoren, die in der Operator-Produkt-Entwicklung von Strom-Matrixelementen auftauchen. Für die tief-inelastische Elektron-Proton-Streuung wird ausführlich dargestellt wie Matrixelemente und Momente (flavour Non-Singlet Fall) mit Hilfe der QCD auf dem Gitter unter Verwendung von Wilsonfermionen in der quenched-Näherung berechnet werden. Eine Teilaufgabe ist dabei die Renormierung der Operatoren, um endliche Größen im Kontinuumslimes zu erhalten. In dieser Arbeit wird eine nicht-störungstheoretische Renormierung, angewandt auf bilineare Quark-Operatoren, auf dem Gitter untersucht. Verschiedene Verbesserungen der ursprünglich von Martinelli und anderen eingeführten Methode werden vorgestellt. Die Z-Faktoren werden bis zu einer Renormierungsskala von $80 GeV^2$ berechnet und diskutiert; besonderes Augenmerk wird auf die cut-off Effekte durch das Gitter gerichtet. Um die gewünschten Momente zu erhalten müssen die renormierten Matrixelemente mit den entsprechenden Wilson-Koeffizienten multipliziert werden. Da die Wilson-Koeffizienten üblicherweise im $\overline{MS}$-Schema ausgerechnet werden, werden die Z-Faktoren (renormierten Operatoren) in dieses Kontinuumsschema umgerechnet. Die Berechnung der Konvertierungsfaktoren wird ausführlich dargestellt. Die umgerechneten Renormierungsfaktoren werden schließlich mit Ergebnissen aus der Gitter-Störungstheorie und der sogenannten tadpole-verbesserten Störungstheorie, welche von Lepage und Mackenzie zur Verbesserung der schlechten Konvergenzeigenschaften der Gitter-Störungstheorie eingeführt wurde, verglichen. Da die Renormierungskonstanten für einen großen Skalenbereich ausgerechnet werden, kann untersaucht werden bei welchen Skalen (wenn überhaupt) störungstheoretisches Verhalten einsetzt.

Abstract

In order to compute moments of hadronic structure functions one needs matrix elements of composite operators appearing in the operator product expansion of appropiate currents. For deep inelastic electron proton scattering it is shown in detail how the matrix elements and moments (flavour Non-Singlet case) are calculated in lattice QCD using Wilson fermions in the quenched approximation. One step in such a calculation is the renormalisation of the operators to obtain finite answers in the continuum limit. In this work a non-perturbative renormalisation of operators that are bilinear in the quark fields is investigated on the lattice. Several improvements of the method that was first introduced by Martinelli et al. are presented. Z factors up to a scale of 80 GeV^2 are computed and discussed, taking special regard of lattice cut-off effects. To yield the desired moments the renormalised matrix elements have to be multiplied by the corresponding Wilson coefficients. Since the Wilson coefficients are usually computed in the $\overline{MS}$ scheme, the Z factors (renormalised operators) are converted to this continuum scheme. The calculation of the conversion factors is presented in detail. The converted renormalisation factors are compared with lattice perturbation theory and the so-called tadpole improved perturbation theory, that was proposed by Lepage and Mackenzie to remedy the poor convergence properties of lattice perturbation theory. Computing the renormalisation constants for a large range of scales μ^2 it can be found out at which scales (if at all) perturbative behaviour sets in.

Ich möchte mich an dieser Stelle besonders bei Herrn Prof. Gerrit Schierholz vom Deutschen Elektronen Synchrotron (DESY) für die Betreuung und Unterstützung dieser Arbeit bedanken. In der von ihm mit großem Engagement geleiteten Arbeitsgruppe war es mir möglich, mich mit hochinteressanten, im Mittelpunkt aktueller Hochenergiephysik-Forschung stehenden Problemen zu beschäftigen und durch die Teilnahme an zahlreichen internationalen Konferenzen, das wissenschaftliche Leben der Gitter-Elementarteilchenphysik kennenzulernen.

Ganz besonders bedanke ich mich bei Dr. Paul Rakow und Dr. Meinulf Göckeler von der Universität Regensburg und Dr. Roger Horsley von der Humboldt-Universität Berlin für ihre ausgezeichnete fachliche Unterstützung, was Fragen im Umgang mit dem Großparallelrechner QH2, die Quantenchromodynamik und die Gitterphysik angeht, und für die angenehme, freundliche Athmosphäre in der Arbeitsgruppe. Für die Bereitstellung numerischer störungstheoretischer Daten bin ich Dr. Holger Perlt und Dr. Arwed Schiller von der Universität Leipzig zu Dank verpflichtet.

Dem DESY Institut für Hochenergiephysik Zeuthen (DESY-IfH Zeuthen) und der Universität Bielefeld danke ich für die Bereitstellung von Rechenzeit auf den Großparallelrechnern QH2; insbesondere bedanke ich mich bei Dr. Hubert Simma, Dr. Peter W. Stephenson, Dr. Andreas Hoferichter und Dr. Markus Plagge. Für die zur Analyse der numerischen Daten und zur Anfertigung dieser Arbeit bereitgestellten Rechner danke ich dem Höchstleistungsrechenzentrum (HLRZ) der Forschungsanlage Jülich und DESY-IfH Zeuthen.

Mein besonderer Dank gilt meinen Eltern und meiner Familie für ihre Anteilnahme und Unterstützung.

Zeuthen, 1999

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Strukturfunktionen

1.1.1 Streuexperimente

Hochenergetische Streuexperimente von z.B. Elektronen an Protonen stellen im Grunde genommen eine Art Mikroskop für Protonen dar. Während das Elektron punktförmig zu sein scheint, ist das Proton aus zwei u-Quarks und einem d-Quark (Valenz-Quarks) und durch die starke Wechselwirkung aus Gluonen und Quark-Antiquark-Paaren (See) zusammengesetzt. Die „Bild-Auflösung" hängt dabei von der Wellenlänge bzw. der Energie und dem Impuls des zwischen Elektron und Proton ausgetauschten Wechselwirkungsquants ab. Betrachtet man also z.B. die Energie- und Winkelverteilung der gestreuten Elektronen (bei bekanntem kinematischen Anfangszustand von Proton und Elektron), kann man sich die „Struktur" des Protons (z.B. Impulsverteilungen der Quarks und Gluonen) verschieden stark aufgelöst „ansehen" (Abbildung 1.1). Verallgemeinert dargestellt, streut

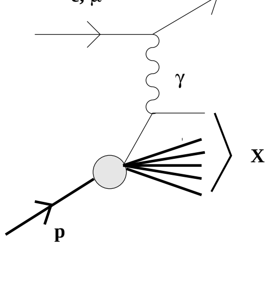

Abbildung 1.1: Tiefinelastische Elektron-Proton-Streuung und Muon-Proton-Streuung

ein Lepton l (Elektron, Muon, Neutrino,...) an einem Hadron N (Proton, Neutron, Pion, Rho,...), wobei nur der Endzustand des Leptons l' ausgewertet wird:

$$l + N \longrightarrow l' + X$$

Die je nach Prozeß ausgetauschten elektroschwachen Wechselwirkungsteilchen γ, Z^0 oder $W^\pm$ (bei genügend hohen Energien sind auch Higgs-Teilchen zu berücksichtigen) sollen dabei Auskunft über den Aufbau des Hadrons aus Quarks und Gluonen geben; im Gegensatz zur schwer zu fassenden starken Wechselwirkung zwischen den hadronischen Konstituenten, ist die elektroschwache zwischen Quarks und den gestreuten Leptonen störungstheoretisch beschreibbar und verhältnismäßig einfach zu berechnen.

Der im Experiment gemessene inklusive Streuquerschnitt ist dem Quadrat der in Abbildung 1.1 dargestellten Streuamplitude proportional, wobei über alle hadronischen Endzustände X aufsummiert wird; er hat folgende Form:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dE' d\cos\theta} &\sim \sum_X \mid \langle l' \mid J_\lambda^{lept} \mid l \rangle \langle X \mid J_\nu^{had} \mid N \rangle D^{\lambda\nu}(q) \mid^2 \delta^{(4)}(p_\mu + q_\mu - p_\mu^X) \\ &\sim D^{\kappa\mu}(q)^\dagger D^{\lambda\nu}(q) L_{\kappa\lambda}(l, l') W_{\mu\nu}(p, q) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Dabei koppelt der leptonische Strom J_λ^{lept} über das ausgetauschte Wechselwirkungsboson, dessen Propagator $D^{\lambda\nu}(q)$ ist, an den hadronischen Strom J_ν^{had} an. (Die Ströme J_λ^{lept} und J_ν^{had} symbolisieren den fermionischen Teil der Wechselwirkungs-Vertizes der Leptonen l, l' mit dem Austauschboson bzw. der Quarks (im Streuprozess von N nach X) mit dem Austauschboson. Allgemein sind diese je nach Wechselwirkungstyp im Streuvorgang aus skalaren (dann keine Lorentz-Indizes in (1.1)), axialen ($\sim \gamma_\mu\gamma_5$) oder Vektor-Strömen ($\sim \gamma_\mu$) aufgebaut.) Die relevanten kinematischen Variablen sind:

$$\begin{aligned} p_\mu, p_\mu^X &= \text{Viererimpuls des Hadrons } N, \text{ Gesamt-Viererimpuls der Hadronen } X, \\ l_\mu, l'_\mu &= \text{Anfangs- und End-Viererimpuls des Leptons}, \\ E', \theta &= \text{Energie des gestreuten Leptons, Streuwinkel des Leptons}, \\ q_\mu &= l_\mu - l'_\mu = \text{Energie-Impuls Transfer zum Hadron und} \\ Q^2 &= -q^2, \\ \nu &= p^\mu q_\mu, \\ x &= Q^2/2\nu = \text{Bjorken-Variable mit} \\ \{ \quad Q^2 \to \infty, \quad \nu \to \infty, \quad x \text{ fest} \quad \} &= \text{tief inelastische Streuung, Bjorken Limes.} \end{aligned}$$

Neben dem leicht zu berechnenden leptonischen Tensor $L_{\kappa\lambda} = \langle l \mid J_\kappa^{lept}(0)^\dagger \mid l' \rangle \langle l' \mid J_\lambda^{lept}(0) \mid l \rangle$ kann der hadronische Tensor $W_{\mu\nu}$ nur in einer allgemeinen, durch sogenannte Strukturfunktionen parametrisierten Form angegeben werden. Beispielsweise hat man in der tief inelastischen Elektron-Proton-Streuung bei elektromagnetischer Wechselwirkung im Fall unpolarisierter Teilchen:

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\int d^4y \quad e^{iqy}\langle p \mid J_\mu^{had}(y)^\dagger J_\nu^{had}(0) \mid p\rangle \tag{1.2}$$

$$= F_1\left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) + \frac{F_2}{\nu}\left(p_\mu - \nu\frac{q_\mu}{q^2}\right)\left(p_\nu - \nu\frac{q_\nu}{q^2}\right), \tag{1.3}$$

und im Fall polarisierter Teilchen:

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} &= F_1\left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) + \frac{F_2}{\nu}\left(p_\mu - \nu\frac{q_\mu}{q^2}\right)\left(p_\nu - \nu\frac{q_\nu}{q^2}\right) \\ &+ i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\frac{q_\rho}{\nu}\left((g_1+g_2)s^\sigma - g_2\frac{s\cdot q}{\nu}p^\sigma\right), \end{aligned} \tag{1.4}$$

wobei s^σ der Spinvektor des Protons mit $s^2 = -m_p^2$ (m_p = Protonmasse) ist. Im unpolarisierten Fall wird über die Spinzustände des Protons gemittelt. F_1, F_2 und g_1, g_2 sind Strukturfunktionen. Eine Besonderheit, die in der Asymptotischen Freiheit der starken Wechselwirkung (asymptotisch verschwindende Wechselwirkung für $Q^2 \to \infty$) begründet ist, ist das Skalenverhalten der Strukturfunktionen (d.h. die Unabhängigkeit der Strukturfunktionen von der Skala Q^2, anschaulich von der Auflösung $\sim Q^{-1}$) im tief inelastischen Bereich oder Bjorken Limes:

$$\begin{aligned} F_{1,2}(Q^2,x) &\overset{Bj}{\rightsquigarrow} F_{1,2}(x), \\ g_{1,2}(Q^2,x) &\overset{Bj}{\rightsquigarrow} g_{1,2}(x), \qquad Q^2,\nu\to\infty, \quad x \text{ fest.} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Im Experiment findet man dies bei großem Q^2 verwirklicht, wenn der betrachtete Bereich nicht allzu groß ist; tatsächlich liegt eine mehr oder weniger schwache logarithmische Abhängigkeit von Q^2 vor (Skalenverhalten-Verletzung).

1.1.2 Berechnung von Strukturfunktionen

Es existieren folgende zentrale Methoden zur Beschreibung und Berechnung gemessener Streuquerschnitte und Strukturfunktionen:

A. Das Parton-Modell:

Das Parton-Modell liefert ein einfaches physikalisches Bild und erlaubt eine Interpretation der Strukturfunktionen. Es stellt eine Art nullte Näherung an die Wirklichkeit dar. Es besagt erstens, daß ein sehr schnell bewegtes Hadron N aus punktförmigen Konstituenten (Partonen: Quarks und Gluonen) besteht, deren Energien und Impulse jeweils näherungsweise ein Vielfaches ξ_i der Energie und des Impulses des Hadrons ist, und daß Größen wie Massen und Partonimpulse transversal zum Impuls dieses Hadrons zu vernachlässigen sind. Zweitens wird für harte Reaktionen wie die tief inelastische Lepton-Hadron Streuung die Gültigkeit der „Stoßnäherung“ angenommen, nach der die Wechselwirkung mit dem Lepton wie ein harter Stoß auf viel kleinerer Raum-Zeit-Skala als die starke Wechselwirkung abläuft, so daß die Partonen als quasifrei anzusehen sind. Der Streuquerschnitt berechnet sich dann, indem man elastische Lepton Streuung an einzelnen freien, nicht stark wechselwirkenden Partonen in Born-Näherung ausrechnet und die sich daraus ergebenden Streuquerschnitte gewichtet mit den jeweiligen Partonverteilungsfunktionen im Hadron $q_i^N(\xi_i)$ (inkohärent) über alle Partonen $i = 1, ..., n$ und $0 \leq \xi_i \leq 1$ aufsummiert. Die Partonverteilungsfunktionen $q_i^N(\xi_i)$ sind theoretisch unbekannt und an die experimentellen Streuquerschnitte anzupassen. Durch Vergleich eines so berechneten Streuquerschnitts mit (1.3) und (1.4) für obige Elektron-Proton-Streuung erhält man Skalenverhalten für die Strukturfunktionen, d.h. (1.5). Die Skalenvariable $x = Q^2/2\nu$ bekommt die anschauliche Bedeutung des Longitudinalimpulsanteils ξ_i der Partonen. Im Fall unpolarisierter Teilchen ergibt sich dabei folgender Zusammenhang zwischen den Strukturfunktionen $F_1(x), F_2(x)$ und den Parton-Verteilungsfunktionen $q_i^N(x)$ im Hadron:

$$F_1(x) = \frac{1}{2} \sum_i \; Q_i^2 q_i^N(x), \qquad F_2(x) = 2xF_1(x) \quad \text{(Callan-Gross Relation)} \tag{1.6}$$

(Q_i Partonladung). Als Partonen treten nur Quarks $u, d, s, c, ...$ und ihre Antiteilchen in Erscheinung, da Gluonen nicht direkt mit den gestreuten Leptonen wechselwirken.

B. Operator-Produkt-Entwicklung (OPE):
Eine wirkliche Berechnung der Strukturfunktionen erfordert die Anwendung einer Quantenfeldtheorie, der Quantenchromodynamik (QCD), und zu ihrer Lösung aufwendige Renormierungs-Rechenmethoden (siehe Abschnitt 1.2). Anschaulich geht man vom Parton-Modell mit seinen effektiv freien Partonen zu Partonen über, die in komplizierter Weise auf allen Raum-Zeit-Skalen miteinander wechselwirken.

Die hier verwendete Methode ist eine Faktorisierung, wobei jeder Faktor Effekte auf einer bestimmten Raum-Zeit-Skala beschreibt; es ist so eine Trennung in Phänomene bei kleinen und großen Abständen möglich. Eine Form der Faktorisierung für die tief inelastische Streuung ist die von Wilson stammende Operator-Produkt-Entwicklung. [1] Sie ist formal eine Art Taylorreihe und besagt anschaulich, daß ein beliebiges Operatorprodukt wie z.B. ein zeitgeordnetes Produkt aus Feldoperatoren Φ (irgendeiner Theorie) an den Raum-Zeit-Punkten z bzw. 0 für z klein gegenüber charakteristischen Längen lokal aussieht, also nach lokalen Operatoren entwickelt werden kann:

$$T\Phi(z)\Phi(0) \sim \sum_{\mathcal{O}} c_{\mathcal{O}}(z)\mathcal{O}^R(0) \quad \text{für} \quad z \to 0 \tag{1.7}$$

Dabei sind $\mathcal{O}^R(0)$ lokale, renormierte, im allgemeinen zusammengesetzte Operatoren; die sogenannten Wilson-Koeffizienten $c_{\mathcal{O}}(z)$, im selben Renormierungsschema wie die Operatoren berechnet, sind Zahlen und beschreiben – so abfaktorisiert – das kurzreichweitige,

[1] Eine äquivalente Form ist die Methode der Altarelli-Parisi Gleichungen.

allgemein singuläre Verhalten bei kleinem z. Betrachtet man (1.7) in beliebigen Greensfunktion wie $G_{m+2} = \langle 0 \mid \tilde{\Phi}(p_1)... \, T\Phi(z)\Phi(0) \, ...\tilde{\Phi}(p_m) \mid 0 \rangle$, wobei $\tilde{\Phi}$ Fouriertransformierte von Φ mit endlichen, festen Viererimpulsen $p_1, ..., p_m$ sind, so erhält man:

$$G_{m+2} \sim \sum_{\mathcal{O}} c_{\mathcal{O}}(z) \langle 0 \mid \tilde{\Phi}(p_1)... \; \mathcal{O}^R(0) \; ...\tilde{\Phi}(p_m) \mid 0 \rangle \quad \text{für} \quad z \to 0 \tag{1.8}$$

Dabei ist $c_{\mathcal{O}}(z)$ insofern universell, als es nur von z, Parametern der Theorie (Kopplungskonstanten, Massen m u.a.), Renormierungsparametern, z.B. Renormierungspunkt μ, und von Lorentz Indizes und Quantenzahlen der Operatoren $T\Phi(z)\Phi(0)$ und $\mathcal{O}$ abhängt, während das von z unabhängige Matrixelement $\langle 0 \mid \tilde{\Phi}(p_1)... \; \mathcal{O}^R(0) \; ...\tilde{\Phi}(p_m) \mid 0 \rangle$ spezielle Eigenschaften von G_{m+2} beschreibt. $c_{\mathcal{O}}(z)$ wird für kurze Abstände z störungstheoretisch berechnet und ist von der Form $\sim$ ($z^{\dim(\mathcal{O}) - 2\dim(\Phi)} \times$ Logarithmen). Damit sind die dominanten Operatoren in einer Operatorprodukt-Entwicklung bei kleinem z solche mit kleiner (Massen-) Dimension $\dim(\mathcal{O})$. Die Anzahl der Operatoren mit bestimmter Dimension und kleiner ist in jeder renormierbaren Feldtheorie beschränkt, so daß ein Operatorprodukt wie $T\Phi(z)\Phi(0)$ mit beliebiger Genauigkeit durch eine endliche Summe lokaler Operatoren $\mathcal{O}$ angenähert werden kann. Es kann für renormierbare Quantenfeldtheorien in der Störungstheorie allgemein bewiesen werden, daß die Entwicklung (1.7) für $z \to 0$ asymptotisch konvergent gegen das Operatorprodukt ist [1].

Über eine solche Entwicklung, angewandt auf das zeitgeordnete Proton-Matrixelement $\langle p \mid T J_\mu^{had}(z)^\dagger J_\nu^{had}(0) \mid p \rangle$, kann indirekt das gesuchte physikalische Matrixelement $W_{\mu\nu} \sim \int d^4 z e^{iqz} \langle p \mid J_\mu^{had}(z)^\dagger J_\nu^{had}(0) \mid p \rangle$, (1.2), im Bjorken Limes dominant auf dem Lichtkegel $z^2 \to 0$ (auch $z \neq 0$), berechnet werden. Letztendlich führt dies auf eine Operator-Produkt-Entwicklung der Momente der Strukturfunktionen, also z.B. für:

$$M_{i,n}(Q^2) \;\; = \;\; \int_0^1 dx \; x^{n-1} F_i(x, Q^2). \tag{1.9}$$

Im tief inelastischen Limes gilt in führender Ordnung der Operator-Produkt-Entwicklung für unpolarisierte Strukturfunktionen F_1, F_2 im obigen Fall der Elektron-Proton-Streuung:

$$\begin{aligned} 2\int_0^1 dx \; x^{n-1} F_1(x, Q^2) \;\; &= \sum_{f=u,d,G} c_{1,n}^{(f)}(\mu^2/Q^2, g^2(\mu)) \; v_n^{(f)}(\mu) + O(1/Q^2), \\ \int_0^1 dx \; x^{n-2} F_2(x, Q^2) \;\; &= \sum_{f=u,d,G} c_{2,n}^{(f)}(\mu^2/Q^2, g^2(\mu)) \; v_n^{(f)}(\mu) + O(1/Q^2) \end{aligned} \tag{1.10}$$

Hier ist $n = 2, 4, 6, ...$; $f = u, d$ für u- bzw. d-Quarks und $f = G$ für Gluonen indiziert die beitragenden Operatoren; μ stellt die Skala eines Renormierungsschemas dar, auf der sowohl die reduzierten Proton Matrixelemente $v_n^{(f)}$ als auch die Wilson-Koeffizienten $c_{i,n}^{(f)}$ berechnet werden. Letztere können störungstheoretisch in der Theorie der starken Wechselwirkung, der Quantenchromodynamik, behandelt werden und hängen von μ^2/Q^2 und der starken Kopplungskonstanten $g(\mu)$ ab. Die führenden Operatoren sind hier die sogenannten twist-2 Quark- und Gluon-Operatoren (twist = $\dim(\mathcal{O}) - n$; $n = \mathrm{Spin}(\mathcal{O})$); sie können in flavour-Singlet (S) und Multipletts von flavour-Non-Singlet (NS) Operatoren zerlegt werden:

$$\mathcal{O}^{(u,d;NS,j)}_{\mu_1\ldots\mu_n} = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \bar{\psi}_{f_1}\tau^{(j)}_{f_1,f_2}\gamma_{\mu_1} \overleftrightarrow{D}_{\mu_2} \ldots \overleftrightarrow{D}_{\mu_n}\, \psi_{f_2} \tag{1.11}$$

$$\mathcal{O}^{(u,d;S)}_{\mu_1\ldots\mu_n} = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \bar{\psi}_{f_1}1_{f_1,f_2}\gamma_{\mu_1} \overleftrightarrow{D}_{\mu_2} \ldots \overleftrightarrow{D}_{\mu_n}\, \psi_{f_2} \tag{1.12}$$

$$\mathcal{O}^{(G;S)}_{\mu_1\ldots\mu_n} = i^{n-2}\mathrm{Tr}_{col} F^{\alpha}_{\ \mu_1} \overleftrightarrow{D}_{\mu_2} \ldots \overleftrightarrow{D}_{\mu_{n-1}}\, F_{\alpha\mu_n}, \tag{1.13}$$

wobei hier $\bar{\psi}_{f_1}, \psi_{f_2}$ mit $f_1 = u, d, f_2 = u, d$ für u- und d-Quarkfelder und $F_{\alpha\beta}$ für den Gluon-Feldstärke-Tensor stehen (Spinor-Indizes der Quarkfelder und colour-Indizes aufgrund der starken Wechselwirkung sind weggelassen); Tr_{col} ist eine Spur im colour-Raum; $\overrightarrow{D}_\mu$, $\overleftarrow{D}_\mu$ sind rechts- bzw. linksseitige kovariante Ableitungen mit $\overleftrightarrow{D}_\mu = \overrightarrow{D}_\mu - \overleftarrow{D}_\mu$; $1^{(f)}$ und $\tau^{(j)}$ stellen eine Basis für Operatoren im Quark-flavour Raum, dem Raum der „Quark-Sorten", dar (hier für u, d: 2x2-Einheitsmatrix und Pauli-Matrizen). [2] Für die jeweiligen reduzierten Proton Matrixelemente $v_n^{(f)}(\mu)$ gilt der Zusammenhang

$$\frac{1}{2}\sum_{\vec{s}}\langle p,\vec{s}|\mathcal{O}^{R,(f)}_{\{\mu_1\ldots\mu_n\}}(\mu) - \text{Spuren}|p,\vec{s}\rangle = 2v_n^{(f)}(\mu)(p_{\mu_1}\ldots p_{\mu_n} - \text{Spuren}). \tag{1.14}$$

Dabei ist die Mittelung über den Protonspin $\vec{s}$ explizit angegeben; $|p,\vec{s}\rangle$ bezeichnet einen Proton-Zustand mit Vierer-Impuls p und Spin $\vec{s}$ und $\langle p,\vec{s}|\mathcal{O}^{R,(f)}_{\{\mu_1\ldots\mu_n\}}(\mu)|p,\vec{s}\rangle$ sind Vorwärts-Matrixelemente renormierter, zusammengesetzter Operatoren der Form (1.11) - (1.13), wobei diese in den Indizes $\mu_1,\ldots,\mu_n$ symmetrisiert ($\{\ldots\}$) und spurlos gemacht werden. (Die Operatoren verhalten sich irreduzibel unter Lorentz-Transformationen, haben eine bestimmte C-Parität, d.h. Verhalten unter Ladungskonjugation.) Solche Matrixelemente und damit $v_n^{(f)}(\mu)$ sind störungstheoretisch nicht berechenbar, da Protonen (Hadronen) ausgedehnte, gebundene Teilchenzustände sind und die starke Wechselwirkung, die die Konstituenten zusammenhält, bei nicht-kurzen Abständen groß und dann mit Hilfe störungstheoretischer Methoden nicht behandelbar ist. Traditionell wird $v_n^{(f)}(\mu)$ an das Experiment angepaßt.

Die hier kurz dargestellte Operator-Produkt-Entwicklung der Momente der Strukturfunktionen führt zu folgendem Ergebnis. Setzt man in (1.10) störungstheoretisch berechnete Wilson-Koeffizienten $c_{i,n}^{(f)}$ unter Ausnutzung Renormierungsgruppen-theoretischer

[2] Mit dieser Operator-Aufteilung aufgrund der annähernd gültigen globalen $\mathrm{U}_V(2) = \mathrm{U}_V(1)\otimes\mathrm{SU}(2)_V$ flavour-Symmetrie der QCD (bei $m_u \approx m_d$) werden auch die Momente und Strukturfunktionen in flavour-Singlet und flavour-Non-Singlet eingeteilt. Flavour-Non-Singlet twist-2 Operatoren sind in symmetrisierter und spurloser Form, (1.14), multiplikativ renormierbar. Flavour-Singlet Operatoren „mischen",d.h. ihre Renormierung ist bei gekoppelten Renormierungsbedingungen entsprechend komplizierter; i.a. gehen dabei sogar –je nach Renormierung– eichabhängige Geistfeld-Operatoren ein.

Methoden beispielsweise in führender Ordnung in g ein, so erhält man im Fall der Non-Singlet Momente (Non-Singlet Operatoren in der Operator-Produkt-Entwicklung):

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx\ x^{n-1} F_i^{NS}(x,Q^2) &= c_{i,n}^{NS}(1,g^2(Q,\Lambda))\Big(\frac{g^2(Q,\Lambda)}{g^2(\mu,\Lambda)}\Big)^{d_{NS}^n} v_n^{NS}(\mu) + O(1/Q^2) \qquad (1.15) \\ g^2(t,\Lambda) &= 16\pi^2/(\beta_0 \ln(t^2/\Lambda^2)) \end{aligned}$$

Λ ist ein experimenteller, die Kopplungskonstante g fixierender Parameter der QCD; der Wilson-Koeffizient wird in erster Ordnung Störungstheorie berechnet; für diesen wird die Renormierungsskala $\mu^2/Q^2 = 1$ gesetzt, damit (logarithmische) störungstheoretische Korrekturen in μ^2/Q^2 verschwinden. Der Renormierungsgruppen-Faktor $(...)^{d_{NS}^n}$ rechnet dann auf die Skala μ des reduzierten Proton Matrixelementes $v_n^{NS}(\mu)$ um. Q^2 ist dabei groß (tief inelastische Streuung) einerseits für die generelle und effiziente Anwendbarkeit der Operator-Produkt-Entwicklung und somit (1.15) und andererseits damit vernachlässigte höhere störungstheoretische Korrekturen in $g(Q,\Lambda)$ klein sind. Eine systematische Verbesserung wird durch die Berücksichtigung der nächsten Ordnung Störungstheorie in g erreicht.

Durch Quotientenbildung von (1.15) bei Q^2 und Q_0^2 erhält man eine Berechenbarkeit der Momente für beliebige Q^2 (im Anwendungsbereich von (1.15)), sobald ein Anfangswert $M_{i,n}^{NS}$ auf einer Skala Q_0^2 z.B. experimentell gegeben wird:

$$M_{i,n}^{NS}(Q^2) = M_{i,n}^{NS}(Q_0^2)\frac{c_{i,n}^{NS}(1,g^2(Q,\Lambda))}{c_{i,n}^{NS}(1,g^2(Q_0,\Lambda))}\Big(\frac{\ln(Q^2/\Lambda^2)}{\ln(Q_0^2/\Lambda^2)}\Big)^{-d_{NS}^n} \qquad (1.16)$$

Somit kann die Methode der Operator-Produkt-Entwicklung mit Hilfe von experimentellen Startwerten die Momente der Strukturfunktionen beschreiben.

C. Operator-Produkt-Entwicklung und Gitter-Physik:
Eine vollständige Berechnung der Momente der Strukturfunktionen ohne experimentelle Anfangsparameter wird über die Gitter-Physik ermöglicht. Wie werden hier die Matrixelemente $\langle p,\vec{s}|\mathcal{O}^{R,(f)}_{\{\mu_1\cdots\mu_n\}}(\mu)|p,\vec{s}\rangle$ und somit z.B. die Größen $v_n^{(f)}(\mu)$ berechnet?

Generell bedient man sich dazu der euklidischen, Gitter-regularisierten Funktional-Integral-Formulierung der QCD:

Eine analytische Fortsetzung zu imaginären Zeiten (setze $x_0 = -ix_4$) führt vom physikalischen Minkowski Raum zum Euklidischen Raum und erlaubt allgemein, beliebige Funktional-Integrale der QCD, durch welche Greensfunktionen des kanonischen Operatorformalismus ausgedrückt werden können, wie Zustandsmittelwerte eines Systems der klassischen Statistischen Mechanik in 4 Dimensionen, z.B. eines Spin-Systems, zu berechnen. Dabei nutzt man Methoden der Statistischen Mechanik: man diskretisiert Raum und Zeit in einem endlichen 4-dimensionalen Hyperwürfel $N_L^3 N_T$ mit geeigneten (allgemein periodischen) Randbedingungen und benutzt Monte Carlo Simulationen zur Berechnung interessierender Mittelwerte. Dazu setzt man die Parameter „physikalischer Gitterpunktabstand a“, „nackte starke Kopplungskonstante $g_0(a)$“ und „nackte Quarkmassen $am_0^{(f)}(a)$“ durch Normierung z.B. von auf dem Gitter berechneten Hadronmassen mit experimentellen Hadronmassen geeignet fest, so daß ein physikalisches System auf dem Gitter näherungsweise simuliert wird. [3] (Das damit fixierte physikalische Volumen $a^4 N_L^3 N_T$ sollte groß genug sein, daß große Korrelationslängen, d.h. Compton-Wellenlängen, leichter Teilchen $\sim$ Masse^{-1} hinein passen; es sollte feinmaschig genug sein, daß kurze Korrelationslängen schwerer Teilchen gut beschrieben werden.) [4] Alle weiteren Größen können jetzt im Prinzip vorhergesagt werden. Dabei sind Größen mit nicht direkt physikalischer Bedeutung wie die gesuchten Matrixelemente auf dem Gitter, z.B. in einem *MOM*-Schema, zu renormieren, (sie sind sonst im Kontinuum ultraviolett-divergent). Man muß schließlich einen Kontinuums-Limes bilden ($a \to 0$, Gitter-Volumen $N_L^3 N_T \to \infty$ mit $(g_0(a), am_0^{(f)}(a)) \to (0,0)$ bei Fixierung von $(a, g_0(a), m_0^{(f)}(a))$ durch physikalische Größen wie z.B. Hadronmassen und bei festem, im Prinzip unendlich großem physikalischen Raum-Zeit-Volumen). Dabei wird das jeweilige physikalische System in einer solchen Folge von Simulationen schrittweise immer besser angenähert. D.h. je näher man am Kontinuums-Limes ist, desto unwichtiger sollte die Wahl der physikalischen Größen zur Festlegung der Parameter $(a, g_0(a), m_0^{(f)}(a))$ sein und die vorhergesagten Ergebnisse sollten von a unabhängig werden (Skalenverhalten auf dem Gitter).

Konkret müssen hier, wie im folgenden gezeigt wird, hadronische Zwei-Punkt und Drei-Punkt Funktionen auf dem Gitter berechnet werden (Abbildung 1.2). Im kanonischen Hamiltonformalismus hat man mit Hilfe des Zeitentwicklungsoperators im Heisenbergbild, $B(t) = \mathrm{e}^{iHt} B(0) \mathrm{e}^{-iHt}$ (H Hamiltonoperator), und unter Ausnutzung der Translationsinvarianz des Vakuums für $0 < \tau < t$ im Kontinuum

$$\langle 0|TB(t)\bar{B}(0)|0\rangle = \langle 0|B(0)\mathrm{e}^{-iHt}\bar{B}(0)|0\rangle \tag{1.17}$$

$$\langle 0|TB(t)\mathcal{O}^R(\tau;\mu)\bar{B}(0)|0\rangle = \langle 0|B(0)\mathrm{e}^{-iH(t-\tau)}\mathcal{O}^R(0;\mu)\mathrm{e}^{-iH\tau}\bar{B}(0)|0\rangle. \tag{1.18}$$

Dabei wird zur Zeit 0 ein Hadronfeld B erzeugt und bei t vernichtet; bei τ liegt ein Operatorvertex mit auf der Skala μ renormierten Operatoren $\mathcal{O}$ der Form (1.11) - (1.13)

[3] Dieses Justieren der Parameter der Theorie QCD (Quarkmassen und starke Kopplungskonstante) stellt ein physikalisches Renormierungsschema dar. Unsere Wahl auf einem 16^3x32 Gitter bei $g_0(a) = 1$ entspricht etwa $am_0^{(u)}(a) = am_0^{(d)}(a) \approx 0.09, 0.065, 0.03$, wobei $a \approx 0.5 GeV^{-1} \approx 0.1 fm$ ist [33].

[4] Es tritt hier eine Komplikation auf: die leichtesten Teilchen, die Pionen, haben im Vergleich zu anderen Hadronen eine verschwindend kleine Masse und damit eine sehr große Korrelationslänge; es kann deswegen gegenwärtig nur eine Welt mit unphysikalischen, zu „schweren“ Pionen, gleichbedeutend mit großen nackten Quarkmassen $am_0^{(f)}(a)$ für $f = u, d$, simuliert werden; über einen (chiralen) Limes zu verschwindenden Quarkmassen für u, d Quarks (Pionmasse = 0) kann aber näherungsweise zur realen Welt mit sehr leichten u, d Quarks und Pionen extrapoliert werden und somit trotzdem ein Kontakt zwischen physikalischen Größen und Gittergrößen, z.B. für Hadronmassen, hergestellt werden.

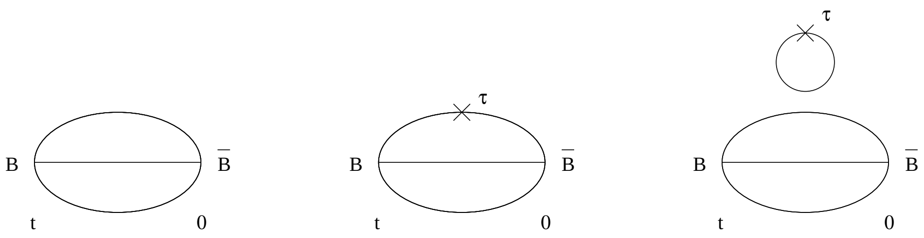

Abbildung 1.2: Feynman-Graphen für eine Baryon Zwei-Punkt Funktion (Propagator) und Baryon Drei-Punkt Funktionen („verbunden“ und „unverbunden“ $\sim$ Seequark-Beitrag).

vor. Das Proton (Antiproton) wird z.B. (neben anderen Teilchen mit denselben Quantenzahlen, die man als angeregte Zustände des Protons ansehen kann) dargestellt durch

$$B_\alpha(t;\vec{p}) \;=\; \sum_{\vec{x},abc} \mathrm{e}^{-i\vec{p}\vec{x}} \epsilon_{abc} u^a_\alpha(x)(u^b(x)C\gamma_5 d^c(x)) \tag{1.19}$$

mit Quarkfeldern u, d, Farbindizes $a, b, c = 1, 2, 3$, einem Spinorindex $\alpha = 1, \ldots, 4$ und dem Ladungskonjugationsoperator $C = \gamma_4\gamma_2$ (siehe Anhang A). Eine analytische Fortsetzung zu imaginären Zeiten (setze $x_0 = -ix_4$) erlaubt einerseits, die Greensfunktionen (1.17), (1.18) wie Korrelationsfunktionen der Statistischen Mechanik zu berechnen und führt andererseits, wenn vollständige Sätze von Eigenzuständen von H, $\sum_i |E_i\rangle\langle E_i|$, eingesetzt werden, und man eine Dominanz des „Grundzustands“ Proton ($|p,\vec{s}\rangle$ mit Energie E_p) bei großen Zeiten t bzw. $t-\tau$, τ aufgrund der Faktoren $\mathrm{e}^{-E_i t}$ bzw. $\mathrm{e}^{-E_i(t-\tau)}$ und $\mathrm{e}^{-E_i\tau}$ berücksichtigt, zu

$$\langle B_\alpha(t)\bar{B}_\beta(0)\rangle \;\approx\; \sum_s \langle 0|B_\alpha(0)|p,\vec{s}\rangle \mathrm{e}^{-E_p t}\langle p,\vec{s}|\bar{B}_\beta(0)|0\rangle \tag{1.20}$$

$$\langle B_\alpha(t)\mathcal{O}^R(\tau;\mu)\bar{B}_\beta(0)\rangle \;\approx\; \sum_{s,s'} \langle 0|B_\alpha(0)|p,\vec{s}\rangle \mathrm{e}^{-E_p t}\langle p,\vec{s}|\mathcal{O}^R(0;\mu)|p,\vec{s}'\rangle\langle p,\vec{s}'|\bar{B}_\beta(0)|0\rangle . \tag{1.21}$$

Über das Verhältnis $$\ln \frac{\langle B_\alpha(t)\bar{B}_\beta(0)\rangle}{\langle B_\alpha(t+1)\bar{B}_\beta(0)\rangle} \;\approx\; E_p, \quad 0 \ll t \tag{1.22}$$

kann allgemein die Hadronmasse, hier für das Proton aus $E_p = m_p$ für $\vec{p} = 0$, gewonnen werden und es ergeben sich die gesuchten Proton Matrixelemente, (1.14), aus dem von τ, t unabhängigen Verhältnis

$$\frac{\langle B_\alpha(t)\mathcal{O}^R(\tau;\mu)\bar{B}_\beta(0)\rangle}{\langle B_\alpha(t)\bar{B}_\beta(0)\rangle} \;\approx\; \begin{cases} \langle p,\vec{s}_\uparrow|\mathcal{O}^R(\mu)|p,\vec{s}_\uparrow\rangle & , \quad \alpha,\beta = 1 \\ \\ \langle p,\vec{s}_\downarrow|\mathcal{O}^R(\mu)|p,\vec{s}_\downarrow\rangle & , \quad \alpha,\beta = 2 \end{cases} , \quad 0 \ll \tau \ll t, \tag{1.23}$$

wenn $\vec{s}$ in z-Richtung definiert wird. Die Greensfunktionen $\langle B_\alpha(t)\mathcal{O}^R(\tau;\mu)\bar{B}_\beta(0)\rangle$ und $\langle B_\alpha(t)\bar{B}_\beta(0)\rangle$ müssen dabei auf dem Gitter berechnet werden.

1.2 Renormierung – Lösung eines Skalen-Problems

Hauptthema dieser Arbeit ist die Renormierung hadronischer Matrixelemente. An dieser Stelle soll Renormierung allgemein und im Zusammenhang mit der Methode der Operator-Produkt-Entwicklung diskutiert werden.

Quantenfeldtheoretische Probleme – obwohl es doch eigentlich um sehr einfache Objekte geht, denn nach heutigem Wissensstand sind Elektronen, Photonen, Quarks, Gluonen usw. echte Punkt-Teilchen – gehören zu den kompliziertesten der Physik: sie erfordern theoretisch die Berücksichtigung unendlich vieler Größenordnungen im Orts-Zeit-Raum und Energie-Impuls-Raum. Das wird z.B. dadurch deutlich, daß eine störungstheoretische Näherung solcher Theorien ultraviolett divergente Integrale und somit nicht zu vernachlässigende Beiträge von beliebig großen Energien und Impulsen oder beliebig kleinen Raum-Zeit-Skalen enthält. D.h. die absurd erscheinenden Unendlichkeiten sind nur Ausdruck eines komplizierten Raum-Zeit-Skalen-Problems. Der Grund hierfür scheint darin zu liegen, daß solche relativistischen Quantenfeldtheorien Relativitätstheorie und Quantentheorie, lokale Wechselwirkung und in Raum und Zeit ausgedehnte Felder (Dualismus Teilchen-Welle) in sich vereinigen müssen, was mathematisch anscheinend nur unter aufwendigerer Einbeziehung unendlich vieler Größenordnungen in einem nur asymptotisch erreichbaren Limes gleichzeitig realisierbar ist – das Verfahren hierzu läuft unter dem Namen Renormierungs-Programm und enthält die Schritte a.) Regularisierung (Abschneiden großer bzw. kleiner Skalen), b.) Renormierung (Definition einer so regularisierten Theorie mit physikalischem Kontinuums-Limes, wobei die theoretischen Parameter aus der Natur entnommen und ohne Erklärung in die Theorie hineingesteckt werden müssen) und c.) Kontinuums-Limes (Extrapolation zur Theorie mit unendlich vielen Größenordnungen).

Die Theorie der starken Wechselwirkung, die Quantenchromodynamik (QCD), ist geradezu ein Musterbeispiel einer renormierbaren Quantenfeldtheorie (streng bewiesen ist ihre Renormierbarkeit allerdings nur in der Störungstheorie [1, 2]) – sie ist andererseits aufgrund der SU(3)-Gruppenstruktur der Wechselwirkung sehr rechenaufwendig und ist mit Hilfe numerischer Simulationen im Rahmen der Gitter-QCD unter Verwendung von Höchstleistungs-Parallelrechnern seit Anfang/Mitte der 90er Jahre in ersten Ansätzen vollständig berechenbar.[5]

In der Gitter-QCD wirkt das raum-zeitliche Gitter sowohl als ultraviolette als auch infrarote Regularisierung, indem nur diskrete Raum-Zeit-Punkte $\{a, 2a, ..., N_{L,T}a\}$ bzw.

[5] Allgemeine Anmerkung: Im Gegensatz dazu ist die reine Quantenelektrodynamik (QED) aufgrund der U(1)-Gruppenstruktur der Wechselwirkung nicht rechenintensiv, aber theoretisch problematisch. Der Kontinuums-Limes ist nicht streng durchführbar – bei zugegebenermaßen völlig unrealistisch hohen Energien bei der Durchführung des Kontinuums-Limes gerät sie zumindest bei störungstheoretischer Behandlung in innere Widersprüche.

Impulse $\{\frac{2\pi}{N_L a}1, \frac{2\pi}{N_L a}2, ..., \frac{2\pi}{N_L a}N_L\}$ und Energien $\{\frac{2\pi}{N_T a}\frac{1}{2}, \frac{2\pi}{N_T a}\frac{3}{2}, ..., \frac{2\pi}{N_T a}(N_T - \frac{1}{2})\}$ zugelassen werden[6] (a = physikalischer Gitterpunktabstand, N_L, N_T = Gitterpunktanzahl in räumlicher, zeitlicher Richtung). Die so regularisierte QCD, z.B. in der Wilson-Formulierung, wird festgelegt, indem man bei genügend kleinem a die nackten Parameter der Theorie wie Kopplungskonstante und Quarkmassen durch Vergleich einer entsprechenden Anzahl auf dem Gitter berechneter und experimenteller Daten, z.B. Hadronmassen m, numerisch einstellt. Ein solches sogenanntes Hadronisches Schema ist also ein physikalisches Renormierungs-Schema.[7] Im Kontinuums-Limes $a \to 0$ (bei fixiertem physikalischen Volumen $a^4 N_L^3 N_T$), d.h. in einer Folge von Simulationen mit kleiner werdenden Werten für a ($a_1 > a_2 > a_3 > ...$), wobei die Parameter der Theorie in Abhängigkeit vom Regulator a^{-1} immer wieder neu über das Hadronische Schema bestimmt werden, werden die großen Energie- und Impuls-Skalen berücksichtigt, indem über die Simulationsergebnisse z.B. der Meß-Größe A ($A(a_1), A(a_2), A(a_3), ...$) zum Limes $A(a \to 0)$ (linear oder quadratisch in a) extrapoliert wird. Dabei begrenzen hier z.B. die niederenergetischen Hadronmassen m die mögliche Kleinheit von a bzw. Größe von a^{-1}, da sonst durch sehr große Gitter $N_L^3 N_T$ zur Darstellung kleiner m und großer a^{-1} sowohl Computer-Speicherplatz als auch -Rechenzeit ins nicht mehr Machbare anwachsen würden. Generell ist es ein technisches Problem, gleichzeitig viele unterschiedliche Skalen auf dem Gitter zu simulieren.

Für Größen nur eines physikalischen Energiebereiches wie die niederenergetischen Hadronmassen (hier also: $A := m$) führt obiges Renormierungs-Programm dabei zu einem beachtlichen Erfolg. Bei Größen sehr verschiedener Energie-Skalen stellt sich wie beim Kontinuums-Limes wieder das Problem ein, gleichzeitig unterschiedliche Skalen auf dem Gitter zu simulieren. Bei Strukturfunktionen sind das der Energie-Impuls-Transfer auf das Hadron $Q^2 \to \infty$ und Masse und Impuls m, p z.B. des Protons auf der niederenergetischen Hadron-Skala. Mit Hilfe einer Operator-Produkt-Entwicklung (siehe 1.1 B.) erreicht man die Zerlegung einer solchen Größe in zwei Faktoren, wobei jeder der beiden auf den ersten Blick nur noch von einer physikalischen Skala abhängt. Für die Momente der Proton Strukturfunktionen ergibt sich im tief-inelastischen Limes so:

$$M(Q^2, \text{Proton}) \quad \sim \quad \sum_{\mathcal{O}} c_{\mathcal{O}}(Q^2, \mu) \cdot v(\mathcal{O}^R(\mu), \text{Proton}) \tag{1.24}$$

mit Wilson-Koeffizienten $c_{\mathcal{O}}(Q^2, \mu)$, reduzierten Matrixelementen $v(\mathcal{O}^R(\mu), \text{Proton})$, lokalen, zusammengesetzten Operatoren $\mathcal{O}$ der Form (1.11) - (1.13) in führender Ordnung und ausgedehnten Protonzuständen. Diese Faktoren sind keine Observablen mehr, so daß doch wieder eine weitere Skala, eine Renormierungsskala μ, eingeführt werden muß. Auf diese Weise verschiebt man das Problem der unterschiedlichen physikalischen Größenordnungen ins Nicht-Beobachtbare und verschafft sich so zusätzliche Möglichkeiten, aber auch komplizierte, in der aktuellen Forschung diskutierte Probleme [3].

[6] bei periodischen (antiperiodischen) Randbedingungen in Raum- (Zeit-) Richtung.

[7] Die an sich unphysikalischen Wellenfunktions-Renormierungskonstanten werden abhängig vom Problem festgelegt.

Möglichkeiten der Operator-Produkt-Entwicklung:

• Die Operator-Produkt-Entwicklung erlaubt den Einsatz effizienter, an die jeweilige Skala angepaßter Rechenmethoden: die Wilson-Koeffizienten c, für die die Skala $Q^2 \to \infty$ maßgeblich ist, werden aufgrund der hier geltenden Asymptotischen Freiheit der QCD störungstheoretisch im Kontinuum berechnet, die reduzierten Matrixelemente v können (müssen) numerisch auf dem Gitter bestimmt werden – ansonsten ist man gezwungen, sie komplett über (1.24) bei einem Q_0 aus dem Experiment zu entnehmen. Da hier eine Operator-Beziehung ausgenutzt wird, die von Teilchen-Zuständen unabhängig ist, können einfache elementare Quark- und Gluon-Zustände anstatt komplizierter Hadron-Zustände zur Berechnung der Wilson-Koeffizienten und der Operator-Renormierungskonstanten verwendet werden:

Über M und v wird so, abhängig von der gewählten Eichung und den Quark-Zuständen (hier: Landau-Eichung, off-shell) c störungstheoretisch in der Kopplungskonstanten g in der Kontinuumstheorie berechnet:

$$M(Q^2, \mathrm{Quark}(p^2)) \quad \sim \quad \sum_{\mathcal{O}} c_{\mathcal{O}}(Q^2, \mu) \cdot v(\mathcal{O}^R(\mu), \mathrm{Quark}(p^2)) \tag{1.25}$$

v ist aufgrund der Operatoren $\mathcal{O}$ divergent und muß zusätzlich zur Renormierung der Theorie-Parameter renormiert werden. (M ist abgesehen von den Quark-Zuständen physikalisch – die Strom-Operatoren müssen nicht extra renormiert werden.) Üblicherweise wählt man für v dimensionale Regularisierung und ein MS- oder MOM-Renormierungsschema (Minimal Subtraction- bzw. Momentum Subtraction-Schema). Dabei wird in einem MOM-Schema in definierter Weise das zu v gehörige (amputierte) Matrixelement (siehe (1.14)) bei starker Wechselwirkung mit dem wechselwirkungsfreien (amputierten) Matrixelement gleichgesetzt, wobei der Vierer-Impuls der Quark-Zustände $p^2 = \mu^2$ ist:

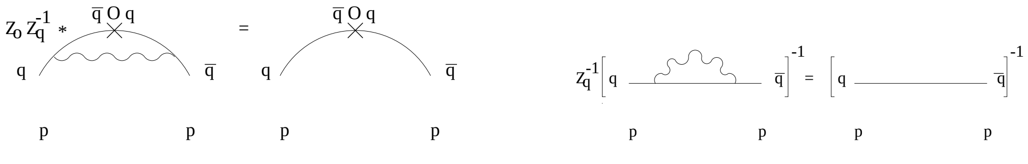

Abbildung 1.3: MOM-Schema zur Renormierung von Quark Drei-Punkt Funktionen und Quark Zwei-Punkt Funktionen (Propagatoren)

Je nach dem, ob die Divergenzen der verschiedenen Operatoren der Operator-Produkt-Entwicklung verwickelt sind (sich gegenseitig als Counter-Terme brauchen), fällt die Renormierung verschieden kompliziert aus. Im einfachen Fall wie hier der multiplikativen Renormierbarkeit (bei Non-singlet-Operatoren) kann jeder Operator für sich behandelt werden. Die über die Bedingungen in Abbildung 1.3 gewonnenen Renormierungskonstanten $Z_{\mathcal{O}}(\mu; \overline{\mu}, \epsilon)$ und $Z_{\psi}(\mu; \overline{\mu}, \epsilon)$ ($\overline{\mu}, \epsilon =$ Parameter der dimensionalen Regularisierung) führen so von der einfach störungstheoretisch ausgerechneten Größe $v(\mathcal{O}(\overline{\mu}, \epsilon), \mathrm{Quark}(p^2))$

auf die renormierte:[8]

$$v(\mathcal{O}^R(\mu), \text{Quark}(p^2)) \;= \lim_{\epsilon\to 0} \; Z_{\mathcal{O}}(\mu;\overline{\mu},\epsilon) Z_{\psi}(\mu;\overline{\mu},\epsilon) \cdot v(\mathcal{O}(\overline{\mu},\epsilon), \text{Quark}(p^2)) \quad (1.26)$$

$Z_{\mathcal{O}}(\mu)$ und $Z_{\psi}(\mu)$ werden ebenfalls benötigt, um $v(\mathcal{O}^R(\mu), \text{Proton})$ zu bestimmen – allerdings wird das unrenormierte (reduzierte) Proton-Matrixelement $v(\mathcal{O}(a), \text{Proton})$ auf dem Gitter, d.h. in Gitter-Regularisierung (Regulator: a^{-1}) und nicht wie oben bei dimensionaler Regularisierung (Regulator: ϵ) berechnet, so daß $Z_{\mathcal{O}}(\mu)$ und $Z_{\psi}(\mu)$ ebenfalls auf dem Gitter über die Bedingungen in Abbildung 1.3 festzulegen sind. Man erhält damit bei expliziter Angabe des Gitter-Regulators für das Proton Matrixelement (1.23) bzw. das reduzierte Matrixelement:

$$\langle p,\vec{s}|\mathcal{O}^R(\mu)|p,\vec{s}\rangle \;= \lim_{a\to 0} \; Z_{\mathcal{O}}(\mu a, g) \cdot \langle p,\vec{s}|\mathcal{O}(a)|p,\vec{s}\rangle \quad (1.27)$$

$$v(\mathcal{O}^R(\mu), \text{Proton}) \;= \lim_{a\to 0} \; Z_{\mathcal{O}}(\mu a, g) \cdot v(\mathcal{O}(a), \text{Proton}) \quad (1.28)$$

Konventionell benutzt man für die Berechnung von $Z_{\mathcal{O}}(\mu a, a)$ und $Z_{\psi}(\mu a, a)$ Gitter-Störungstheorie (Probleme: Gitterartefakte und schlechte Konvergenz); alternativ dazu wird in dieser Arbeit eine nicht-störungstheoretische Simulation der Quark-Bedingungen in Abbildung 1.3 untersucht. Auf diese Weise hat man sofort alle Ordnungen der Gitter-Störungstheorie und nicht-störungstheoretische Beiträge berücksichtigt.

Probleme:

• Die unphysikalischen Quark- und Gluon-Zustände verursachen zwei Probleme:

Einerseits muß eine Eichung fixiert werden, was – bekannt unter dem Namen Gribov-Problem – im allgemeinen nicht eindeutig ist. Außer im Gültigkeitsbereich der Störungstheorie wird hierdurch im Prinzip ein unkontrollierbarer Fehler verursacht.

Andererseits sind bei Verwendung eichabhängiger off-shell Quark- und Gluon-Zustände im Euklidischen zur Berechnung der Wilson-Koeffizienten und Operator-Renormierungskonstanten im allgemeinen (z.B. bei Singlet-Operatoren) sogenannte Geistfeld-Operatoren in der Operator-Produkt-Enwicklung zu berücksichtigen. Dagegen gibt es solche Operator-Beiträge nicht bei physikalischen Hadron-Zuständen. Wie hier vorzugehen ist, ist nicht unumstritten [3].

• Die Übersetzung der Operatoren vom Kontinuum auf das Gitter wird durch den Verlust der Euklidischen Raum-Zeit-Invarianz und der chiralen Symmetrie im allgemeinen kompliziert. Dies kann eine zusätzliche Mischung von Gitter-Operatoren unter Renormierung mit gleich oder niedriger-dimensionierten Operatoren (letztere divergieren sehr stark nach einem Potenz-Gesetz $\sim a^{-k}$) zur Folge haben.

• Das Skalen-Problem ist trotz Faktorisierung durch die Operator-Produkt-Entwicklung durch die zusätzliche Renormierungsskala noch vorhanden. Die Renormierungsskala μ

[8] Die Parameter der Theorie g, m müssen ebenfalls renormiert und dabei auf irgendeine Art und Weise experimentell fixiert werden.

sollte zum einen groß sein, $\mu^2 \approx Q^2$, damit die Wilson-Koeffizienten bereits in niedrigerer Ordnung Störungstheorie gut angenähert werden können. Zum anderen sollte sie auf dem Gitter nicht zu groß sein, damit dort nicht aufgrund der niederenergetischen Hadron-Skala durch die zu simulierenden Proton-Matrixelemente und die Hadronische Renormierung (siehe oben) und durch große Renormierungsskalen μ zu unterschiedliche Skalen darzustellen sind. Das Ziel ist es, ein „Fenster“ zu finden, indem μ groß genug ist, aber sich trotz des Impuls-Abschneidens durch die Gitter-Regularisierung keine großen Gitter-Fehler bemerkbar machen:

$$\frac{1}{(aN_{L,T})^2} \ll \Lambda^2 \ll \mu^2 \ll 1/a^2 \tag{1.29}$$

Der QCD-Parameter Λ kennzeichnet etwa den Übergang vom nicht-störungstheoretischen zum störungstheoretischen Skalen-Bereich von μ, wobei zur Vermeidung großer Gitter-Volumen-Effekte die Compton-Wellenlänge von Λ kleiner als die Gitterausdehnung sein sollte ($\Lambda^{-1} \ll aN_{L,T}$). Die obere Grenze leitet sich daraus ab, daß die Compton-Wellenlänge von μ sehr viel größer als der Gitterabstand sein sollte ($\mu^{-1} \gg a$), damit keine starken Diskretisierungsfehler auftreten. Dieses Kriterium ist wichtig, damit ein möglichst einfacher Kontinuums-Limes $a \to 0$ (linear oder quadratisch in a) z.B. für die renormierte Größe $v(\mathcal{O}^R(\mu), \text{Proton})$, (1.28), durchgeführt werden kann (siehe oben). a wird wegen der Notwendigkeit, Proton-Matrixelemente (allgemein Hadronische Matrixelemente aufgrund der Hadronischen Renormierung) auf dem Gitter darstellen zu müssen, eingeschränkt.

Bei den heute möglichen Gittern, hier 16^3x32 ($a^{-2} = 3.8GeV^2$) und 24^3x48 ($a^{-2} = 7.0GeV^2$) und einem $\Lambda = 230MeV$ [42], steht man damit an der Schwelle, wo ein solches Fenster (1.29) zu sehen sein könnte.

Weitere Möglichkeiten der Operator-Produkt-Entwicklung:

- Renormierungsgruppen-Theorie:

Die Bedingungen $\mu^2 \approx Q^2$ ($Q^2 \to \infty$) und $\Lambda^2 \ll \mu^2$ können mit Hilfe der Renormierungsgruppe entschärft werden. Aus der Unabhängigkeit der Momente M von der Skala μ und der trivialen Unabhängigkeit (noch) nicht renormierter Größen von der Renormierungs-Skala μ leiten sich Umrechnungsfaktoren zwischen verschiedenen Skalen μ ($\mu > \mu' > \mu''$) ab:

$$M(Q^2, \text{Proton}) \;\sim\; \sum_{\mathcal{O}} c_{\mathcal{O}}(Q^2,\mu) \cdot M_1(\mu,\mu') \cdot M_2(\mu',\mu'') \cdot v(\mathcal{O}^R(\mu''), \text{Proton}) \tag{1.30}$$

$M_1(\mu,\mu')$ wird störungstheoretisch im Kontinuum berechnet.[9] $M_2(\mu',\mu'')$ wird nicht-störungstheoretisch in einer Art „Zick-Zack-Kurs“ zwischen verschiedenen, aufeinander abgestimmten Gittern simuliert [4]; μ' liegt im störungstheoretischen Bereich.

[9] ein $M_1'(\mu,\mu)$ kann auch dazu dienen $c_{\mathcal{O}}$ und v in dasselbe Renormierungsschema umzurechnen; siehe dazu (1.32) und (1.33).

Probleme:
• Störungstheorie und Renormierungsgruppe:

Eine störungstheoretische Berechnung von $c_{\mathcal{O}}(Q^2, \mu)$ und $M_1(\mu, \mu')$ bricht insbesondere wegen der aufwendigen Rechnungen in der QCD bei einer verhältnismäßig niedrigen Ordnung in g^2 ab. Dies verursacht – abhängig vom Renormierungsschema und insbesondere bei kleinen Skalen $Q^2, \mu, \mu', \approx$ einige GeV^2 – systematische Fehler; zum anderen ist eine experimentelle Festlegung der Theorie-Parameter, z.B. Λ für g, im Rahmen der Störungstheorie so prinzipiell fehlerhaft.

Die Nicht-störungstheoretische Renormierungsgruppe ist bis jetzt erfolgreich zur Berechnung der „laufenden" Kopplungskonstanten $g(Q)$ (und Λ) und der „laufenden" Quarkmasse $m(Q)$ auf dem Gitter angewandt worden [5]. Sie setzt voraus, daß O(a)-Fehler gering sind und erfordert umfangreiche Simulationen.

1.3 Überblick über diese Arbeit

Die Berechnung der Strukturfunktionen des Nukleons (also des Protons oder Neutrons), welche quantitative Aussagen über den Aufbau eines Nukleons aus Quarks und Gluonen zulassen, ist ein außerordentlich komplexes Problem. Über die Methode der Wilson Operator-Produkt-Entwicklung (OPE) erlauben störungstheoretische Methoden der QCD eine Lösung; allerdings führt man dabei neben den Theorie-Parametern weitere auf experimentellem Wege oder durch zusätzliche Modell-Überlegungen, die nicht aus der QCD folgen, zu fixierende Parameter ein (die reduzierten hadronischen Matrixelemente) und schöpft damit die Vorhersagemöglichkeiten der QCD nicht voll aus. Das QCDSF-Projekt bei DESY verfolgt zur Zeit unter anderem das Ziel, mit Hilfe sehr leistungsfähiger Parallel-Großrechner diese Größen über die Funktionalintegral-Formulierung der QCD *ab initio* numerisch zu berechnen. Es gibt hierbei zwei Teilaufgaben: die Berechnung hadronischer Matrixelemente $\langle p, \vec{s} | \mathcal{O}^{(f)}_{\{\mu_1 \cdots \mu_n\}} - \text{Spuren} | p, \vec{s} \rangle$ und ihre Renormierung, siehe (1.14); letzteres ist Hauptgegenstand dieser Arbeit (siehe auch [6]).

Die vorliegende Arbeit besteht aus vier Teilen. Dabei bereiten die ersten 3 auf den eigentlichen Abschnitt „Renormierung auf dem Gitter" vor:

Grundlagen der Strukturfunktionen
Es werden die allgemein-theoretischen Grundlagen dargestellt, d.h. die QCD in der Funktional-Integral-Darstellung im Kontinuum und auf einem 4-dimensionalen Gitter mit endlicher Ausdehnung und periodischen Randbedingungen in der Wilson-Formulierung. Weiterhin wird beschrieben, wie sich Strukturfunktionen aus tief-inelastischen Streuquerschnitten ergeben und sich mit Hilfe des Parton-Modells und der Momente-Entwicklung und Operator-Produkt-Entwicklung berechnen lassen.

Gitter und Algorithmen

Wir simulieren hier Standard Wilson Fermionen ($r = 1$) in der quenched Approximation[10] auf den Gittern 16^3x32 ($a^{-1} = 1.95GeV$, $\beta = 6.0$) und 24^3x48 ($a^{-1} = 2.65GeV$, $\beta = 6.2$) mit den räumlichen Ausdehnungen 1.6 fm bzw. 1.8 fm; dabei werden hopping Parameter $\kappa = 0.155, 0.1530, 0.1515$ ($\kappa_c = 0.157211$) bzw. $\kappa = 0.152, 0.1507, 0.1489$ ($\kappa_c = 0.153374$) verwendet [33][11]. Folgende Punkte werden betrachtet:

- Die Berechnung von Proton Matrixelementen auf dem Gitter wird erläutert.

- Der mit dem Übergang vom (euklidischen) Kontinuum zum Gitter verbundene Wechsel der Raum-Zeit-Symmetrie von der Gruppe $O(4)$ zur hyperkubischen Gruppe $H(4)$ verursacht eine geänderte Klassifizierung bilinearer Quark-Operatoren und dadurch eine im allgemeinen kompliziertere Renormierung solcher Operatoren. Eine geeignete Auswahl für die Operatoren der OPE (Non-Singlet) auf dem Gitter wird angegeben.

- Die für die Proton Matrixelemente notwendige Berechnung der 2-pt und 3-pt Greensfunktionen $C^{(2)}(t,0) = \langle B_\alpha(t)\bar{B}_\beta(0)\rangle$, $C^{(3)}(t,\tau,0) = \langle B_\alpha(t)\mathcal{O}(\tau)\bar{B}_\beta(0)\rangle$ wird erklärt, siehe (1.19). Die Greensfunktionen können in elementare u- und d-Quark-Propagatoren zerlegt und über Gitter-Dirac-Gleichungen mit geeigneten Quellen (Matrizen-Gleichung) berechnet werden. Die Algorithmen der Eichfeld-Generierung mittels Monte-Carlo-Methoden und geeignete Quellen-Methoden werden beschrieben.

- Zur Renormierung der hadronischen Matrixelemente (Proton Matrixelemente) werden 2-pt und 3-pt Quark-Greensfunktionen auf dem Gitter simuliert:

$$S(p) = \langle q_\alpha(p)\bar{q}_\beta(p)\rangle, \qquad G(p) = \langle q_\alpha(p)\mathcal{O}(0)\bar{q}_\beta(p)\rangle \tag{1.31}$$

($p =$ Energie-Impuls des Quarkfeldes q). Die generierten Eichfelder müssen dazu zusätzlich auf dem Gitter eichfixiert werden (hier: Landau-Eichung). Es werden Algorithmen zur Eichfixierung und geeignete Quellen-Methoden zur effizienten Berechnung der Quark-Greensfunktionen dargestellt.

- Der Parallelrechner APE/Quadrics wird beschrieben.

Renormierung im Raum-Zeit-Kontinuum

Für einen Wechsel des Renormierungsschemas oder der Renormierungsskala μ (zur Renormierung der hadronischen Matrixelemente) wird Kontinuums-Störungstheorie benutzt:

---

[10] Beiträge von Fermion-Schleifen werden in der Wirkung vernachlässigt

[11] Die Parameter β, κ hängen mit den nackten Theorie-Parametern, Kopplungskonstante g_0 und Quarkmasse m_0, über $\beta = \frac{6}{g_0^2}$ und $m_0 \sim \frac{1}{\kappa}$ zusammen; eine sogenannte chirale Extrapolation der Simulationsergebnisse in $\frac{1}{\kappa}$ zum kritischen Wert $\frac{1}{\kappa_c}$ entspricht dem Übergang zur (Quark-)masselosen QCD. (u- und d-Quarks sind näherungsweise masselos.)

• Dazu werden 2-pt und 3-pt Quark-Greensfunktionen in dimensionaler Regularisierung (in beliebiger Eichung und 1-Schleifen-Näherung) in der Kontinuums-Störungstheorie berechnet und nach verschiedenen Schemata vom Typ MOM und MS, $\overline{MS}$ renormiert; es werden Umrechnungsformeln von MOM zu den Standard-Schemata der Hochenergiephysik MS, $\overline{MS}$ abgeleitet (finite Renormierung):

$$Z_{\mathcal{O}}^{\overline{MS}} \;=\; X_{MOM}^{\overline{MS}} Z_{\mathcal{O}}^{MOM} \tag{1.32}$$

• Die Kontinuums-Renormierungsgruppe (hier 1- und 2-Schleifen-Näherungen im $\overline{MS}$-Schema) liefert Umrechnungsformeln für einen Wechsel der Renormierungsskala μ:

$$Z_{\mathcal{O}}^{\overline{MS}}(\mu) \;=\; R_{\mathcal{O}}(\mu,\mu_0) Z_{\mathcal{O}}^{\overline{MS}}(\mu_0) \tag{1.33}$$

Renormierung auf dem Gitter

Die in dieser Arbeit auf dem Gitter vorgenommene Renormierung der hadronischen Matrixelemente über Bedingungen an Quark-Greensfunktionen (1.31) ahmt das MOM-Schema der Kontinuums-Störungstheorie nach. Es wird etwas symbolisch gefordert:

$$\Gamma_R(p) \;\equiv\; \Gamma_{Born}(p)\Big|_{p^2=\mu^2}, \tag{1.34}$$

wobei $\Gamma_R(p) = Z_q^{-1} Z_{\mathcal{O}} \Gamma(p)$ die renormierte Vertex Funktion $\Gamma(p) = S^{-1}(p) G(p) S^{-1}(p)$ und $\Gamma_{Born}(p)$ die Baumgraphen-Näherung der Gitter-Störungstheorie ist. Über eine Projektion mit $\Gamma_{Born}^{-1}(p)$ und Spurbildung im *color* $\times$ *spin* Raum wird hieraus eine konkrete Renormierungsbedingung für $Z_{\mathcal{O}}$ (und Z_q):

$$\frac{1}{12} tr\Big(Z_q^{-1} Z_{\mathcal{O}} \Gamma(p) \Gamma_{Born}^{-1}(p)\Big) \;=\; 1\Big|_{p^2=\mu^2} \tag{1.35}$$

Z_q erhält man ganz analog über (1.34), wobei $\Gamma_R(p) = Z_q^{-1} S^{-1}(p)$ der renormierte inverse Propagator und $\Gamma_{Born}(p) \approx \sum_\lambda \sin p_\lambda \gamma_\lambda$ die Baumgraphen-Näherung der masselosen Kontinuumstheorie auf dem Gitter ist.

Es werden lokale bilineare Quark Operatoren und solche mit bis zu drei Ableitungen (Operatoren der OPE) untersucht (Non-Singlet Operatoren). Der Renormierungspunkt μ^2 wird auf logarithmischer Skala im Bereich $0.5 GeV^2 < \mu^2 < 80 GeV^2$ variiert.

• Ergebnisse werden für obiges Schema (1.35) für die masselose QCD (chiraler Limes über Ergebnisse bei 3 verschiedenen Quarkmassen) und 2 Kopplungen $\beta = 6.0$ und $\beta = 6.2$ gegeben.

• Ein anderes (ungewöhnliches) Gitter-MOM-Schema wird kurz dargestellt.

• Die MOM-Ergebnisse aus (1.35) werden über Gleichung (1.32) ins $\overline{MS}$-Schema umgerechnet und dann mit Ergebnissen der Gitter-Störungstheorie der Standard und Tadpoleverbesserten Version in Kombination mit der Renormierungsgruppen-Verbesserung (1.33) mit dem Startwert $Z_{\mathcal{O}}^{Pert.,\overline{MS}}(\mu_0 = 2.0GeV)$ verglichen. Das Auffinden eines störungstheoretischen Fensters in μ^2, indem zumindest die μ^2-Abhängigkeit der durch numerische Simulationen gewonnenen Renormierungskonstanten störungstheoretisch beschrieben werden kann, wird einerseits durch Diskretisierungsfehler (nach (1.29) ab $3.8GeV^2$ ($\beta = 6.0$), ab $7.0GeV^2$ ($\beta = 6.2$)) und andererseits durch fehlende höhere Ordnungen der Gitter- und Kontinuums-Störungstheorie erschwert. (Ein solches störungstheoretisches Fenster ist notwendig, da die Wilson-Koeffizienten ein „inverses störungstheoretisches Verhalten" in μ^2 besitzen und somit das Produkt aus Wilson-Koeffizient und Renormierungskonstante nur hier μ^2-unabhängig und damit physikalisch werden kann.)

• Es wird das Kontinuumsverhalten der Renormierungskonstanten im Raum der nackten Parameter, hier β bzw. g_0, untersucht – d.h. ob die Simulationsergebnisse bei $\beta = 6.0$ und $\beta = 6.2$ über eine Renormierungsgruppen-Gleichung in Beziehung stehen, also bereits Skalen- oder Kontinuumsverhalten zeigen.

• Am Beispiel der Operatoren

$$\mathcal{O} = \overline{q}\left(\gamma_4 \overset{\leftrightarrow}{D}_4 - \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\gamma_i \overset{\leftrightarrow}{D}_i\right)q, \quad \text{und} \quad \mathcal{O} = \overline{q}\frac{1}{2}\left(\gamma_1 \overset{\leftrightarrow}{D}_4 - \gamma_4 \overset{\leftrightarrow}{D}_1\right)q$$

wird das zugehörige Moment der unpolarisierten Strukturfunktionen F_1, F_2 des Nukleons berechnet.

Kapitel 2

Grundlagen

2.1 QCD und ihre Funktional-Integral-Darstellung

Die Theorie der starken Wechselwirkung zwischen Quarks und Gluonen, die Quantenchromodynamik (QCD), ist eine quantisierte $SU(3)$ colour Eichtheorie (colour oder Farbe ist ein durch die starke Wechselwirkung zusätzlich gegebener Freiheitsgrad).

Die Elemente U der speziellen unitären Lie Gruppe $SU(3)$ können durch 8 hermitesche Generatoren T_a erzeugt werden:

$$U = \exp\left\{-ig\Theta^a T_a\right\} \tag{2.1}$$

mit 8 verallgemeinerten Euler-Winkeln Θ_a (die starke Kopplungskonstante g sei hier als Faktor hinzugefügt). Die dazugehörige Lie Algebra der Generatoren

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c \tag{2.2}$$

wird über die reellen, antisymmetrischen Struktur-Konstanten f_{abc} definiert.

In einer Eichtheorie transformieren sich die Materie-Felder, hier die Quark-Felder, die in colour Tripletts für jede Quark-Sorte $u, d, s, \ldots$ auftreten, lokal mit $\Theta^a = \Theta^a(x)$ nach:

$$\psi(x) \longrightarrow U(x)\psi(x) \quad , \quad \bar{\psi}(x) \longrightarrow \bar{\psi}(x)U^{-1}(x) \; . \tag{2.3}$$

Um die Forderung nach einer lokal eichinvarianten Wirkung im Kontinuum zu erfüllen, führt man kovariante Ableitungen ein:

$$\mathcal{D}_\mu = \Big(\partial_\mu - igT_a A_\mu^a(x)\Big) \; . \tag{2.4}$$

Die dabei auftretenden Eichfelder $A_\mu(x) = A_\mu^a(x)T^a$ transformieren sich nach:

$$A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu(x) - T_a\partial_\mu\Theta^a(x) = U(x)\left(A_\mu(x) + \frac{i}{g}\partial_\mu\right)U^{-1}(x). \tag{2.5}$$

Um nun eine Wirkung zu bilden, benötigt man den aus der Maxwell-Theorie der Elektrodynamik verallgemeinerten Feld-Stärke Tensor, hier Yang-Mills (YM) Feld-Stärke Tensor,

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{g}[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu], \tag{2.6}$$

so daß die Eichfeld-Dynamik durch folgende Lagrange-Wirkungsdichte, hier YM-Lagrange-Dichte, beschrieben werden kann:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right\}. \tag{2.7}$$

Damit ergibt sich schließlich eine lokal eichinvariante Lagrange-Dichte für Spin 1/2 Materie-Felder, hier die der QCD für Quark-Felder, zu:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{k=1}^{n_f}\bar{\psi}_k\left(i\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu - m_k\right)\psi_k - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right\}. \tag{2.8}$$

n_f ist die Quark-flavour Anzahl, d.h. die Anzahl der Quark-Materie-Felder, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ sind Lorentz Indizes. Colour und spinor Indizes sind unterdrückt.

Die Lösung der quantisierten Eichtheorie (2.8) besteht in der Berechnung von Greensfunktionen, die durch Funktional-Integrale ausgedrückt werden können (siehe z.B. [1], [7]):

Für eichinvariante Größen wie z.B. Proton-Greensfunktionen (4.11) und (4.12) gilt direkt mit $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{QCD}$:

$$\langle X(\psi, \bar{\psi}, A)\rangle = \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}A\,X(\psi, \bar{\psi}, A)\mathsf{exp}\Big[i\int d^4x\mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}, A)\Big] \tag{2.9}$$

und

$$Z = \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}A\,\mathsf{exp}\Big[i\int d^4x\mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}, A)\Big], \tag{2.10}$$

wobei $X(\psi, \bar{\psi}, A)$ aus Feldern zusammengesetzte Größen sind, die unter den Transformationen (2.3) und (2.5) invariant (d.h. eichinvariant) sind.

Für eichvariante Größen wie z.B. Quark-Greensfunktionen (4.64) und (4.65) muß zusätzlich eine Eichung (z.B. zur Landau-Eichung) fixiert werden und es müssen unphysikalische Geistfelder eingeführt werden, so daß die entsprechenden Funktional-Integrale (2.9) nicht zu Null verschwinden; die Lagrange-Dichte der QCD wird dann um einen

Eichfixierungsterm $\mathcal{L}_{gf}$ und einen Geistfeldausdruck $\mathcal{L}_g$ erweitert zu:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{QCD} + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_g \tag{2.11}$$

mit

$$\mathcal{L}_{gf} = \frac{1}{2\xi}\sum_a (\partial^\mu A_\mu^a)^2 \tag{2.12}$$

$$\mathcal{L}_g = \overline{u}^a \partial^\mu (\partial_\mu \delta_{ab} - g f_{abc} A_\mu^c) u^b \tag{2.13}$$

$\overline{u}, u$ sind Geistfelder, ξ ist ein Eichfixierungsparameter ($\xi = 0$ bei Landau-Eichung); a, b, c sind colour Indizes.

Statt einer Eichinvarianz liegt hier eine allgemeinere, eine sogenannte BRS-Invarianz der Lagrange-Dichte vor.

Was genau die Funktional-Integrale (2.9) bedeuten, ist kompliziert. Eine allgemeine Definition ist aber durch folgende Prozedur möglich [1]:

(1) Wick-rotiere zu imaginären Zeiten: $t = -i\tau$, so daß die Raum-Zeit euklidisch ist. Der Exponentialfaktor $\exp[-\int d\tau d^3x \mathcal{L}_{Eucl.}]$ ergibt eine sehr viel bessere Konvergenz für große und stark variierende Felder als $\exp[i \int d^4x \mathcal{L}]$ in der Minkowski-Raum-Zeit. Zum Wechsel der Darstellung der Dirac-Matrizen siehe Anhang A.

(2) Ersetze die euklidische kontinuierliche Raum-Zeit durch ein Raum-Zeit-Gitter; allgemein wählt man ein kubisches Gitter mit einem Gitterpunkt-Abstand a. Die Gitterpunkte sind $x_\mu = n_\mu a$ mit ganzen Zahlen n_μ (für die Richtungen x, y, z gilt: $n_\mu = 1, \dots, L$, in Zeit-Richtung gilt: $n_4 = 1, \dots, T$). Das Funktional-Integral (2.9) ist nun ein absolut konvergentes Integral über eine endliche Anzahl von Variablen. Bei der Diskretisierung der Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ besteht eine gewisse Freiheit, sie muß allerdings bei verschwindendem Gitterpunkt-Abstand a alle (Symmetrie-) Eigenschaften der Lagrange-Dichte im Kontinuum wiederbekommen. Allgemein üblich ist die sogenannte Wilson-Formulierung [8], die im folgenden Unterabschnitt beschrieben wird. a in physikalischen Einheiten und die nackten Parameter der Theorie wie Kopplungskonstante und Quarkmassen müssen durch einen Vergleich einer entsprechenden Anzahl auf dem Gitter berechneter und experimenteller Daten, z.B. Hadronmassen m, numerisch festgelegt werden. Neben dieser Renormierung der Theorie-Parameter müssen die in (2.9) enthaltenen Felder und aus diesen gebildete Operatoren z.B. in einem MOM-Schema auf dem Raum-Zeit-Gitter renormiert werden.

(3) Bilde einen Kontinuums-Limes $a \to 0$ bei genügend großem (im Prinzip unendlichem) Raum-Volumen $V = L^3$ und genügend großer (unendlicher) Zeit-Ausdehnung T. Dabei ist anzumerken, daß dies mit störungstheoretischen Methoden (zur Berechnung eichvarianter Größen wie z.B. Quark-Greensfunktionen) analytisch möglich ist. Über Computer-Simulationen dagegen ist ein Gitter mit $a = 0$ numerisch nicht zu verwirklichen, da unendlich viele Gitterpunkte zu berechnen wären; bei genügend kleinem a (Gitter-Skalenbereich) stellen Gitter-Ergebnisse allerdings bereits eine gute Näherung an entsprechende Kontinuums-Ergebnisse dar. Im allgemeinen geht man bei numerischen Simulationen jedoch so vor, daß man interessierende Kontinuumsgrößen A, entweder Greensfunktionen X oder daraus abgeleitete Größen, auf verschieden großen Gittern mit Gitterpunkt-Abständen $a_1 > a_2 > a_3 > ...$ berechnet und schließlich durch einen linearen oder quadratischen Fit in a diese Größen $A(a_1), A(a_2), A(a_3), ...$ zum Limes $A(a \to 0)$ extrapoliert.

Im Limes $a \to 0$ verschwinden im Falle der QCD auch die nackten Parameter Kopplungskonstante und Quarkmassen; im mathematischen Sinne kann dieser Punkt im Raum dieser Parameter als Phasen-Übergangspunkt zweiter Ordnung aus der Thermodynamik angesehen werden.

(4) Kehre über analytische Fortsetzung zur physikalischen Minkowski Raum-Zeit wieder zurück. In der Gitter-Physik erleichtert/umgeht man diesen Schritt, indem statische, zeitunabhängige Endgrößen berechnet werden.

2.2 Formulierung der QCD auf dem Gitter

In der Gitter-Formulierung der QCD wird der vier-dimensionale Raum-Zeit-Vektor x des Kontinuums durch diskrete Vektoren $x_\mu = n_\mu a$ mit $n = (n_1, n_2, n_3, n_4)$ und einem Gitterpunkt-Abstand a dargestellt, wobei für die Raum-Richtungen $n_1, n_2, n_3 = 1, \ldots, L$ und die Zeit-Richtung $n_4 = 1, \ldots, T$ gilt. Diskrete Gitter-Größen können als Näherung an die entsprechenden Kontinuumsgrößen in den Elementarzellen a^4 angesehen werden. Das Gitter stellt so eine Regularisierung der QCD dar; einerseits werden große Energien/Impulse (ultravioletter cut-off) und andererseits kleine Energien/Impulse (infraroter cut-off) abgeschnitten.

Für den gluonischen Teil der Gitter-Wirkung wird aus dem Eichfeld des Kontinuums $A_\mu(x)$ die $SU(3)$ Matrix

$$U_\mu(n) = \mathcal{P}\left[\exp\left(ig\int_n^{(n+\hat{\mu})a} dx A_\mu(x)\right)\right] \simeq e^{igaA_\mu((n+\hat{\mu}/2)a)} \tag{2.14}$$

gebildet. $\mathcal{P}$ stellt einen Pfadordnungs-Operator dar. $U_\mu(n)$ kann der Verbindungslinie zwischen den Gitterpunkten n und $n + \hat{\mu}$ in Richtung μ zugeordnet werden ($\hat{\mu}$ ist der Vierer-Einheitsvektor in μ-Richtung). Der Gitter YM Feldstärke-Tensor $\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)$ sei durch das geordnete Produkt von $U_\mu(n)$-Feldern entlang der Verbindungslinien des kleinsten Quadrats, einer sogenannten Plakette P, folgenderweise definiert:

$$U_{\mu\nu}(n) = U_\mu(n)U_\nu(n+\hat{\mu})U_\mu^\dagger(n+\hat{\nu})U_\nu^\dagger(n) = \exp\left(iga^2\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)\right). \tag{2.15}$$

Dabei ist $x = (n + \hat{\mu}/2 + \hat{\nu}/2)a$; die Spur von $U_{\mu\nu}(n)$ ist auf diese Weise eichinvariant. Der diskretisierte YM Feldstärke-Tensor ist dann bis zur Ordnung a gleich dem des Kontinuums; spurlos gemacht, gilt sogar $F_{\mu\nu} = \mathcal{F}_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\mathcal{F}_{\mu\nu} + \mathcal{O}(a^2)$. Nach Wilson [8] ist schließlich der gluonische Teil der Gitter-Wirkung:

$$\mathcal{S}_g^W[U] = \beta \sum_{n,\mu>\nu} \left\{1 - \frac{1}{3}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,U_{\mu\nu}(n)\right\} = -\int d^4x \left\{\mathcal{L}_{YM} + \mathcal{O}(a^2)\right\} + const., \tag{2.16}$$

wobei über alle Gitter-Plaketten P summiert wird. Hierbei ist $\beta = 6/g^2$ mit der nackten Kopplungskonstanten g.

Bei dem fermionischen Teil der Gitter-Wirkung tritt ein Problem auf. Die einfache Diskretisierung $\partial_\mu \to d_\mu = \frac{1}{2}\left[\delta_{m,n+\hat{\mu}} - \delta_{m,n-\hat{\mu}}\right]$ führt zu einer Vermehrung der fermionischen Teilchen im Kontinuum. Der Fermion-Propagator hat im Energie-Impuls-Raum nicht nur im Nullpunkt, sondern generell zwei Minima in jeder der 4 Lorentz-Richtungen, also insgesamt 16 Fermion-Teilchen. Durch irgendeinen Mechanismus müssen die 15 zusätzlichen unterdrückt oder vom physikalischen Teilchen unterschieden werden; die bekanntesten Mechanismen sind von Wilson [8] und Kogut-Susskind [9].

Bei Wilson wird eine zweite Ableitung zur einfachen Wirkung dazuaddiert:

$$-\frac{r}{2}\sum_{k,k'}\sum_{\mu=1}^{4} \bar{\psi}_k \left(U_\mu(k)\delta_{k+\hat{\mu},k'} - 2\delta_{k,k'} + U_\mu^\dagger(k-\hat{\mu})\delta_{k-\hat{\mu},k'}\right)\psi_{k'}. \tag{2.17}$$

Diese führt dazu, daß die 15 unphysikalischen Massen im Kontinuumslimes $a \to 0$ unendlich schwer werden und so keine frei beweglichen Teilchen mehr darstellen. Die Wilson-Wirkung auf dem Gitter ist schließlich

$$S_f^W = \sum_{k,k'} \bar{\psi}_k M_{k,k'} \psi_{k'} = \int d^4x \left\{\mathcal{L}_f + \mathcal{O}(a)\right\}, \tag{2.18}$$

mit der Wilson Fermion-Matrix ($r = 1$)

$$M_{kk'}[U] = \mathbf{1} - \kappa \sum_{\mu=1}^{4} \left\{(r-\gamma_\mu)U_\mu(k)\delta_{k+\hat{\mu},k'} + (r+\gamma_\mu)U_\mu^\dagger(k-\hat{\mu})\delta_{k-\hat{\mu},k'}\right\} \tag{2.19}$$

und dem sogenannten hopping Parameter κ, der der nackten Quarkmasse $m_0(a)$ entspricht:

$$m_0(a) = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa_c}\right). \tag{2.20}$$

$\kappa = \kappa_c$ entspricht einer verschwindenden nackten Quarkmasse. Neben der Unterdrückung der sogenannten Fermion-Verdopplung bricht die Wilson-Formulierung der QCD auf dem

Gitter allerdings die chirale Symmetrie, sogar im Limes verschwindender nackter Quarkmasse, d.h. im sogenannten chiralen Limes $\kappa \to \kappa_c$. In der Störungstheorie kann jedoch gezeigt werden, daß die chiralen Eigenschaften der QCD im Limes $a \to 0$ wieder restauriert werden [10].

Insgesamt lautet die in dieser Arbeit verwendete Wilson-Formulierung der QCD auf dem Gitter also:

$$S^W_{QCD} = S^W_g + S^W_f = \beta \sum_{n,\mu>\nu} \left\{1 - \frac{1}{3}\mathrm{ReTr}\, U_{\mu\nu}(n)\right\} + \sum_{k,k'} \bar{\psi}_k M_{k,k'} \psi_{k'}. \tag{2.21}$$

Eichinvariante Größen werden also über

$$\langle X(\psi,\bar{\psi},U)\rangle = \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}U\; X(\psi,\bar{\psi},U)\mathsf{exp}[-S^W_{QCD}] \tag{2.22}$$

mit

$$Z = \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}U\; \mathsf{exp}[-S^W_{QCD}] \tag{2.23}$$

berechnet.

Für eichvariante Größen muß eine Eichung fixiert werden. In der Gitter-Störungstheorie geschieht dies analog zur Kontinuums-Störungstheorie über eine Diskretisierung von Eichfixierungs- und Geistfeld-Termen (2.12), (2.13). Für numerische Simulationen auf dem Gitter wird diese sogenannte Faddeev-Popov Form durch folgende Funktional-Integral-Formulierung ersetzt:

$$\langle X(\psi,\bar{\psi},U)\rangle = \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}U\; X(\psi,\bar{\psi},U^{(g)})\mathsf{exp}[-S^W_{QCD}] \tag{2.24}$$

Dabei sind g Eichtransformationen, die U dahingehend umformen, daß $U^{(g)}$ die Eichfixierungsbedingung $f(U^{(g)}) = 0$ erfüllen (siehe Abschnitt 4.4. und [19]).

Kapitel 3

Strukturfunktionen

3.1 Tief-Inelastische Streu-Prozesse und Strukturfunktionen

Bei einem tief-inelastischen Streu-Prozeß untersucht man die Streuung eines Leptons l (Elektron, Muon, Neutrino,...) an einem Hadron N (Proton, Neutron, Pion, Rho,...), wobei nur der Endzustand des Leptons l' ausgewertet wird; der hadronische Endzustand X wird nicht weiter spezifiziert:

$$l + N \longrightarrow l' + X \tag{3.1}$$

Bei der theoretischen Beschreibung in der „Stoßnäherung“ geht man von einer einfachen Streuung der Leptonen an Quarks (und indirekt Gluonen) in den Hadronen aus. Denn ist der Energie-Impuls-Übertrag über das ausgetauschte Wechselwirkungsboson (γ, Z^0 oder $W^{\pm}$) dabei groß, ist die Wechselwirkungszeit klein. Starke Vorgänge an dem gestreuten Quark (Bildung neuer Hadronteilchen) laufen auf größerer Zeitskala ab und beeinflussen die Streuung nicht. Eine denkbare weitere Streuung ist aufgrund der geringen Stärke der schwachen und elektromagnetischen Wechselwirkung unwahrscheinlich.

Die kinetischen Variablen:
Invariant formuliert sind diese:

$$\begin{aligned} p_\mu, p_\mu^X &= \text{Viererimpuls des Hadrons } N, \text{ Gesamt-Viererimpuls der Hadronen } X, \\ l_\mu, l'_\mu &= \text{Anfangs- und End-Viererimpuls des Leptons,} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E, E^{'}, \theta &= \text{Energie des Leptons vor und nach der Sreuung, Streuwinkel des Leptons,} \\
q_\mu &= l_\mu - l^{'}_\mu = \text{Energie-Impuls Transfer zum Hadron,} \\
Q^2 &= -q^2, \\
\nu &= p^\mu q_\mu \quad \text{und} \\
x &= Q^2/(2\nu), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \text{Bjorken-Variable.} \\
y &= \nu/(pl), \quad 0 \leq y \leq 1.
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

Im Laborsystem (Ruhesystem des Hadrons) gilt beispielsweise mit Bezeichnungen für Elekron-Proton-Streuung:

$$
\begin{aligned}
l_\mu &= (E_e, \vec{p}_e), \quad l^{'}_\mu = (E^{'}_e, \vec{p}^{'}_e), \quad q_\mu = l_\mu - l^{'}_\mu, \\
p^\mu_p &= (m_p, \vec{0}), \\
Q^2 &= -q^2 = 4E_e E^{'}_e \sin^2\theta/2, \quad \nu = p_p \cdot q = m_p(E_e - E^{'}_e), \\
x &= Q^2/(2\nu), \\
y &= \nu/(p_p l) = (E_e - E^{'}_e)/E_e.
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

Die tief-inelastische Streuung oder der Bjorken Limes ist definiert als $Q^2 \to \infty$, $\nu \to \infty$ mit x fest.

Lorentz-Struktur des Streuquerschnitts:
Der differentielle Wirkungsquerschnitt leitet sich aus dem Quadrat der Streu-Amplitude, graphisch in Abb. 3.1 dargestellt, ab:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{dE^{'}(2\pi)d\cos\theta} &\sim \sum_X |\langle l^{'} \mid J^{lept}_\lambda \mid l\rangle\langle X \mid J^{had}_\nu \mid N\rangle D^{\lambda\nu}(q)|^2 \, \delta^{(4)}(p_\mu + q_\mu - p^X_\mu) \\
&\sim D^{\kappa\mu}(q)^\dagger D^{\lambda\nu}(q) L_{\kappa\lambda}(l, l^{'}) W_{\mu\nu}(p, q).
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

Dabei koppelt der leptonische Strom J^{lept}_λ über das ausgetauschte Wechselwirkungsboson, dessen Propagator $D^{\lambda\nu}(q)$ ist, an den hadronischen Strom J^{had}_ν an. Die Ströme J^{lept}_λ und J^{had}_ν symbolisieren den fermionischen Teil der Wechselwirkungs-Vertizes der Leptonen l, $l^{'}$ mit dem Austauschboson bzw. der Quarks (im Streuprozess von N nach X) mit dem Austauschboson. Allgemein sind diese je nach Wechselwirkungstyp im Streuvorgang aus skalaren, axialen ($\sim \gamma_\mu\gamma_5$) oder Vektor-Strömen ($\sim \gamma_\mu$) aufgebaut. Konkret gilt bei elektromagnetischer Wechselwirkung: $J^{lept}_\mu, J^{had}_\mu = \sum_q Q_q \overline{q}\gamma_\mu q$ mit Bispinoren q für Leptonen bzw. Hadronen (Quarks) und dazugehörigen Ladungen Q_q.

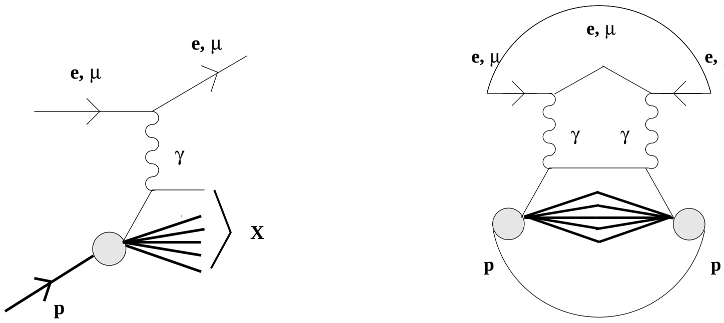

Abbildung 3.1: Feynmangraphen (Streu-Amplitude und Quadrat der Streu-Amplitude) für den tiefinelastischen Elektron-Proton- oder Muon-Proton-Streuungquerscnitt

Für den differentiellen Wirkungsquerschnitt im Fall elektromagnetischer Wechselwirkung bei der Streuung von Elektronen oder Myonen an Protonen erhält man konkret:

$$\frac{d\sigma}{dE'(2\pi)d\cos\theta} = \left(\frac{g^2}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{Q^4}\frac{E'}{E}\frac{1}{2}L^{\mu\nu}(l,l')W_{\mu\nu}(p,q). \tag{3.5}$$

Der leptonische Tensor ist dabei für unpolarisierte Leptonen:

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} &= \sum_{\text{spins } s_l, s_l'} \langle \vec{l}, \vec{s}_l \mid J_\mu^{lept}(0)^\dagger \mid \vec{l}', \vec{s}_l' \rangle \langle \vec{l}', \vec{s}_l' \mid J_\nu^{lept}(0) \mid \vec{l}, \vec{s}_l \rangle \\ &= 4(l_\mu' l_\nu + l_\mu l_\nu' - g_{\mu\nu} l l'), \end{aligned} \tag{3.6}$$

und für anfänglich polarisierte Leptonen:

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} &= \sum_{\text{final spin } s_l'} \langle \vec{l}, \vec{s}_l \mid J_\mu^{lept}(0)^\dagger \mid \vec{l}', \vec{s}_l' \rangle \langle \vec{l}', \vec{s}_l' \mid J_\nu^{lept}(0) \mid \vec{l}, \vec{s}_l \rangle \\ &= 2(l_\mu' l_\nu + l_\mu l_\nu' - g_{\mu\nu} l l' - i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} q^\alpha s_l^\beta), \end{aligned} \tag{3.7}$$

mit der Normierung $\langle \vec{l}, \vec{s}_l | \vec{l}', \vec{s}_l' \rangle = (2\pi)^3 2E_{\vec{l}} \delta(\vec{l} - \vec{l}') \delta_{\vec{s}_l, \vec{s}_l'}$ und dem Spin $s_l^2 = -m_l^2$. Der hadronische Tensor berechnet sich für ein Proton, dessen Polarisation vor der Streuung durch den Tensor $\rho_{\lambda,\lambda'}$ charakterisiert ist, zu:

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi}\sum_{\lambda,\lambda'} \rho_{\lambda,\lambda'} \sum_X \langle p, \lambda' \mid J_\mu^{had}(0)^\dagger \mid X \rangle \langle X \mid J_\nu^{had}(0) \mid p, \lambda \rangle (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\mu + q_\mu - p_\mu^X) \\ &= \frac{1}{4\pi}\sum_{\lambda,\lambda'} \rho_{\lambda,\lambda'} \int d^4y \quad e^{iqy} \langle p, \lambda' \mid J_\mu^{had}(y)^\dagger J_\nu^{had}(0) \mid p, \lambda \rangle, \end{aligned} \tag{3.8}$$

mit $\lambda, \lambda' = \pm 1/2$, wobei gilt: $\rho = \frac{1-P}{2} + \frac{P}{2}(1 + \frac{\vec{s}_p \vec{\sigma}}{m_p})$ mit der Polarisation P ($P = 0$ keine, $P = 1$ hundertprozentige Polarisation), dem mittleren Proton-Spin im Proton-Ruhesystem $\vec{s} = P\vec{s}_p$ ($|\vec{s}_p| = m_p$) und dem „Pauli-Matrizen-Vektor" $\vec{\sigma}$. Dabei kann für das Strom-Produkt $J_\mu^{had}(y)^\dagger J_\nu^{had}(0)$ der Kommutator $[J_\mu^{had}(y)^\dagger, J_\nu^{had}(0)]$ gebildet werden, da der zusätzliche zweite Term aufgrund der Energie-Impuls-Erhaltung nichts beiträgt. Eine

Zerlegung von $W_{\mu\nu}$ gemäß seiner Lorentz-Struktur ergibt unter Ausnutzung von Symmetrien (Invarianz unter Paritäts-Transformationen und Zeit-Umkehr) und grundlegender Eigenschaften der starken Wechselwirkung (u.a. Strom-Erhaltung: $q_\mu W^{\mu\nu} = q_\nu W^{\mu\nu} = 0$) [11] für unpolarisierte Protonen:

$$W_{\mu\nu} = F_1 \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) + \frac{F_2}{\nu}\left(p_\mu - \nu\frac{q_\mu}{q^2}\right)\left(p_\nu - \nu\frac{q_\nu}{q^2}\right), \tag{3.9}$$

und im Fall polarisierter Protonen:

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} &= F_1 \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) + \frac{F_2}{\nu}\left(p_\mu - \nu\frac{q_\mu}{q^2}\right)\left(p_\nu - \nu\frac{q_\nu}{q^2}\right) \\ &+ i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\frac{q_\rho}{\nu}\left((g_1+g_2)s^\sigma - g_2\frac{s\cdot q}{\nu}p^\sigma\right). \end{aligned} \tag{3.10}$$

F_1, F_2 und g_1, g_2 sind Strukturfunktionen. Eine Besonderheit, die in der Asymptotischen Freiheit der starken Wechselwirkung (asymptotisch verschwindende Wechselwirkung für $Q^2 \to \infty$) begründet ist, ist das Skalenverhalten der Strukturfunktionen (d.h. die Unabhängigkeit der Strukturfunktionen von der Skala Q^2, anschaulich von der Auflösung $\sim Q^{-1}$) im tief inelastischen Bereich oder Bjorken Limes:

$$\begin{aligned} F_{1,2}(Q^2,x) &\overset{Bj}{\rightsquigarrow} F_{1,2}(x), \\ g_{1,2}(Q^2,x) &\overset{Bj}{\rightsquigarrow} g_{1,2}(x), \qquad Q^2,\nu\to\infty, \quad x \text{ fest}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Im Experiment findet man dies bei großem Q^2 verwirklicht, wenn der betrachtete Bereich nicht allzu groß ist; tatsächlich liegt eine mehr oder weniger schwache logarithmische Abhängigkeit von Q^2 vor (Skalenverhalten-Verletzung).

Im Laborsystem (siehe (3.3)) ergibt sich beispielsweise für den unpolarisierten differentiellen Wirkungsquerschnitt (3.5) im Fall der Streuung von Elektronen an Protonen konkret:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dE'(2\pi)d\cos\theta} &= \frac{m_p E_e E_e'}{\pi}\frac{d\sigma}{dQ^2 d\nu} \\ &= 4\left(\frac{g^2}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{Q^4}\frac{(E_e')^2}{m_p}\left[F_1 2\sin^2\frac{\theta}{2} + F_2\frac{m_p^2}{m_p(E_e-E_e')}\cos^2\frac{\theta}{2}\right]. \end{aligned} \tag{3.12}$$

3.2 Das Parton-Modell

Das Parton-Modell[1] liefert ein einfaches physikalisches Bild für die tief-inelastische Streuung. In diesem Modell ist zur Betrachtung z.B. der Elektron-Proton-Streuung das Breit-Bezugssystem sehr geeignet. Dort ist

$$\begin{aligned} q^\mu &= (0,0,0,\sqrt{Q^2}), \qquad (3.13)\\ p_p^\mu &= (p_p^0,\vec{p}) = (\sqrt{m_p^2+p^2},0,0,p), \quad p=\nu/\sqrt{Q^2}, \quad \text{Bjorken-Limes} \quad p\to\infty, \end{aligned}$$

definiert.

Das Parton-Modell besagt erstens, daß ein sehr schnell bewegtes Hadron N aus punktförmigen Konstituenten (Partonen: Quarks und Gluonen) besteht, deren Energien und Impulse jeweils näherungsweise ein Vielfaches ξ_i der Energie und des Impulses des Hadrons ist

$$\vec{p}_i = \xi_i\vec{p}+\vec{p}_i^{\,T}, \quad \vec{p}\cdot\vec{p}_i^{\,T}=0, \quad \xi_i\geq 0, \sum_i \xi_i = 1. \qquad (3.14)$$

und daß Größen wie Massen und Partonimpulse transversal zum Impuls dieses Hadrons zu vernachlässigen sind:

$$\begin{aligned} p_i^0 &= \sqrt{\xi_i^2(\vec{p}^{\,2}+m_p^2)+(\vec{p}_i^{\,T})^2-\xi_i^2 m_p^2} \approx \\ &\approx \xi_i p_p^0 + \frac{1}{2\xi_i p_p^0}((\vec{p}_i^{\,T})^2-\xi_i^2 m_p^2), \quad \text{für} \quad \vec{p}^{\,2}\gg m_p^2, \qquad (3.15) \end{aligned}$$

also für den 4-Impuls des i-ten Partons gilt:

$$p_i^\mu \approx (\xi_i p_p^0, 0, 0, \xi_i p) = \xi_i p_p^\mu. \qquad (3.16)$$

Zweitens wird für harte Reaktionen wie die tief inelastische Lepton-Hadron Streuung die Gültigkeit der „Stoßnäherung“ angenommen, nach der die Wechselwirkung mit dem Lepton wie ein harter Stoß auf viel kleinerer Raum-Zeit-Skala als die starke Wechselwirkung abläuft, so daß die Partonen als quasifrei anzusehen sind.

Der Streuquerschnitt berechnet sich dann, indem man elastische Lepton Streuung an einzelnen freien, nicht stark wechselwirkenden Partonen in Born-Näherung ausrechnet und die sich daraus ergebenden Streuquerschnitte gewichtet mit den jeweiligen Partonverteilungsfunktionen im Hadron $q_i^N(\xi_i)$ (inkohärent) über alle Partonen $i=1,...,n$ und $0\leq\xi_i\leq 1$ aufsummiert. Die Partonverteilungsfunktionen $q_i^N(\xi_i)$ sind theoretisch unbekannt und an die experimentellen Streuquerschnitte anzupassen.

[1] Dieser Unterabschnitt folgt [12]

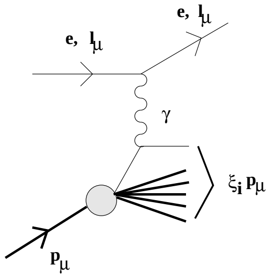

Abbildung 3.2: Elektron-Proton-Streuung im Parton-Modell

Beispielsweise berechnet sich der unpolarisierte elastische Elektron-Parton-Streuquerschnitt analog zu dem einer e^+e^--Streuung (siehe z.B. [13]) zu

$$\left.\frac{d\sigma}{dQ^2}\right|_{\text{e-Parton i}} = \frac{4\pi\alpha^2 Q_i^2}{Q^4}\cdot\frac{1}{2}\left(1+\frac{u_i^2}{s_i^2}\right), \tag{3.17}$$

wenn folgende Mandelstam-Variablen verwendet werden:

$$\begin{aligned} Q^2 &= -(p_e - p_e^{'})^2 \\ s_i &= (p_e + \xi_i p_p)^2 \approx \xi_i 2p_e\cdot p_p \approx \xi_i\cdot s, \quad s=(p_e+p_p)^2, \\ u_i &= (p_e^{'} + \xi_i p_p)^2 \approx -\xi_i 2p_e^{'}\cdot p_p \approx \xi_i\cdot u, \quad u=(p_e^{'}-p_p)^2, \\ eQ_i &= \text{Ladung des i-ten Partons.} \end{aligned} \tag{3.18}$$

Unter der Mandelstam-Bedingung $-Q^2+s_i+u_i=0$ (gültig bei verschwindenden Parton-Massen) kann folgende δ-Funktion benutzt werden, um zu den Variablen s und u überzugehen:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dQ^2du_i} &= \frac{4\pi\alpha^2Q_i^2}{Q^4}\cdot\frac{1}{2}\left(1+\frac{u_i^2}{s_i^2}\right)\delta(-Q^2+s_i+u_i) \\ &= \frac{4\pi\alpha^2Q_i^2}{Q^4}\cdot\frac{1}{2}\left(1+\frac{u^2}{s^2}\right)\delta(Q^2-\xi_i(s+u)). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Schließlich wird der Elektron-Proton-Wirkungsquerschnitt aus den Parton-Verteilungsfunktionen und den Elektron-Proton-Wirkungsquerschnitten zusammengesetzt:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dQ^2d\nu} &= \sum_i\int_0^1 d\xi_i q_i^p(\xi_i)\frac{d\sigma}{dQ^2du_i}2\xi_i \\ &= \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}\left(1+\frac{u^2}{s^2}\right)\sum_i\int_0^1 d\xi_i q_i^p(\xi_i)Q_i^2\xi_i\delta(Q^2-\xi_i(s+u)) \\ &= \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}\frac{1}{s+u}\left(\frac{s^2+u^2}{s^2}\right)\sum_i Q_i^2 x q_i^p(x) \quad \text{mit} \quad s+u=2\nu. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Dieses Resultat ist mit (3.12), über (3.3) mittels $s = 2m_p E_e$, $u = -2m_p E_e^{'}$, $2\nu = s + u$, $x = Q^2/(s+u)$, $\sin^2\theta/2 = -Q^2 m_p^2/(us) = -(u+s)x m_p^2/(us)$ invariant geschrieben, zu vergleichen:

$$\frac{d\sigma}{dQ^2 d\nu} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \cdot \frac{1}{s^2(u+s)} \Big(2(u+s)^2 x F_1(x) - 2us F_2(x) \Big) . \qquad (3.21)$$

Das Parton-Modell ergibt damit Skalenverhalten für die Strukturfunktionen, d.h. (3.11). Die Skalenvariable $x = Q^2/2\nu$ bekommt die anschauliche Bedeutung des Longitudinalimpulsanteils ξ_i der Partonen. Und es ergibt sich ein Zusammenhang zwischen den Strukturfunktionen $F_1(x), F_2(x)$ und den Parton-Verteilungsfunktionen $q_i^p(x)$ im Proton.

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \frac{1}{2}\sum_i Q_i^2 q_i^p(x), \\ F_2(x) &= \frac{1}{2}\sum_i Q_i^2 x q_i^p(x) \;=\; 2xF_1(x) \quad \text{(Callan-Gross Relation).} \end{aligned} \qquad (3.22)$$

Partonen sind hier Quarks und Anti-Quarks. Im Fall der polarisierten Strukturfunktionen ergibt eine entsprechende Rechnung für g_1:

$$g_1(x) = \frac{1}{2}\sum_i Q_i^2 \Big(q_{i,\uparrow}^p(x) - q_{i,\downarrow}^p(x) \Big), \qquad (3.23)$$

Partonen sind hier genauso Quarks und Anti-Quarks mit Spin parallel bzw. antiparallel zum Proton-Spin.

3.3 Operator-Produkt-Entwicklung und Momente der Strukturfunktionen

Will man über das Parton-Modell hinausgehen[2] und den hadronischen Tensor bzw. Strukturfunktionen ab initio berechnen, geht das nur sehr indirekt. Wesentliche Punkte sollen hier am Beispiel der unpolarisierten Strukturfunktionen F_1 und F_2 skizziert werden.

Für die zeitgeordnete hadronische Greensfunktion

$$T_{\mu\nu}(\nu, Q^2) = \int d^4y e^{iqy} \langle p \mid T J_\mu^{had}(y)^\dagger J_\nu^{had}(0) \mid p \rangle \qquad (3.24)$$

kann eine Operator-Produkt-Entwicklung durchgeführt werden für Q^2 und ν groß und Q^2/ν^2 fest; in diesem Falle geht $x \to \infty$ und bleibt nicht im physikalischen Bereich $0 \leq x \leq 1$ fixiert. Trotzdem kann man hierüber indirekt die interessierende hadronische

[2] Dieser Unterabschnitt folgt [1]; das Problem der Renormierung wird an dieser Stelle nicht behandelt (siehe Abschnitt 1.2).

Greensfunktion

$$W_{\mu\nu}(\nu, Q^2) = \frac{1}{4\pi} \int d^4y e^{iqy} \langle p \mid [J_\mu^{had}(y)^\dagger, J_\nu^{had}(0)] \mid p \rangle \tag{3.25}$$

bzw. ihre Strukturfunktionen F_i $(i = 1, 2)$ im Bjorken Limes berechnen.

$T_{\mu\nu}$ wird dazu wie $W_{\mu\nu}$ in einen Ausdruck mit skalaren Strukturfunktionen T_1, T_2 zerlegt. Im oben genannten Limes geht $1/x = 2\nu/Q^2 \to 0$ und ist ein geeigneter Entwicklungsparameter:

$$T_1 = \sum_{n=0}^{\infty} T_{1,n}(Q^2) x^{-n} \tag{3.26}$$

$$\nu T_2/m_p^2 = \sum_{n=0}^{\infty} T_{2,n}(Q^2) x^{-n} \tag{3.27}$$

Über eine Dispersionsrelation kann hier eine Verbindung zwischen $T_{\mu\nu}$ und $W_{\mu\nu}$ hergestellt werden; man erhält

$$T_{i,n}(Q^2) = -2i[F_{i,n}(Q^2) + (-1)^{n+a_i} \bar{F}_{i,n}(Q^2)]. \tag{3.28}$$

für die Momente der Strukturfunktionen

$$F_{i,n}(Q^2) = \int_0^1 dx x^{n-1} F_i(x, Q^2). \tag{3.29}$$

Es ist $a_1 = 0$ und $a_2 = 1$; für elektromagnetische Streuvorgänge gilt dabei $\bar{F} = F$.

$T_{\mu\nu}(\nu, Q^2)$ muß nun so entwickelt werden, daß die Größen $T_{i,n}$ führende Beiträge in $1/Q^2$ enthalten. Dazu wird $T_{\mu\nu}(\nu, Q^2)$ wie eine Streuamplitude nach Partialwellen zerlegt und eine geeignete Operator-Produkt-Entwicklung angewandt. Das Ergebnis ist:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(\nu, Q^2) = & -2i \int d^4y e^{iqy} \sum_{J,a} \langle p \mid \mathcal{O}^{Ja}_{\mu_1 \ldots \mu_J} \mid p \rangle (-i)^J \times \\ & \times \Big\{ y^{\mu_1} \ldots y^{\mu_J} \Big(-g_{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_\mu \partial y_\nu} \Big) C_1^{Ja}(y^2) \\ & - y^{\mu_2} \ldots y^{\mu_J} \Big(g_{\mu_1 \nu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_\mu \partial y_{\mu_1}} \Big) \cdot \Big(g_{\mu_2 \nu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_\nu \partial y_{\mu_2}} \Big) C_2^{Ja}(y^2) \Big\} \end{aligned} \tag{3.30}$$

Die Operatoren $\mathcal{O}^{Ja}_{\mu_1 \ldots \mu_J}$ sind lokal und haben Spin J; a unterscheidet Operatoren gleichen Spins. Nur symmetrische Operatoren sind relevant (Symmetrisierung = $\{\ldots\}$) und um definierten Spin zu besitzen werden sie spurlos gemacht. Im Fall unpolarisierter Hadronen gilt für die (über den Protonspin $\vec{s}$ gemittelten) Matrixelemente

$$\langle p \mid \mathcal{O}^{Ja}_{\{\mu_1 \ldots \mu_J\}} - \text{Spuren} \mid p \rangle = 2 \langle p \mid \mathcal{O}^{Ja} \mid p \rangle \Big(p_{\mu_1} \ldots p_{\mu_J} - \text{Spuren} \Big) \tag{3.31}$$

mit den sogenannten reduzierten Matrixelementen $\langle p \mid \mathcal{O}^{Ja} \mid p \rangle$, skalaren Größen.

Für die Wilson-Koeffizienten gilt

$$C \quad \sim \quad (y^2)^{-\dim(C)} \times \text{Logarithmen}, \tag{3.32}$$

mit

$$\dim(C) \quad = \quad 2\dim(J^{had}) - \dim(\mathcal{O}^{Ja}_{\mu_1\ldots\mu_J}) + J \tag{3.33}$$

Da der obige Limes Q^2 und ν groß (und Q^2/ν^2 fest) dem Limes $y \to 0$ äquivalent ist, sind die führenden Operatoren die minimaler Dimension; in der QCD sind dies die sogenannten twist-2 Quark- und Gluon-Operatoren (twist $= \dim(\mathcal{O}) - J$); sie können in flavour-Singlet (S) und Multipletts von flavour-Non-Singlet (NS) Operatoren zerlegt werden:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}^{(u,d;NS,j)}_{\mu_1\ldots\mu_J} &= \left(\frac{i}{2}\right)^{J-1} \bar{\psi}_{f_1}\tau^{(j)}_{f_1,f_2}\gamma_{\mu_1} \overleftrightarrow{D}_{\mu_2} \ldots \overleftrightarrow{D}_{\mu_J}\, \psi_{f_2} && (3.34)\\
\mathcal{O}^{(u,d;S)}_{\mu_1\ldots\mu_J} &= \left(\frac{i}{2}\right)^{J-1} \bar{\psi}_{f_1}1_{f_1,f_2}\gamma_{\mu_1} \overleftrightarrow{D}_{\mu_2} \ldots \overleftrightarrow{D}_{\mu_J}\, \psi_{f_2} && (3.35)\\
\mathcal{O}^{(G;S)}_{\mu_1\ldots\mu_J} &= i^{J-2}F^{\alpha}_{\mu_1} \overleftrightarrow{D}_{\mu_2} \ldots \overleftrightarrow{D}_{\mu_{J-1}}\, F_{\alpha\mu_J}, && (3.36)
\end{aligned}$$

wobei hier $\bar{\psi}_{f_1}, \psi_{f_2}$ mit $f_1 = u, d, f_2 = u, d$ für u- und d-Quarkfelder und $F_{\alpha\beta}$ für den Gluon-Feldstärke-Tensor stehen (Spinor-Indizes der Quarkfelder und colour-Indizes aufgrund der starken Wechselwirkung sind weggelassen); $\overrightarrow{D}_\mu$, $\overleftarrow{D}_\mu$ sind rechts- bzw. linksseitige kovariante Ableitungen mit $\overleftrightarrow{D}_\mu = \overrightarrow{D}_\mu - \overleftarrow{D}_\mu$; $1^{(f)}$ und $\tau^{(j)}$ stellen eine Basis für Operatoren im Quark-flavour Raum, dem Raum der „Quark-Sorten“, dar (hier für u, d: 2x2-Einheitsmatrix und Pauli-Matrizen).

Die Fourier-Transformation von (3.30) ergibt schließlich

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}(\nu, Q^2) \quad = \quad & -2i\sum_{J,a}\langle p \mid \mathcal{O}^{Ja} \mid p\rangle \times \\
& \times\Big\{\Big(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\Big)x^{-J}\tilde{C}^{Ja}_1(Q^2) \\
& +\frac{1}{\nu}\Big(p_\mu - \nu\frac{q_\mu}{q^2}\Big)\Big(p_\nu - \nu\frac{q_\nu}{q^2}\Big)x^{1-J}\tilde{C}^{Ja}_2(Q^2)\Big\}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

und somit mit Hilfe von (3.28) für die Momente der Strukturfunktionen folgende Operator-Produkt-Entwicklung:

$$\begin{aligned}
F_{1,J}(Q^2) + (-1)^J F_{1,J}(Q^2) &= \sum_a \tilde{C}^{Ja}_1(Q^2)\langle p \mid \mathcal{O}^{Ja} \mid p\rangle + \ldots \\
F_{2,J-1}(Q^2) + (-1)^J F_{2,J-1}(Q^2) &= \sum_a \tilde{C}^{Ja}_2(Q^2)\langle p \mid \mathcal{O}^{Ja} \mid p\rangle + \ldots
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Für die Gültigkeit von (3.28) muß $J > 1$ sein; es muß offensichtlich $J = 2, 4, 6, \ldots$ sein. Die Korrekturen sind von der Ordnung $1/Q^2\times$Logarithmen. Zusammenfassend ergibt sich mit den reduzierten Matrixelementen $v_n^{(f)} = \langle p \mid \mathcal{O}^{Ja} \mid p\rangle$ der Operatoren (3.34) ff,

$$\frac{1}{2}\sum_{\vec{s}}\langle \vec{p},\vec{s} \mid \mathcal{O}^{(f)}_{\{\mu_1\ldots\mu_n\}} - \text{Spuren} \mid \vec{p},\vec{s}\rangle \;=\; 2v_n^{(f)}\Big(p_{\mu_1}\ldots p_{\mu_n} - \text{Spuren}\Big), \tag{3.39}$$

für $n = J = 2,4,6,\ldots$ im unpolarisierten Fall:

$$2\int_0^1 dx\; x^{n-1}F_1(x,Q^2) \;=\; \sum_{f=u,d,G} c_{1,n}^{(f)}(Q^2)\; v_n^{(f)} + O(1/Q^2), \tag{3.40}$$

$$\int_0^1 dx\; x^{n-2}F_2(x,Q^2) \;=\; \sum_{f=u,d,G} c_{2,n}^{(f)}(Q^2)\; v_n^{(f)} + O(1/Q^2) \tag{3.41}$$

(Setze dazu $\widetilde{C}_1^{Ja}(Q^2) \to c_{1,n}^{(f)}(Q^2)$ und $\widetilde{C}_2^{Ja}(Q^2) \to 2c_{2,n}^{(f)}(Q^2)$).

Für die polarisierten Strukturfunktionen g_1, g_2 können entsprechende Rechnungen durchgführt werden. Die Operatoren dort sind:

$$\mathcal{O}^{(5,u,d;NS,j)}_{\sigma\mu_1\ldots\mu_n} \;=\; \left(\frac{i}{2}\right)^n \bar{\psi}_{f_1}\tau^{(j)}_{f_1,f_2}\gamma_\sigma\gamma_5\; \overleftrightarrow{D}_{\mu_1}\ldots\overleftrightarrow{D}_{\mu_n}\;\psi_{f_2} \tag{3.42}$$

$$\mathcal{O}^{(5,u,d;S)}_{\sigma\mu_1\ldots\mu_n} \;=\; \left(\frac{i}{2}\right)^n \bar{\psi}_{f_1}1_{f_1,f_2}\gamma_\sigma\gamma_5\; \overleftrightarrow{D}_{\mu_1}\ldots\overleftrightarrow{D}_{\mu_n}\;\psi_{f_2} \tag{3.43}$$

$$\mathcal{O}^{(5,G;S)}_{\sigma\mu_1\ldots\mu_n} \;=\; i^{n-1}\widetilde{F}^{\alpha}_{\;\;\sigma}\;\overleftrightarrow{D}_{\mu_1}\ldots\overleftrightarrow{D}_{\mu_{n-1}}\;F_{\alpha\mu_n} \tag{3.44}$$

mit $\widetilde{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\gamma\delta}$. Die dazugehörigen reduzierten Matrixelemente sind folgendermaßen definiert:

$$\langle \vec{p},\vec{s} \mid \mathcal{O}^{5(f)}_{\{\sigma\mu_1\ldots\mu_n\}} - \text{Spuren} \mid \vec{p},\vec{s}\rangle \;=\; \frac{1}{n+1}a_n^{(f)}\Big(s_\sigma p_{\mu_1}\ldots p_{\mu_n} + \ldots - \text{Spuren}\Big), \tag{3.45}$$

$$\langle \vec{p},\vec{s} \mid \mathcal{O}^{5(f)}_{[\sigma\{\mu_1]\ldots\mu_n\}} - \text{Spuren} \mid \vec{p},\vec{s}\rangle \;=\; \frac{1}{n+1}d_n^{(f)}\Big(s_{[\sigma}p_{\mu_1]}\ldots p_{\mu_n} + \ldots - \text{Spuren}\Big), \tag{3.46}$$

wobei $\{\ldots\}$ Symmetrisierung und $[\ldots]$ Antisymmetrisierung bedeutet; s ist ein Spin-Vierervektor. Die Momente der polarisierten Strukturfunktionen können dann im tiefinelastischen Limes für $n = 0,2,\ldots$ (g_1) bzw. $n = 2,4,\ldots$ (g_2) in der Form

$$2\int_0^1 dx\; x^n g_1(x,Q^2) \;=\; \frac{1}{2}\sum_{f=u,d,G} e_{1,n}^{(f)}(Q^2)\; a_n^{(f)} + O(1/Q^2), \tag{3.47}$$

$$2\int_0^1 dx\; x^n g_2(x,Q^2) \;=\; \frac{1}{2}\frac{n}{n+1}\sum_{f=u,d,G}\Big(e_{2,n}^{(f)}(Q^2)\; d_n^{(f)} - e_{1,n}^{(f)}(Q^2)\; a_n^{(f)}\Big) + O(1/Q^2) \tag{3.48}$$

geschrieben werden.

Im Folgenden spielen die reduzierten Matrixelemente (bzw. die dazugehörigen Operatoren) v_2, v_4, a_0, a_2 eine Rolle (d_n werden nicht betrachtet). Daneben werden noch ungeradzahlige reduzierte Matrixelemente auf dem Gitter untersucht, siehe (4.34) ff.

Kapitel 4

Gitter und Algorithmen

4.1 Berechnung von Proton Matrixelementen

Generell gewinnt man wichtige physikalische Informationen einer (Quanten-) Feldtheorie aus ihren Greensfunktionen. Legt man den Proton-Operator

$$B_\alpha(t;\vec{p}) \;=\; \sum_{\vec{x},abc} \mathrm{e}^{-i\vec{p}\vec{x}} \epsilon_{abc} u^a_\alpha(t,\vec{x})[u^b(t,\vec{x}) C\gamma_5 d^c(t,\vec{x})]$$

zugrunde[1] , wobei u, d Quarkfelder mit Farbindizes $a, b, c = 1, 2, 3$ sind, $\alpha = 1, \ldots, 4$ ein Spinorindex, $\vec{p}$ der Protonimpuls und $C = \gamma_4\gamma_2$ der Ladungskonjugationsoperator ist, so enhält der exponentielle (zeitliche) Zerfall des euklidischen Proton-Propagators $\langle B_\alpha(t,\vec{p})$ $\bar{B}_\beta(0,\vec{p})\rangle$ unter der Bedingung $0 \ll t$ seine Masse (siehe (1.22)).

$$m_p \;\approx\; \ln \frac{\Gamma'_{\beta\alpha}\langle B_\alpha(t)\bar{B}_\beta(0)\rangle}{\Gamma'_{\beta\alpha}\langle B_\alpha(t+1)\bar{B}_\beta(0)\rangle}, \quad (\vec{p}=0) \tag{4.1}$$

Dabei kann man z.B. mit $\Gamma'_{\beta\alpha} = 1/2(\gamma_4+1)_{\beta\alpha}$ auf den nicht-relativistischen Valenzquark-Anteil im Proton projizieren.

Die hier gesuchten Proton-Matrixelemente $\langle\vec{p},\vec{s}|\mathcal{O}^R(\mu)|\vec{p},\vec{s}\rangle$ zur Berechnung der Momente der Strukturfunktionen sind in den Proton-Greensfunktionen $\langle B_\alpha(t,\vec{p})\ \mathcal{O}^R(\tau,\mu)$ $\bar{B}_\beta(0,\vec{p})\rangle$ enthalten (siehe (1.23)); sieht man zunächst von der Operator-Renormierung auf der Skala μ ab, so gilt mit einem weiteren Projektor $\Gamma_{\beta\alpha}$ ($1/2(\gamma_4+1)$ = unpolarisierter Fall, $1/2(\gamma_4+1)i\gamma_5\gamma_2$ = polarisierter Fall) für das Verhältnis

$$R(t,\tau,\vec{p},\mathcal{O}) \;=\; \frac{\sum_{\alpha\beta}\Gamma_{\beta\alpha}\langle B_\alpha(t,\vec{p})\mathcal{O}(\tau)\bar{B}_\beta(0,\vec{p})\rangle}{\sum_{\alpha\beta}\Gamma'_{\beta\alpha}\langle B_\alpha(t,\vec{p})\bar{B}_\beta(0,\vec{p})\rangle} \tag{4.2}$$

die allgemeine Darstellung (sie entspricht z.B. (3.39) oder (3.45)):

[1]Die Ergebnisse für das Neutron ergeben sich aus denen des Protons durch die Ersetzungen: $u \to d$, $d \to u$.

$$R(t,\tau,\vec{p},\mathcal{O}) \;=\; \frac{1}{2\kappa}\frac{E_{\vec{p}}}{E_{\vec{p}}+m_p}F(\Gamma,\mathcal{J}), \quad \text{für} \quad 0 \ll \tau \ll t, \tag{4.3}$$

mit

$$F(\Gamma,\mathcal{J}) \;=\; \frac{1}{4}Tr[\Gamma N \mathcal{J} N], \quad N = \gamma_4 - i\vec{p}\!\!/ /E_{\vec{p}} + m_p/E_{\vec{p}}. \tag{4.4}$$

Dabei enthält $\mathcal{J}$ die Lorentz-Struktur von $\mathcal{O}$ sowie die (hier noch unrenormierten) reduzierten Matrixelemente und ist definiert durch

$$\langle \vec{p},\vec{s}|\mathcal{O}|\vec{p},\vec{s}\rangle \;=\; \bar{u}(\vec{p},\vec{s})\mathcal{J}u(\vec{p},\vec{s}). \tag{4.5}$$

Für obige Beziehungen wird die Normierung

$$\langle \vec{p},\vec{s}|\vec{p}^{\,\prime},\vec{s}^{\,\prime}\rangle \;=\; (2\pi)^3 2E_{\vec{p}}\delta(\vec{p}-\vec{p}^{\,\prime})\delta_{\vec{s},\vec{s}^{\,\prime}} \tag{4.6}$$

mit Spin $s^2 = -m_p^2$, Proton-Energie $E_{\vec{p}}$ und Proton-Masse m_p verwendet. $1/(2\kappa)$, siehe dazu (2.20), ist ein Normierungsfaktor. Die zusammengesetzten Baryon-Felder $B, \bar{B}$ enthalten neben dem Grundzustand Proton auch angeregte Zustände, d.h. schwerere Teilchen mit denselben Quantenzahlen, deren Beitrag aber bei obiger Grenzwertbildung $0 \ll \tau \ll t$ unterdrückt wird; unter Beachtung dieser Bedingung ist das Verhältnis $R(t,\tau,\vec{p},\mathcal{O})$ dann von τ und t unabhängig (siehe Einleitung c.).

Konkret findet man z.B. für die Gitter-Operatoren (4.35), (4.38)

$$\mathcal{O}_{v_{2,a}} \;=\; \overline{\psi}\tfrac{1}{2}\Big(\gamma_1 \overleftrightarrow{D}_4 + \gamma_4 \overleftrightarrow{D}_1\Big)\psi, \tag{4.7}$$

$$\mathcal{O}_{v_{2,b}} \;=\; \overline{\psi}\Big(\gamma_4 \overleftrightarrow{D}_4 - \tfrac{1}{3}\gamma_1 \overleftrightarrow{D}_1 - \tfrac{1}{3}\gamma_2 \overleftrightarrow{D}_2 - \tfrac{1}{3}\gamma_3 \overleftrightarrow{D}_3\Big)\psi, \tag{4.8}$$

die hier zur Berechnung des 2. Momentes der Strukturfunktionen F_1, F_2 des Protons verwendet werden

$$R_{v_{2,a}} \;=\; i\frac{1}{2\kappa}p_1 v_{2,a}, \tag{4.9}$$

$$R_{v_{2,b}} \;=\; -\frac{1}{2\kappa}m_p v_{2,b}, \tag{4.10}$$

wenn dabei der Gitter-Impuls des Protons zu $\vec{p} = (p_1,0,0)$ für $v_{2,a}$ und $\vec{p} = (0,0,0)$ für $v_{2,b}$ gewählt wird; die Proton-Masse m_p auf dem Gitter ergibt sich aus (4.1). Alle Größen werden auf dem Gitter unter der Annahme verschwindender u-,d-Quarkmassen, d.h. bei verschiedenen (nackten) Quarkmassen berechnet und dann zum chiralen Limes (2.20) extrapoliert.

Im folgenden sollen Baryon 2pt-Greensfunktionen (Propagatoren) und unrenormierte 3pt-Greensfunktionen (d.h. ohne Operator-Renormierung) explizit für das Proton berechnet werden; d.h. hier in Ausdrücke mit Quark-Propagatoren verwandelt werden.

Man kann die so dargestellten Proton-Greensfunktionen in diskretisierter Form auf einem Raum-Zeit-Gitter definieren und nicht-störungstheoretisch mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationen berechnen. Für einen sinnvollen Kontinuums-Grenzwert der Proton-Greensfunktionen ist dann zusätzlich eine Renormierung der Proton-Wellenfunktion und im Falle der 3pt-Greensfunktionen außerdem eine Operator-Renormierung (Kapitel 6) auf dem Gitter notwendig.[2]

Durch Feynman-Graphen werden die Proton 2pt-Greensfunktionen (Propagatoren) und unrenormierten Proton 3pt-Greensfunktionen folgendermaßen dargestellt:

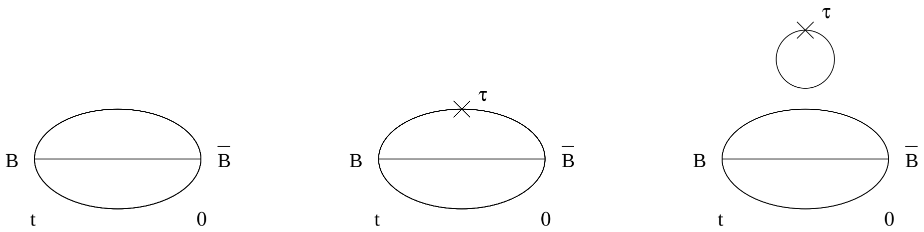

Abbildung 4.1: Feynman-Graphen für eine Proton Zwei-Punkt Funktion (Propagator) und Proton Drei-Punkt Funktionen („verbunden“ und „unverbunden“ $\sim$ Seequark-Beitrag).

Zu berechnen ist:

$$C^{(2)}_{\alpha\beta}(t;\vec{p}) = \langle B_\alpha(t,\vec{p})\bar{B}_\beta(0,\vec{p})\rangle \tag{4.11}$$

$$C^{(3)}_{\alpha\beta}(t,\tau;\vec{p},\vec{q}) = \langle B_\alpha(t,\vec{p})\mathcal{O}(\tau;\vec{q})\bar{B}_\beta(0,\vec{p}+\vec{q})\rangle \tag{4.12}$$

mit $\mathcal{O}$ gleich $\mathcal{O}^{(\psi)}$ ($\psi = u$-,d- Quarkfelder)

$$\mathcal{O}^{(\psi)}(\tau,\vec{q}) = \sum_{\substack{\vec{x},v,w\\ a,b,\alpha,\beta}} e^{i\vec{q}\vec{x}}\bar{\psi}^a_\alpha(v)\mathcal{O}^{(\psi),ab}_{\alpha\beta}(v,w;\tau,\vec{x})\psi^b_\beta(w), \tag{4.13}$$

wobei $\mathcal{O}^{(\psi),ab}_{\alpha\beta}$ aus lokalen Operatoren und Ableitungsoperatoren gebildet wird. Das Proton (Antiproton) wird dargestellt durch

$$B_\alpha(t;\vec{p}) = \sum_{\vec{x},abc} \mathrm{e}^{-i\vec{p}\vec{x}}\epsilon_{abc}u^a_\alpha(t,\vec{x})[u^b(t,\vec{x})C\gamma_5 d^c(t,\vec{x})] \tag{4.14}$$

$$\bar{B}_\alpha(t;\vec{p}) = \sum_{\vec{x},abc} \mathrm{e}^{+i\vec{p}\vec{x}}\epsilon_{abc}[\bar{d}^a(t,\vec{x})C\gamma_5\bar{u}^b(t,\vec{x})]\bar{u}^c_\alpha(t,\vec{x}) \tag{4.15}$$

mit Quarkfeldern u, d, Farbindizes $a, b, c = 1, 2, 3$, einem Spinorindex $\alpha = 1, \ldots, 4$ und dem Ladungskonjugationsoperator $C = \gamma_4\gamma_2$. $\vec{p}$ ist der Proton Impuls; $\vec{q}$ ist der Impuls, der in den Operator hineinfließt.

[2]Wenn Quotienten von projizierten Proton-Greensfunktionen wie im Falle der Hadronmassen und hadronischen Matrixelemente berechnet werden, ist die Renormierungskonstante der Proton-Wellenfunktion nur eine sich wegkürzende Rechengröße.

4.1.1 Der Proton-Propagator

Im folgenden soll die Greensfunktion $C'^{(2)}_{\alpha\beta}(t;\vec{p})$, (4.11), in Quark-Propagatoren zerlegt dargestellt werden, um so eine numerische Berechnung zu ermöglichen. $\langle\ldots\rangle$ symbolisiert in (4.11) die Quark- und Gluon-Funktional-Integrale. Setzt man hier die zusammengesetzten Baryon-Felder $B_\alpha(t;\vec{p})$, $\bar{B}_\alpha(t_0;\vec{p})$ für das Proton ein und normiert mit Hilfe eines Raum-Volumen-Faktors $1/V$, erhält man:

$$\begin{aligned} C^{(2)}_{\alpha\beta}(t,t_0;\vec{p}) &= \frac{1}{V}\sum_{\vec{x},\vec{y}} \mathrm{e}^{-i\vec{p}\vec{x}}\mathrm{e}^{+i\vec{p}\vec{y}}\epsilon_{abc}\epsilon_{a'b'c'} \\ &\quad \Big\langle u^a_\alpha(t,\vec{x})[u^b(t,\vec{x})C\gamma_5 d^c(t,\vec{x})]\cdot[\bar{d}^{a'}(t_0,\vec{y})C\gamma_5\bar{u}^{b'}(t_0,\vec{y})]\bar{u}^{c'}_\alpha(t_0,\vec{y})\Big\rangle \end{aligned} \tag{4.16}$$

Translationsinvarianz erlaubt die Ersetzung $-x+y\rightarrow -x$ und $y\rightarrow 0$, wobei ein Raum-Volumen-Faktor V entsteht:

$$\begin{aligned} C^{(2)}_{\alpha\beta}(t;\vec{p}) &= \sum_{\vec{x}} \mathrm{e}^{-i\vec{p}\vec{x}}\epsilon_{abc}\epsilon_{a'b'c'} \\ &\quad \Big\langle u^a_\alpha(t,\vec{x})[u^b(t,\vec{x})C\gamma_5 d^c(t,\vec{x})]\cdot[\bar{d}^{a'}(0)C\gamma_5\bar{u}^{b'}(0)]\bar{u}^{c'}_\alpha(0)\Big\rangle \end{aligned} \tag{4.17}$$

Die Auswertung der u- und d-Quark-Funktional-Integrale, wobei

$$G^{(f),ab}_{\alpha\beta}(x;y) = \langle\psi^a_\alpha(x)\bar{\psi}^b_\beta(y)\rangle_f \tag{4.18}$$

mit $\psi = u,d$ und $f = u,d$ ist, führt auf folgende Gleichungskette ($\langle\ldots\rangle_U$ sind Gluon-Funktional-Integrale; $\langle\ldots\rangle_u$, $\langle\ldots\rangle_d$ sind Quark-Funktional-Integrale):

$$\begin{aligned} C^{(2)}_{\alpha\beta}(t;\vec{p}) &= \sum_{\vec{x}} \mathrm{e}^{-i\vec{p}\vec{x}}\epsilon_{abc}\epsilon_{a'b'c'}(C\gamma_5)_{\gamma\delta}(C\gamma_5)_{\gamma'\delta'} \\ &\quad \Big\langle\langle d^c_\delta(t,\vec{x})\bar{d}^{a'}_{\gamma'}(0)\rangle_d\cdot\langle u^a_\alpha(t,\vec{x})u^b_\gamma(t,\vec{x})\bar{u}^{b'}_{\delta'}(0)\bar{u}^{c'}_\beta(0)\rangle_u\Big\rangle_U \\ &= \sum_{\vec{x}} \mathrm{e}^{-i\vec{p}\vec{x}}\epsilon_{abc}\epsilon_{a'b'c'}(C\gamma_5)_{\gamma\delta}(C\gamma_5)_{\gamma'\delta'} \\ &\quad \Big\langle G^{(d)ca'}_{\delta\gamma'}(t,\vec{x};0)\cdot\Big[G^{(u)bb'}_{\gamma\delta'}(t,\vec{x};0)G^{(u)ac'}_{\alpha\beta}(t,\vec{x};0) - G^{(u)ab'}_{\alpha\delta'}(t,\vec{x};0)G^{(u)bc'}_{\gamma\beta}(t,\vec{x};0)\Big]\Big\rangle_U \end{aligned} \tag{4.19}$$

Mit der Bezeichnung $\widetilde{G}^{(d)ca'}_{\delta'\gamma} = (C\gamma_5)_{\gamma\delta}G^{(d)ca'}_{\delta\gamma'}(C\gamma_5)_{\gamma'\delta'}$ und der Umbenennung von Farb-Summationsindizes gelangt man zu:

$$\begin{aligned} C^{(2)}_{\alpha\beta}(t;\vec{p}) &= \sum_{\vec{x}} \mathrm{e}^{-i\vec{p}\vec{x}}\epsilon_{abc}\epsilon_{a'b'c'} \\ &\quad \Big\langle \widetilde{G}^{(d)cc'}_{\delta'\gamma}(t,\vec{x};0)\cdot\Big[G^{(u)bb'}_{\gamma\delta'}(t,\vec{x};0)G^{(u)aa'}_{\alpha\beta}(t,\vec{x};0) - G^{(u)aa'}_{\alpha\delta'}(t,\vec{x};0)G^{(u)bb'}_{\gamma\beta}(t,\vec{x};0)\Big]\Big\rangle_U \end{aligned} \tag{4.20}$$

Die Gluon-Funktional-Integrale $\langle\ldots\rangle_U$ können analytisch nicht weiter ausgewertet werden und müssen numerisch mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationen berechnet werden.

4.1.2 Proton 3-pt Greensfunktionen mit Operator

Ganz analog zum Proton-Propagator berechnet man die Proton 3-pt Greensfunktionen $C^{(3)}_{\alpha\beta}(t,\tau;\vec{p},\vec{q})$, (4.12). $\langle\ldots\rangle$ symbolisiert in (4.12) die Quark- und Gluon-Funktional-Integrale. Einsetzen der Baryon-Felder $B_\alpha(t;\vec{p})$, $\bar{B}_\alpha(t_0;\vec{p})$ für das Proton, Normierung mit Hilfe eines Raum-Volumen-Faktors $1/V$ und Ausnutzen der Translationsinvarianz in Raum und Zeit führt für die Operatoren $\mathcal{O}^{(u)}$ und $\mathcal{O}^{(d)}$ (siehe (4.13)) zu den Anteilen:

$$\begin{aligned} C^{(3)}_{\alpha\beta}(t,\tau;\vec{p},\vec{q}) &= \sum_{\vec{x},\vec{y},v,w} \mathrm{e}^{-i\vec{p}\vec{x}}\mathrm{e}^{-i\vec{q}\vec{y}}\epsilon_{abc}\epsilon_{a'b'c'}(C\gamma_5)_{\gamma\delta}(C\gamma_5)_{\gamma'\delta'} \\ &\quad \langle u^a_\alpha(t,\vec{x})u^b_\gamma(t,\vec{x})d^c_\delta(t,\vec{x}) \\ &\quad\ \bar{u}^e_\rho(v)\mathcal{O}^{(u),ef}_{\rho\lambda}(v,w;\tau,\vec{y})u^f_\lambda(w) \\ &\quad\ \bar{d}^{a'}_{\gamma'}(0)\bar{u}^{b'}_{\delta'}(0)\bar{u}^{c'}_\beta(0)\rangle \end{aligned} \tag{4.21}$$

und

$$\begin{aligned} C^{(3)}_{\alpha\beta}(t,\tau;\vec{p},\vec{q}) &= \sum_{\vec{x},\vec{y},v,w} \mathrm{e}^{-i\vec{p}\vec{x}}\mathrm{e}^{-i\vec{q}\vec{y}}\epsilon_{abc}\epsilon_{a'b'c'}(C\gamma_5)_{\gamma\delta}(C\gamma_5)_{\gamma'\delta'} \\ &\quad \langle u^a_\alpha(t,\vec{x})u^b_\gamma(t,\vec{x})d^c_\delta(t,\vec{x}) \\ &\quad\ \bar{d}^e_\rho(v)\mathcal{O}^{(d),ef}_{\rho\lambda}(v,w;\tau,\vec{y})d^f_\lambda(w) \\ &\quad\ \bar{d}^{a'}_{\gamma'}(0)\bar{u}^{b'}_{\delta'}(0)\bar{u}^{c'}_\beta(0)\rangle \end{aligned} \tag{4.22}$$

Die etwas umfangreiche Auswertung der u- und d-Quark-Funktional-Integrale führt zu einem verbundenen und einem unverbundenen Anteil (siehe Feynman-Diagramme) jeweils für die u- und d-Quark-Operatoren. Der verbundene Teil für die Operatoren $\mathcal{O}^{(u)}$ und $\mathcal{O}^{(d)}$ ist:

$$\begin{aligned} C^{(3)}_{\alpha\beta}(t,\tau;\vec{p},\vec{q}) &= -\sum_{\vec{x},\vec{y},v,w} \mathrm{e}^{-i\vec{p}\vec{x}}\mathrm{e}^{-i\vec{q}\vec{y}}\epsilon_{abc}\epsilon_{a'b'c'} \\ &\quad \Big\langle [C\gamma_5 G^{(d)ca'}(t,\vec{x};0)C\gamma_5]_{\gamma'\delta'}\cdot \\ &\cdot\Big[[G^{(u)ae}(t,\vec{x};v)\mathcal{O}^{(u),ef}(v,w;\tau,\vec{y})G^{(u)fb'}(w;0)]_{\alpha\delta'}G^{(u)bc'}_{\gamma\beta}(t,\vec{x};0) - \\ &\quad -[G^{(u)ae}(t,\vec{x};v)\mathcal{O}^{(u),ef}(v,w;\tau,\vec{y})G^{(u)fc'}(w;0)]_{\alpha\beta}G^{(u)bb'}_{\gamma\delta'}(t,\vec{x};0) - \\ &\quad -[G^{(u)be}(t,\vec{x};v)\mathcal{O}^{(u),ef}(v,w;\tau,\vec{y})G^{(u)fb'}(w;0)]_{\gamma\delta'}G^{(u)ac'}_{\alpha\beta}(t,\vec{x};0) + \\ &\quad +[G^{(u)be}(t,\vec{x};v)\mathcal{O}^{(u),ef}(v,w;\tau,\vec{y})G^{(u)fc'}(w;0)]_{\gamma\beta}G^{(u)ab'}_{\alpha\delta'}(t,\vec{x};0)\ \Big]\Big\rangle_U \end{aligned} \tag{4.23}$$

($\langle\ldots\rangle_U$ sind Gluon-Funktional-Integrale) und

$$\begin{aligned} C^{(3)}_{\alpha\beta}(t,\tau;\vec{p},\vec{q}) &= \sum_{\vec{x},\vec{y},v,w} \mathrm{e}^{-i\vec{p}\vec{x}}\mathrm{e}^{-i\vec{q}\vec{y}}\epsilon_{abc}\epsilon_{a'b'c'} \\ &\quad \Big\langle [C\gamma_5 G^{(d)ce}(t,\vec{x};0)\mathcal{O}^{(d)ef}(v,w;\tau,\vec{y})G^{(d)fa'}(w;0)C\gamma_5]_{\gamma\delta'}\cdot \\ &\quad \cdot [G^{(u)bb'}_{\gamma\delta'}(t,\vec{x};0)G^{(u)ac'}_{\alpha\beta}(t,\vec{x};0) - G^{(u)ab'}_{\alpha\delta'}(t,\vec{x};0)G^{(u)bc'}_{\gamma\beta}(t,\vec{x};0)]\Big\rangle_U \end{aligned} \tag{4.24}$$

Der unverbundene Anteil der 3-pt Greensfunktionen $C^{(3)}_{\alpha\beta}(t,\tau;\vec{p},\vec{q})$ sieht für $\mathcal{O}^{(u)}$ und $\mathcal{O}^{(d)}$ folgendermaßen aus (Tr_D ist eine Spur über Dirac-Indizes):

$$\begin{aligned} C^{(3)}_{\alpha\beta}(t,\tau;\vec{p},\vec{q}) &= -\sum_{\vec{x},\vec{y},v,w} \mathrm{e}^{-i\vec{p}\vec{x}}\mathrm{e}^{-i\vec{q}\vec{y}}\epsilon_{abc}\epsilon_{a'b'c'} \\ &\quad \Big\langle [C\gamma_5 G^{(d)ca'}(t,\vec{x};0)C\gamma_5]_{\gamma\delta'}\cdot Tr_D[G^{(u)fe}(w;v)\mathcal{O}^{(u)ef}(v,w;\tau,\vec{y})]\cdot \\ &\quad \cdot [G^{(u)bb'}_{\gamma\delta'}(t,\vec{x};0)G^{(u)ac'}_{\alpha\beta}(t,\vec{x};0) - G^{(u)ab'}_{\alpha\delta'}(t,\vec{x};0)G^{(u)bc'}_{\gamma\beta}(t,\vec{x};0)]\Big\rangle_U \end{aligned} \tag{4.25}$$

und

$$\begin{aligned} C^{(3)}_{\alpha\beta}(t,\tau;\vec{p},\vec{q}) &= -\sum_{\vec{x},\vec{y},v,w} \mathrm{e}^{-i\vec{p}\vec{x}}\mathrm{e}^{-i\vec{q}\vec{y}}\epsilon_{abc}\epsilon_{a'b'c'} \\ &\quad \Big\langle [C\gamma_5 G^{(d)ca'}(t,\vec{x};0)C\gamma_5]_{\gamma\delta'}\cdot Tr_D[G^{(d)fe}(w;v)\mathcal{O}^{(d)ef}(v,w;\tau,\vec{y})]\cdot \\ &\quad \cdot [G^{(u)bb'}_{\gamma\delta'}(t,\vec{x};0)G^{(u)ac'}_{\alpha\beta}(t,\vec{x};0) - G^{(u)ab'}_{\alpha\delta'}(t,\vec{x};0)G^{(u)bc'}_{\gamma\beta}(t,\vec{x};0)]\Big\rangle_U \end{aligned} \tag{4.26}$$

Im folgenden wird der verbundene Anteil (der unverbundene Anteil trägt nur zu Singlet Operatoren bei) weiter betrachtet und soll hier für die numerische Auswertung etwas anders dargestellt werden. (4.23) läßt sich mit $\widetilde{G}^{(d)ca'}_{\delta'\gamma} = (C\gamma_5)_{\gamma\delta}G^{(d)ca'}_{\delta\gamma'}(C\gamma_5)_{\gamma'\delta'}$ in folgende Form bringen:

$$\begin{aligned} C^{(3)}_{\alpha\beta}(t,\tau;\vec{p},\vec{q}) &= -\sum_{\vec{y},v,w} \mathrm{e}^{-i\vec{q}\vec{y}} \\ &\quad \Big\langle {\textstyle\sum}^{(u)c'e}_{\alpha\beta;\delta'\gamma'}(0;v;t,\vec{p})\cdot [\mathcal{O}^{(u)ef}(v,w;\tau,\vec{y})G^{(u)fc'}(w;0)]_{\gamma'\delta'}]\Big\rangle_U \end{aligned} \tag{4.27}$$

mit

$$\begin{aligned} {\textstyle\sum}^{(u)c'e}_{\alpha\beta;\delta'\gamma'}(0;v;t,\vec{p}) &= -\sum_{\vec{x}} \mathrm{e}^{-i\vec{p}\vec{x}}\epsilon_{abc}\epsilon_{a'b'c'}\cdot \Big[[\widetilde{G}^{(d)ca'}(t,\vec{x};0)G^{(u)bb'}(t,\vec{x};0)]_{\delta'\beta}\delta_{\alpha\gamma} + \\ &+Tr_D[\widetilde{G}^{(d)ca'}(t,\vec{x};0)G^{(u)bb'}(t,\vec{x};0)]\delta_{\delta'\beta}\delta_{\alpha\gamma} + G^{(u)bb'}_{\alpha\beta}(t,\vec{x};0)\widetilde{G}^{(d)ca'}_{\delta'\gamma}(t,\vec{x};0) + \\ &[G^{(u)bb'}(t,\vec{x};0)\widetilde{G}^{(d)ca'}(t,\vec{x};0)]_{\alpha\gamma}\delta_{\delta'\beta}\Big]\cdot G^{(u)ae}_{\gamma\gamma'}(t,\vec{x};v) \end{aligned} \tag{4.28}$$

Für (4.24) findet man:

$$C^{(3)}_{\alpha\beta}(t,\tau;\vec{p},\vec{q}) = -\sum_{\vec{y},v,w} \mathrm{e}^{-i\vec{q}\vec{y}} \Big\langle \Sigma^{(d)a'e}_{\alpha\beta;\lambda'\rho'}(0;v;t,\vec{p}) \cdot [\mathcal{O}^{(d)ef}(v,w;\tau,\vec{y}) G^{(d)fa'}(w;0)]_{\rho'\lambda'}] \Big\rangle_U \tag{4.29}$$

mit

$$\begin{aligned}\Sigma^{(d)a'e}_{\alpha\beta;\lambda'\rho'}(0;v;t,\vec{p}) = & -\sum_{\vec{x}} \mathrm{e}^{-i\vec{p}\vec{x}} \epsilon_{abc}\epsilon_{a'b'c'} \cdot \Big[\widetilde{G}^{(u)bb'}_{\lambda'\gamma'}(t,\vec{x};0) G^{(u)ac'}_{\alpha\beta}(t,\vec{x};0) - \\ & -(C\gamma_5)_{\alpha\rho'} \widetilde{G}^{(u)ab'}_{\lambda'\rho'}(t,\vec{x};0) \widetilde{G}^{(u)bc'}_{\sigma'\gamma'}(t,\vec{x};0)(C\gamma_5)_{\sigma'\beta}\Big] \cdot G^{(d)ce}_{\gamma'\rho'}(t,\vec{x};v)\end{aligned} \tag{4.30}$$

4.2 Zusammengesetzte Operatoren

Zur Berechnung der Momente Hadronischer Strukturfunktionen mit Hilfe Gitter-physikalischer Methoden benötigt man Matrixelemente folgender zusammengesetzter Operatoren (siehe (4.13)):

$$\mathcal{O}_{\mu_1\ldots\mu_n} = \overline{\psi}(\gamma_{\mu_1} \overset{\leftrightarrow}{D}_{\mu_2} \ldots \overset{\leftrightarrow}{D}_{\mu_n})\psi \tag{4.31}$$

$$\mathcal{O}^{(5)}_{\mu_1\ldots\mu_n} = \overline{\psi}(\gamma_{\mu_1}\gamma_5 \overset{\leftrightarrow}{D}_{\mu_2} \ldots \overset{\leftrightarrow}{D}_{\mu_n})\psi, \qquad \psi = u,d,s,\ldots. \tag{4.32}$$

Im physikalischen Kontinuum (Minkowski Raum-Zeit) werden diese nach ihrem Verhalten unter Lorentz Transformationen und Ladungskonjugation klassifiziert. Bildet man Twist 2 Operatoren aus (4.31) und (4.32) durch Symmetrisierung der Lorentz-Indizes und Abziehen von Spuren, sind diese aufgrund ihres Transformationsverhaltens besonders einfach renormierbar und zwar multiplikativ renormierbar (im *flavor*-Non-Singlet Fall); sie mischen nicht.

Wechselt man zur Euklidischen Raum-Zeit bleiben die Operatoren multiplikativ renormierbar; statt der Lorentz-Gruppe gibt es hier die Orthogonale Gruppe $O(4)$. Eine größere Veränderung bedeutet die Diskretisierung der Raum-Zeit, wobei im Falle von Wilson-Fermionen die kovarianten Ableitungen des Kontinuums einfach durch Gitter-Analoga ersetzt werden (siehe (2.14)):

$$\begin{aligned}\overset{\leftrightarrow}{D}_\mu = \vec{D}_\mu - \overset{\leftarrow}{D}_\mu, \quad \vec{D}_\mu \psi(x) &= 1/2 \cdot \Big[U_\mu(x)\psi(x+\hat{\mu}) - U^\dagger_\mu(x-\hat{\mu})\psi(x-\hat{\mu})\Big] \\ \overline{\psi}(x) \overset{\leftarrow}{D}_\mu &= 1/2 \cdot \Big[\overline{\psi}(x+\hat{\mu})U^\dagger_\mu(x) - \overline{\psi}(x-\hat{\mu})U_\mu(x-\hat{\mu})\Big]\end{aligned} \tag{4.33}$$

Die Hyperkubische Gruppe $H(4)$ auf einem solchen Gitter, eine Untergruppe von $O(4)$, ist weniger einschränkend als $O(4)$ und die Möglichkeit der Mischung der Operatoren bei

Renormierung wächst. Läßt man sich von der $H(4)$ Klassifizierung in [14] leiten, erscheint folgende Operatorwahl auf dem Gitter günstig:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}_{a_0} &= \overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi, && (4.34)\\
\mathcal{O}_{v_{2,a}} &= \overline{\psi}\tfrac{1}{2}\Big(\gamma_1 \overleftrightarrow{D}_4 + \gamma_4 \overleftrightarrow{D}_1\Big)\psi, && (4.35)\\
\mathcal{O}_{r_{2,a}} &= \overline{\psi}\tfrac{1}{2}\Big(\gamma_1 \overleftrightarrow{D}_4 + \gamma_4 \overleftrightarrow{D}_1\Big)\gamma_5\psi, && (4.36)\\
\mathcal{O}_{a_1} &= \overline{\psi}\tfrac{1}{2}\Big(\gamma_2 \overleftrightarrow{D}_4 + \gamma_4 \overleftrightarrow{D}_2\Big)\gamma_5\psi, && (4.37)\\
\mathcal{O}_{v_{2,b}} &= \overline{\psi}\Big(\gamma_4 \overleftrightarrow{D}_4 - \tfrac{1}{3}\gamma_1 \overleftrightarrow{D}_1 - \tfrac{1}{3}\gamma_2 \overleftrightarrow{D}_2 - \tfrac{1}{3}\gamma_3 \overleftrightarrow{D}_3\Big)\psi, && (4.38)\\
\mathcal{O}_{r_{2,b}} &= \overline{\psi}\Big(\gamma_4 \overleftrightarrow{D}_4 - \tfrac{1}{3}\gamma_1 \overleftrightarrow{D}_1 - \tfrac{1}{3}\gamma_2 \overleftrightarrow{D}_2 - \tfrac{1}{3}\gamma_3 \overleftrightarrow{D}_3\Big)\gamma_5\psi, && (4.39)\\
\mathcal{O}_{v_3} &= \overline{\psi}\Big(\gamma_{\{1} \overleftrightarrow{D}_1 \overleftrightarrow{D}_{4\}} - \tfrac{1}{2}\gamma_{\{2} \overleftrightarrow{D}_2 \overleftrightarrow{D}_{4\}} - \tfrac{1}{2}\gamma_{\{3} \overleftrightarrow{D}_3 \overleftrightarrow{D}_{4\}}\Big)\psi, && (4.40)\\
\mathcal{O}_{r_3} &= \overline{\psi}\Big(\gamma_{\{1} \overleftrightarrow{D}_1 \overleftrightarrow{D}_{4\}} - \tfrac{1}{2}\gamma_{\{2} \overleftrightarrow{D}_2 \overleftrightarrow{D}_{4\}} - \tfrac{1}{2}\gamma_{\{3} \overleftrightarrow{D}_3 \overleftrightarrow{D}_{4\}}\Big)\gamma_5\psi, && (4.41)\\
\mathcal{O}_{a_2} &= \overline{\psi}\gamma_{\{2} \overleftrightarrow{D}_1 \overleftrightarrow{D}_{4\}}\,\gamma_5\psi, && (4.42)\\
\mathcal{O}_{v_4} &= \overline{\psi}\Big(\gamma_{\{1} \overleftrightarrow{D}_1 \overleftrightarrow{D}_4 \overleftrightarrow{D}_{4\}} + \gamma_{\{2} \overleftrightarrow{D}_2 \overleftrightarrow{D}_3 \overleftrightarrow{D}_{3\}} - \gamma_{\{1} \overleftrightarrow{D}_1 \overleftrightarrow{D}_3 \overleftrightarrow{D}_{3\}} - \gamma_{\{2} \overleftrightarrow{D}_2 \overleftrightarrow{D}_4 \overleftrightarrow{D}_{4\}}\Big)\psi. && (4.43)
\end{aligned}
$$

Zur Darstellung der Dirac-Matrizen siehe Anhang A.. Die Operatoren werden mit den Bezeichnungen der dazugehörigen reduzierten Matrixelemente indiziert; $\{\ldots\}$ bedeutet Symmetrisierung. [3] Zusätzlich werden lokale Operatoren (skalare und pseudoskalare Dichte, Vektorstrom- und Axialvektorstrom-Operator) in dieser Arbeit betrachtet:

$$\mathcal{O}_I = \overline{\psi}I\psi, \quad \mathcal{O}_P = \overline{\psi}\gamma_5\psi, \quad \mathcal{O}_V = \overline{\psi}\gamma_\mu\psi, \quad \mathcal{O}_A = \overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi \tag{4.44}$$

Außerdem spielt der erhaltene Vektorstrom eine Rolle:

$$J_\mu(x) = \tfrac{1}{2}\Big(\overline{\psi}(x+\hat{\mu})(\gamma_\mu+1)U_\mu^+(x)\psi(x) + \overline{\psi}(x)(\gamma_\mu-1)U_\mu(x)\psi(x+\hat{\mu})\Big) \tag{4.45}$$

mit der Eichfeldmatrix $U_\mu(x) \in \mathrm{SU}(3)$.

Eine Mischung mit Operatoren gleicher oder sogar niedrigerer Dimension kann aufgrund der Raum-Zeit-Symmetrie Eigenschaften bezüglich der Gruppe $H(4)$ für die genannten Operatoren außer für $\mathcal{O}_{v_3}$, $\mathcal{O}_{r_3}$ und $\mathcal{O}_{v_4}$ ausgeschlossen werden: Im Fall des Operators $\mathcal{O}_{v_3}$ existieren zwei weitere Operatoren mit gleicher Dimension und gleichem Transformationsverhalten, siehe [6, 14, 15]. Die Operatoren $\mathcal{O}_{r_3}$ und $\mathcal{O}_{v_4}$ können sogar mit Operatoren einer Dimension niedriger und anderen Chiralen Eigenschaften mischen, und zwar mit $\overline{\psi}(\sigma_{\mu\nu}\gamma_5 \overleftrightarrow{D}_{\mu_1} \ldots \overleftrightarrow{D}_{\mu_n})\psi$, wobei $n=2$ für $\mathcal{O}_{v_4}$ und $n=1$ für $\mathcal{O}_{r_3}$ ist.

[3] Die Indizes wurden so gewählt, weil bei der Berechnung der Nukleon-Matrixelemente der Impuls in 1-Richtung und der Spinvektor in 2-Richtung gelegt wurde, so daß andere Indexkombinationen für die Matrixelemente meistens zum Ergebnis Null führen würden.

Generell wird in dieser Arbeit aber das Mischungsproblem bei der Renormierung der Operatoren außer acht gelassen, d.h. auch die Operatoren $\mathcal{O}_{v_3}$, $\mathcal{O}_{r_3}$ und $\mathcal{O}_{v_4}$ werden multiplikativ renormiert.

4.3 Proton Greensfunktionen auf dem Gitter

Kernstück des Projektes „Berechnung von Proton Matrixelementen" ist die Berechnung des Proton-Propagators (4.20)

$$\begin{aligned} C^{(2)}_{\alpha\beta}(t;\vec{p}) \;&=\; \sum_{\vec{x}} \mathrm{e}^{-i\vec{p}\vec{x}} \epsilon_{abc}\epsilon_{a'b'c'} \\ &\Big\langle \widetilde{G}^{(d)cc'}_{\delta'\gamma}(t,\vec{x};0) \cdot \Big[G^{(u)bb'}_{\gamma\delta'}(t,\vec{x};0) G^{(u)aa'}_{\alpha\beta}(t,\vec{x};0) - G^{(u)aa'}_{\alpha\delta'}(t,\vec{x};0) G^{(u)bb'}_{\gamma\beta}(t,\vec{x};0) \Big] \Big\rangle_U \end{aligned}$$

und der Greensfunktionen (4.27) und (4.29)

$$\begin{aligned} C^{(3)}_{\alpha\beta}(t,\tau;\vec{p},\vec{q}) \;&=\; -\sum_{\vec{y},v,w} \mathrm{e}^{-i\vec{q}\vec{y}} \\ &\Big\langle \Sigma^{(u)c'e}_{\alpha\beta;\delta'\gamma'}(0;v;t,\vec{p}) \cdot [\mathcal{O}^{(u)ef}(v,w;\tau,\vec{y}) G^{(u)fc'}(w;0)]_{\gamma'\delta'}] \Big\rangle_U \\ C^{(3)}_{\alpha\beta}(t,\tau;\vec{p},\vec{q}) \;&=\; -\sum_{\vec{y},v,w} \mathrm{e}^{-i\vec{q}\vec{y}} \\ &\Big\langle \Sigma^{(d)a'e}_{\alpha\beta;\lambda'\rho'}(0;v;t,\vec{p}) \cdot [\mathcal{O}^{(d)ef}(v,w;\tau,\vec{y}) G^{(d)fa'}(w;0)]_{\rho'\lambda'}] \Big\rangle_U \end{aligned}$$

mit u- und d-Quark-Propagatoren G, zusammengesetzten u- und d-Propagatoren Σ, (4.28) und (4.30), und den u- und d-Operatoren $\mathcal{O}$, (4.34) - (4.45). Folgende Aufgaben sind dabei numerisch mit Hilfe eines Groß-Parallelrechners zu erledigen, [16]:

- **Berechnen von Eichfeld-Konfigurationen** $\{U_\mu(x)\}_1, \{U_\mu(x)\}_2, \ldots, \{U_\mu(x)\}_N$ über Monte-Carlo Simulationen, wobei $U_\mu(x) \in \mathrm{SU}(3)$ ($\mu = 1,2,3,4$, $x =$ Gitterpunkt im Raum-Zeit-Würfel) die im Kontinuum gebräuchlichen Gluonfelder $A_\mu(x)$ ersetzen.

- Ausrechnen von Σ und G über **Gitter-Dirac-Gleichungen** mit geeigneten Quelltermen für jede einzelne der N Konfiguration $\{U_\mu(x)\}_i$.

- Berechnen der obigen Proton-Propagatoren und Proton-Greensfunktionen für jede einzelne Konfiguration $\{U_\mu(x)\}_i$.

- Auswertung (auf einer Workstation), d.h. rechne für eine Größe X, z.B. den Proton-Propagator oder die Proton-Greensfunktionen, aus: $\langle X\rangle_U = 1/N \sum_i^N X(\{U_\mu(x)\}_i)$ und führe eine Fehlerabschätzung durch; hier wurde das Jackknife-Verfahren angewendet (siehe Anhang A.).

Berechnen von Eichfeld-Konfigurationen

Nach der (analytischen) Ausintegration der Quark-Funktional-Integrale bleibt die Berechnung der Gluon-Funktional-Integrale. Dies kann nur numerisch geschehen; die Störungstheorie kann nicht angewendet werden, da die (starke) Kopplungskostante im allgemeinen nicht als klein angenommen werden kann und somit kein geeigneter Entwicklungsparameter ist. In der sogenannten „quenched Näherung“ wird der Quark-Gluon-Wechselwirkungsanteil der QCD

$$S_W = \int d^4x \quad \overline{\psi}(\gamma_\mu D_\mu + m)\psi \tag{4.46}$$

mit

$$D_\mu = \partial_\mu - igT_a A^a_\mu, \qquad [T_a, T_b] = if_{abc}T_c$$

bei der Integration der Gluon-Funktional-Integrale als konstant angenommen und braucht hier nicht berücksichtigt zu werden. Es bleibt der numerisch wesentlich einfacher auszuwertende rein gluonische Wirkungsanteil

$$S_g = \int d^4x \quad \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu} \tag{4.47}$$

mit

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f_{abc} A^b_\mu A^c_\nu$$

(Die übrigen gluonischen Wirkungsanteile zur Eichfixierung müssen nur bei eichvarianten Quark-Greensfunktionen berücksichtigt werden; siehe den folgenden Abschnitt „Quark-Greensfunktionen auf dem Gitter“.)

Auf dem Gitter (dort: $A_\mu(x) \to U_\mu(x)$) ist dann für eine Größe X, z.B. den Proton-Propagator oder die Proton-Greensfunktionen, zu berechnen:

$$\langle X \rangle_U = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}[U] X(U) e^{-S_g(U)} \tag{4.48}$$

mit

$$Z = \int \mathcal{D}[U] e^{-S_g(U)} \tag{4.49}$$

Mit Hilfe von Monte-Carlo Methoden erfolgt die Berechnung als Mittelwert über ein Ensemble von Eichfeld-Konfigurationen $\{U_\mu(x)\}_i$, welche gerade eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(U) = 1/Ze^{-S_g(U)}$ haben:

$$\overline{X} = \frac{1}{N} \sum_i^N X(\{U_\mu(x)\}_i). \tag{4.50}$$

Für große N ($N \to \infty$) besteht schließlich der Zusammenhang

$$\langle X \rangle_U = \overline{X} + O(1/\sqrt{N}). \tag{4.51}$$

Mathematisch erzeugt man ein solches Ensemble über einen stochastischen Prozeß, einen sogenannten Markov-Prozeß [17]. Für die SU(3) Eichtheorie der QCD wird dieser durch Metropolis-Algorithmen und Überrelaxations-Algorithmen realisiert. Die entscheidende Größe ist hier die gluonische Wirkung auf dem Gitter:

$$S_g(U(l)) = \beta \sum_{\square} \Big(1 - \frac{1}{3} ReTr(U_{\square})\Big). \tag{4.52}$$

Dabei ist $\beta = 6/g_0^2$ mit der nackten Kopplungskonstanten g_0 und es wird über alle Plaketten $\square$ mit

$$\begin{aligned} U_{\square} &\equiv U_{\square}(x;\mu\nu) \\ &= U_\mu(x)U_\nu(x+\hat{\mu})U_\mu^+(x+\hat{\nu})U_\nu^+(x) \end{aligned} \tag{4.53}$$

aufsummiert, wo auf einer Kante l das Eichfeld $U(l)$ sitzt. Für die beiden Monte-Carlo Algorithmen kann (4.52) geschickter geschrieben werden, indem $U(l)$ aus der Summe $\sum_{\square}$ herausgezogen wird:

$$S_g(U(l)) = const. - \frac{\beta}{3} ReTr\Big(U(l) \sum_{\sqcap} U_{\sqcap}\Big). \tag{4.54}$$

Man startet nun mit einer beliebigen Ausgangseichfeld-Konfiguration $\{U_\mu(x)\}_0$ und läuft n-mal durch das gesamte Raum-Zeit-Gitter (genauer: über alle Kanten l im Gitter). Bei jedem $U(l)$ $(= U_{alt}(l))$ machen der Metropolis-Algorithmus und der Überrelaxations-Algorithmus, in bestimmter Weise mehrfach und kombiniert angewendet, Vorschläge $U_{neu}(l)$, die einerseits zufällige Anteile als auch das alte Eichfeld $U_{alt}(l)$ enthalten:

- Metropolis:

$$U_{neu}(l) = U' \cdot U_{alt}(l) \tag{4.55}$$

  mit $U' = \{$ zufällig in wählbarem „Abstand" um 1_{3x3} gelegene SU(3)-Matrix mit gleicher Wahrscheinlichkeit für U' und $U'^{-1}\}$.

- Überrelaxation nach Creutz [18]:

$$U_{neu}(l) = U' \cdot U_{alt}^{-1}(l) \cdot U' \tag{4.56}$$

  mit $U' = \{$ in eine SU(3)-Matrix umgewandelte Matrix $(\sum_{\sqcap} U_{\sqcap})^{-1}\}$.[4]

Angenommen bzw. verworfen wird der Vorschlag, falls das Verhältnis $e^{-S_g(U_{neu})}/e^{-S_g(U_{alt})}$ größer bzw. kleiner als eine Zufallszahl zwischen 0 und 1 ist. Nach einer gewissen Thermalisierungsphase tritt ein Gleichgwichtszustand ein und die Eichfeld-Konfigurationen haben die richtige Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(U) = 1/Ze^{-S_g(U)}$. Ab dann können beispielsweise nach jedem fünfzigsten Gitterdurchlauf (voneinander unabhängig angenommene) Konfigurationen $\{U_\mu(x)\}_1$, $\{U_\mu(x)\}_2, \ldots$ für die weitere Rechnung gespeichert werden.

[4]Nimm dazu die erste und zweite Zeile der Matrix und konstruiere daraus über das Vektorprodukt als dritte Zeile eine SU(3)-Matrix.

Dirac-Gleichungen auf dem Gitter

Zur Berechnung des Proton-Propagators (4.20)

$$
\begin{aligned}
C^{(2)}_{\alpha\beta}(t;\vec{p}) &= \sum_{\vec{x}} \mathrm{e}^{-i\vec{p}\vec{x}} \epsilon_{abc}\epsilon_{a'b'c'} \\
&\quad \left\langle \widetilde{G}^{(d)cc'}_{\delta'\gamma}(t,\vec{x};0) \cdot \left[G^{(u)bb'}_{\gamma\delta'}(t,\vec{x};0) G^{(u)aa'}_{\alpha\beta}(t,\vec{x};0) - G^{(u)aa'}_{\alpha\delta'}(t,\vec{x};0) G^{(u)bb'}_{\gamma\beta}(t,\vec{x};0) \right] \right\rangle_U
\end{aligned}
$$

und der Greensfunktionen (4.27) und (4.29)

$$
\begin{aligned}
C^{(3)}_{\alpha\beta}(t,\tau;\vec{p},\vec{q}) &= -\sum_{\vec{y},v,w} \mathrm{e}^{-i\vec{q}\vec{y}} \\
&\quad \left\langle \Sigma^{(u)c'e}_{\alpha\beta;\delta'\gamma'}(0;v;t,\vec{p}) \cdot [\mathcal{O}^{(u)ef}(v,w;\tau,\vec{y}) G^{(u)fc'}(w;0)]_{\gamma'\delta'}] \right\rangle_U \\
C^{(3)}_{\alpha\beta}(t,\tau;\vec{p},\vec{q}) &= -\sum_{\vec{y},v,w} \mathrm{e}^{-i\vec{q}\vec{y}} \\
&\quad \left\langle \Sigma^{(d)a'e}_{\alpha\beta;\lambda'\rho'}(0;v;t,\vec{p}) \cdot [\mathcal{O}^{(d)ef}(v,w;\tau,\vec{y}) G^{(d)fa'}(w;0)]_{\rho'\lambda'}] \right\rangle_U
\end{aligned}
$$

benötigt man die Quark-Propagatoren (gleich wegen $m_u \approx m_d$)

$$
G^{(u)ab}_{\alpha\beta}(x;0) \equiv G^{(d)ab}_{\alpha\beta}(x;0)
$$

und die verallgemeinerten Quark-Propagatoren (4.28) und (4.30)

$$
\Sigma^{(u)c'e}_{\alpha\beta;\delta'\gamma'}(0;v;t,\vec{p}) = \sum_{\vec{x}} S^{(u)c'a}_{\alpha\beta;\delta'\gamma}(t,\vec{x};0;\vec{p}) \cdot G^{(u)ae}_{\gamma\gamma'}(t,\vec{x};v) \tag{4.57}
$$

$$
\Sigma^{(d)a'e}_{\alpha\beta;\lambda'\rho'}(0;v;t,\vec{p}) = \sum_{\vec{x}} S^{(d)a'c}_{\alpha\beta;\lambda'\rho'}(t,\vec{x};0;\vec{p}) \cdot G^{(d)ce}_{\gamma'\rho'}(t,\vec{x};v) \tag{4.58}
$$

Dabei ist

$$
\begin{aligned}
S^{(u)c'a}_{\alpha\beta;\delta'\gamma}(t,\vec{x};0;\vec{p}) &= -\mathrm{e}^{-i\vec{p}\vec{x}} \epsilon_{abc}\epsilon_{a'b'c'} \cdot \Big[[\widetilde{G}^{(d)ca'}(t,\vec{x};0) G^{(u)bb'}(t,\vec{x};0)]_{\delta'\beta}\delta_{\alpha\gamma} + \\
&+ Tr_D[\widetilde{G}^{(d)ca'}(t,\vec{x};0) G^{(u)bb'}(t,\vec{x};0)]\delta_{\delta'\beta}\delta_{\alpha\gamma} + G^{(u)bb'}_{\alpha\beta}(t,\vec{x};0)\widetilde{G}^{(d)ca'}_{\delta'\gamma}(t,\vec{x};0) + \\
&[G^{(u)bb'}(t,\vec{x};0)\widetilde{G}^{(d)ca'}(t,\vec{x};0)]_{\alpha\gamma}\delta_{\delta'\beta} \Big]
\end{aligned} \tag{4.59}
$$

und

$$S^{(d)a'c}_{\alpha\beta;\lambda'\rho'}(t,\vec{x};0;\vec{p}) = -\mathrm{e}^{-i\vec{p}\vec{x}}\epsilon_{abc}\epsilon_{a'b'c'}\cdot\Big[\widetilde{G}^{(u)bb'}_{\lambda'\gamma'}(t,\vec{x};0)G^{(u)ac'}_{\alpha\beta}(t,\vec{x};0) - -(C\gamma_5)_{\alpha\rho'}\widetilde{G}^{(u)ab'}_{\lambda'\rho'}(t,\vec{x};0)\widetilde{G}^{(u)bc'}_{\sigma'\gamma'}(t,\vec{x};0)(C\gamma_5)_{\sigma'\beta}\Big] \quad (4.60)$$

Für die Quark-Propagatoren G gilt die Dirac-Gleichung auf dem Gitter:

$$\sum_z M^{ac}_{\alpha\gamma}(x;z)G^{cb}_{\gamma\beta}(z;0) = \delta^{ab}\delta_{\alpha\beta}\delta_{x;0} \quad (4.61)$$

mit der Fermion-Matrix (Wilson-Fermionen) oder dem Dirac-Operator M, wobei κ mit der nackten Quarkmasse zusammenhängt ($m_0 \sim \frac{1}{\kappa}$) und man üblicherweise $r = 1$ wählt:

$$M^{ac}_{\alpha\gamma}(x;z) = \delta^{ab}\delta_{\alpha\beta}\delta_{x;z} + +\kappa\sum_{\mu=1}^{4}\Big[(\gamma_\mu - r)_{\alpha\beta}U^{ab}_\mu(x)\delta_{x+\hat{\mu};z} - (\gamma_\mu + r)_{\alpha\beta}U^{+,ab}_\mu(x-\hat{\mu})\delta_{x-\hat{\mu};z}\Big] \quad (4.62)$$

Zur Berechnung der verallgemeinerten Quark-Propagatoren $\sum$ nutzt man ebenfalls die Gitter-Dirac-Gleichung aus. Es gilt für $\psi = u, d$ (ohne explizite Angabe der Farb- und Spin-Indizes), wenn man

$$\textstyle\sum^{(\psi)}(0;v;t,\vec{p}) = \sum_{\vec{x}} S^{(\psi)}(t,\vec{x};0;\vec{p})\cdot G^{(\psi)}(t,\vec{x};v)$$

von rechts mit $M^{(\psi)}(z;z')$ multipliziert und über z summiert:

$$\begin{aligned}\sum_z \textstyle\sum^{(\psi)}(0;v;t,\vec{p})M^{(\psi)}(z;z') &= \sum_z\sum_{\vec{x}} S^{(\psi)}(t,\vec{x};0;\vec{p})\cdot G^{(\psi)}(t,\vec{x};v)M^{(\psi)}(z;z') \\ &= S^{(\psi)}(t,\vec{x};0;\vec{p})\delta_{z'_0;t}\end{aligned}$$

(In der zweiten Zeile wurde auf der rechten Seite die Dirac-Gleichung ausgenutzt.) Bildet man auf beiden Gleichungsseiten das Hermitesch Konjugierte und benutzt $M^{+(\psi)}(z;z') = \gamma_5 M^{(\psi)}(z';z)\gamma_5$, so gelangt man schließlich zu einer Dirac-Gleichung mit besonderer Quelle:

$$\sum_z M^{(\psi)}(z';z)\gamma_5\textstyle\sum^{+(\psi)}(0;v;t,\vec{p}) = \gamma_5 S^{+(\psi)}(t,\vec{x};0;\vec{p})\delta_{z'_0;t} \quad (4.63)$$

Aus der Lösung für $\gamma_5\sum^{+(\psi)}(0;v;t,\vec{p})$ wird dann $\sum^{(\psi)}(0;v;t,\vec{p})$ rekonstruiert.

Sowohl (4.61) als auch (4.63) sind inhomogene lineare Gleichungssysteme und werden iterativ numerisch, z.B. über das Minimal-Residuum Verfahren, gelöst [17].

4.4 Quark Greensfunktionen auf dem Gitter

Zur Operator-Renormierung in den Proton Greensfunktionen (4.12) werden, wenn man die Kontinuums-QCD nachahmt, Quark 2-pt Greensfunktionen (Propagatoren) und Quark 3-pt Greensfunktionen auf dem Gitter benötigt. Durch Feynman-Graphen werden die Greensfunktionen folgendermaßen dargestellt:

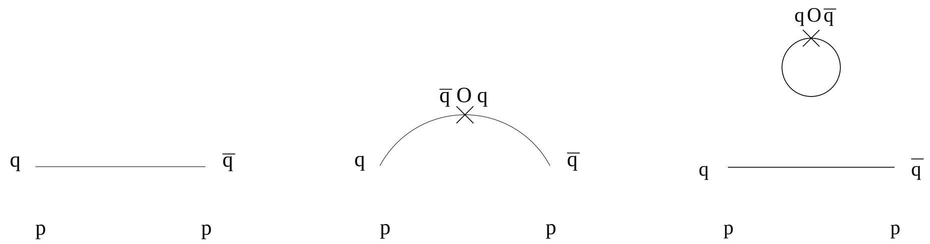

Abbildung 4.2: Feynman-Graphen für eine Quark Zwei-Punkt Funktion (Propagator) und Quark Drei-Punkt Funktionen („verbunden“ und „unverbunden“ ~ Seequark-Beitrag).

Zu berechnen sind hier die Greensfunktionen im Fourier-Raum (normiert mit einem Raum-Zeit-Volumen-Faktor $1/VT$):

$$S^{cd}_{\alpha\beta}(p) = \frac{1}{VT}\sum_{x,y} \mathrm{e}^{-ip(x-y)}\langle q^c_\alpha(x)\bar{q}^d_\beta(y)\rangle \tag{4.64}$$

$$C^{(q)cd}_{\alpha\beta}(p) = \frac{1}{VT}\sum_{x,y,z} \mathrm{e}^{-ip(x-y)}\langle q^c_\alpha(x)\mathcal{O}(z)\bar{q}^d_\beta(y)\rangle \tag{4.65}$$

mit

$$\mathcal{O}(z) = \sum_{\substack{v,w\\a,b,\alpha,\beta}} \bar{q}^a_\alpha(v)\mathcal{O}^{ab}_{\alpha\beta}(v,w;z)q^b_\beta(w), \tag{4.66}$$

wobei $\mathcal{O}^{ab}_{\alpha\beta}(v,w;z)$ aus lokalen Operatoren und Ableitungsoperatoren gebildet wird, siehe (4.34) - (4.45); der Vierer-Impuls, der in den Operator hineinfließt sei als null angenommen. Wegen der annähernden Massengleichheit der u- und d-Quarks, $m_u \approx m_d$, braucht zwischen ihnen hier nicht unterschieden zu werden, so daß die Quark-Felder einfach mit q bezeichnet werden.

Nach Ausintegration des Quark-Funktional-Integrals ergibt sich hier verhältnismäßig einfach mit $G^{cd}_{\alpha\beta}(x;y) = \langle q^c_\alpha(x)\bar{q}^d_\beta(y)\rangle_q$ für den Quark Propagator:

$$S^{cd}_{\alpha\beta}(p) = \frac{1}{VT}\sum_{x,y} \mathrm{e}^{-ip(x-y)}\langle G^{cd}_{\alpha\beta}(x;y)\rangle_U \tag{4.67}$$

und für den verbundenen Teil der 3-pt Quark Greensfunktion

$$C^{(q)cd}_{\alpha\beta}(p) = \frac{1}{VT}\sum_{x,y,z,v,w} \mathrm{e}^{-ip(x-y)}\langle G^{ca}_{\alpha\gamma}(x;v)\mathcal{O}^{ab}_{\gamma\delta}(v,w;z)G^{bd}_{\delta\beta}(w;y)\rangle_U \tag{4.68}$$

Der nur für Singlet Operatoren interessierende unverbundene Anteil ist:

$$C^{(q)cd}_{\alpha\beta}(p) \;=\; -\frac{1}{VT}\sum_{x,y,z,v,w} \mathrm{e}^{-ip(x-y)}\langle G^{cd}_{\alpha\beta}(x;y)\cdot Tr_D[G^{ba}(w;v)\mathcal{O}^{ab}(v,w;z)]\rangle_U \quad (4.69)$$

(Tr_D ist die Dirac-Spur.)

Folgende Aufgaben sind dabei ähnlich wie bei Proton Greensfunktionen numerisch mit Hilfe eines Groß-Parallelrechners zu erledigen:

- **Berechnen von Eichfeld-Konfigurationen** $\{U_\mu(x)\}_1,\ \{U_\mu(x)\}_2,\ldots,\{U_\mu(x)\}_N$ über Monte-Carlo Simulationen, wobei $U_\mu(x)\in \mathrm{SU}(3)$ ($\mu=1,2,3,4,\ x=$ Gitterpunkt im Raum-Zeit-Würfel) die im Kontinuum gebräuchlichen Gluonfelder $A_\mu(x)$ ersetzen. Es gilt: $U_\mu(x)=\mathrm{e}^{ig_0A_\mu(x)}$ mit dem Gitterpunktabstand hier $a=1$ und der nackten Kopplungskonstanten g_0.
- Numerische **Eichfixierung** der Eichfeld-Konfigurationen $\{U_\mu(x)\}_i$ auf dem Gitter (hier: Landau-Eichung). Wie im Kontinuum ist das notwendig, wenn nicht eichinvariante Größen wie Quark Greensfunktionen berechnet werden.
- Ausrechnen von G über **Gitter-Dirac-Gleichungen** für jede einzelne der N eichfixierten Konfiguration $\{U_\mu(x)\}_i$.
- Berechnen der obigen Quark 3-pt Greensfunktionen für jede einzelne eichfixierte Konfiguration $\{U_\mu(x)\}_i$.
- Auswertung (auf einer Workstation), d.h. rechne für eine Größe X, z.B. den Quark Propagator oder die Quark 3-pt Greensfunktionen, Mittelwerte über die eichfixierten Eichfeld-Konfigurationen aus: $\langle X\rangle_U \;=\; 1/N\sum_i^N X(\{U_\mu(x)\}_i)$ und führe eine Fehlerabschätzung durch; hier wurde das Jackknife-Verfahren angewendet (siehe Anhang A.).

Eichfixierung auf dem Gitter

Numerisch ist die Fixierung einer Eichung wie die Landau-Eichung

$$\sum_{\mu=1}^{4}\nabla_\mu A_\mu(x) \;=\; 0 \qquad (4.70)$$

relativ einfach, wenn auch aufwendig zu realisieren. Der Standardweg auf dem Gitter ist die Minimierung des Funktionals

$$L_U \;=\; \sum_{x,\mu} ReTr(U_\mu(x)), \qquad (4.71)$$

wobei immer wieder durch das Gitter laufend Eichtransformationen $g(x)$ mit $U^g_\mu(x)=g(x)U_\mu(x)$ und $U^g_\mu(x-\hat\mu)=U_\mu(x-\hat\mu)g^+(x)$ ($\hat\mu=$ Einheitsvektor in die μ-te Richtung) berechnet werden, die L_U lokal bei x minimieren. Sukzessive wird so L_U (im Idealfall global) minimiert und äquivalent dazu die Landau-Bedingung auf dem Gitter erfüllt.

Eine Kontrollgröße ist neben L_U selbst (es sollte fallend gegen einen festen Wert konvergieren)

$$\Theta = \frac{1}{VT}\sum_x \Theta(x) \;=\; \frac{1}{VT}\sum_{x,\mu} Tr[(\nabla_\mu A_\mu(x))^2], \tag{4.72}$$

mit dem Raum-Zeit-Volumen VT. Θ geht offensichtlich gegen 0. Auf dem Gitter gilt:

$$\sum_{\mu=1}^{4} \nabla_\mu A_\mu(x) \;=\; \sum_{\mu=1}^{4}[A_\mu(x) - A_\mu(x-\hat{\mu})] \tag{4.73}$$

$$A_\mu(x) \;\approx\; \frac{U_\mu(x) - U_\mu^+(x)}{2ig_0} - Tr[\ldots] \tag{4.74}$$

mit dem Gitterpunktabstand hier $a = 1$ und spurlos gemachtem $A_\mu(x)$.

Ein verhältnismäßig einfach zu implementierender Algorithmus zur lokalen Minimierung von L_U ist der folgende:

$g(x) \in$ SU(3) wird über SU(2) Untergruppen von SU(3) dargestellt, z.B.:

$$g(x) \;=\; \begin{pmatrix} g_{11}(x) & -g_{12}^+(x) & 0 \\ g_{12}(x) & g_{11}^+(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.75}$$

mit det $g(x) = 1$. Man berechnet hiermit die Differenz zwischen eichtransformiertem und nicht eichtransformiertem Funktional $\Delta L_U = L_U^g - L_U$ und minimiert dies mit Hilfe eines Lagrangeschen Multiplikators λ unter der Nebenbedingung det $g(x) = 1$. Das unter Variation von g und λ zu minimierende Funktional

$$f(g) \;=\; \Delta L_U + \lambda[\det g - 1] \tag{4.76}$$

führt so auf das g festlegende Gleichungssystem:

$$\frac{\partial f}{\partial g_{11}} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial g_{11}^+} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial g_{12}} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial g_{12}^+} = 0, \quad \det g = 1. \tag{4.77}$$

Die betreffenden Eichfelder werden mit diesem g eichtransformiert: $U_\mu^g(x) = g(x)U_\mu(x)$ und $U_\mu^g(x-\hat{\mu}) = U_\mu(x-\hat{\mu})g^+(x)$ für alle vier Richtungen μ. Dieser Vorgang am Gitterpunkt x wird n-mal wiederholt, wobei andere Darstellungen (über die SU(2) Untergruppen) von SU(3) verwendet werden.

Wesentlich beschleunigt wird dieser Algorithmus durch folgenden Überrelaxations-Mechanismus [19]:

Das Ergebnis des obigen Algorithmus ist eine Gesamt-Eichtransformation $\hat{g}(x) = g^{(n)}(x) \cdot g^{(n-1)}(x) \ldots g^{(1)}(x)$. Statt dieser nimmt man nach [20] :

$$g^{(\omega)}(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{[\omega]_i}{i!}(\hat{g}(x) - 1)^i \quad \text{mit} \quad [\omega]_i = \frac{\Gamma(\omega + 1)}{\Gamma(\omega + 1 - i)}. \tag{4.78}$$

$N = 4$ und $\omega \approx 1.7$ scheinen geeignet. Bevor man also zum nächsten Gitterpunkt geht, führt man bei x insgesamt die folgende Eichtransformation für alle vier Richtungen μ durch:

$$U^g_\mu(x) = g^{(\omega)}(x) U_\mu(x), \quad U^g_\mu(x - \hat{\mu}) = U_\mu(x - \hat{\mu}) g^{(\omega)+}(x). \tag{4.79}$$

Ein theoretisches Problem, das sogenannte Gribov-Kopie-Problem auf dem Gitter, ist, daß die Eichfixierung vom angewendeten Algorithmus abhängt und kein eindeutiges Ergebnis liefert. Das Ergebnis ist im allgemeinen nur eines der vielen Nebenminima vom globalen Minimum. Daraus ergibt sich eine im Prinzip unbekannte Wahrscheinlichkeitsverteilung der eichfixierten Eichfelder unter den Gluon-Funktional-Integralen (4.67) und (4.68). Man nimmt allerdings an, daß insbesondere bei kleinen Eichfeldern, im sogenannten störungstheoretischen Bereich, diese Problematik praktisch keine so ernsten Auswirkungen hat.

Eine Analyse der Verteilung der eichfixierten Eichfelder wäre wünschenswert, ist aber numerisch teuer. Man hätte von jeder thermalisierten Eichfeld-Konfiguration durch zufällige Eichtransformationen viele Kopien herzustellen und für jede einzelne eine Eichfixierung vorzunehmen.

In der vorliegenden Arbeit wurde dies nicht durchgeführt, stattdessen wurde eine Gleichverteilung aller Gribov-Kopien angenommen. Besonders auffällige eichfixierte Feld-Konfigurationen konnten allerdings auch nicht beobachtet werden, d.h. die Quark Propagatoren und Greensfunktionen waren numerisch unabhängig von irgendeiner Auswahl von Eichfeld-Konfigurationen. Daß Fluktuationen durch Gribov-Kopien gering sind, wird in [21] bestätigt.

Eichfixierungen wurden für die Gitter 16^3x32 ($\beta = 6.0$) und 24^3x48 ($\beta = 6.2$) vorgenommen. $2000 - 3000$-mal muß der überrelaxierte Algorithmus im allgemeinen durch das Gitter laufen (abgesehen von seltenen, schwer zu fixierenden Feld-Konfigurationen), um für die Kontrollgröße ein $\Theta < 10^{-14}$ (Maschinengenauigkeit) zu erreichen. Auf dem 16^3x32 Gitter genügte bei Verwendung des APE-Parallelrechners QH2 für eine Eichfixierung eine Zeit von etwa 30 Minuten, auf dem großen Gitter von ca. 70 Minuten.

Dirac-Gleichungen auf dem Gitter

Der allgemein übliche Standardweg zur Berechnung der Quark Propagatoren (4.67)

$$S^{cd}_{\alpha\beta}(p) = \frac{1}{VT}\sum_{x,y} \mathrm{e}^{-ip(x-y)}\langle G^{cd}_{\alpha\beta}(x;y)\rangle_U$$

und der 3-pt Quark Greensfunktion (4.68)

$$C^{(q)cd}_{\alpha\beta}(p) = \frac{1}{VT}\sum_{x,y,z,v,w} \mathrm{e}^{-ip(x-y)}\langle G^{ca}_{\alpha\gamma}(x;v)\mathcal{O}^{ab}_{\gamma\delta}(v,w;z)G^{bd}_{\delta\beta}(w;y)\rangle_U$$

nutzt Translationsinvarianz in Raum und Zeit aus. Ersetze $y \to 0$ im Quark Propagator und z.B. $z \to 0$ in der 3-pt Quark Greensfunktion. Dann gilt:

$$S^{cd}_{\alpha\beta}(p) = \sum_{x} \mathrm{e}^{-ipx}\langle G^{cd}_{\alpha\beta}(x;0)\rangle_U \tag{4.80}$$

und

$$C^{(q)cd}_{\alpha\beta}(p) = \sum_{x,y,v,w} \mathrm{e}^{-ip(x-y)}\langle G^{ca}_{\alpha\gamma}(x;v)\mathcal{O}^{ab}_{\gamma\delta}(v,w;0)G^{bd}_{\delta\beta}(w;y)\rangle_U. \tag{4.81}$$

Man berechnet hier einerseits den Quark Propagator $G(x;0)$ über eine Dirac-Gleichung auf dem Gitter:

$$\sum_x M^{ac}_{\alpha\gamma}(r;x)G^{cb}_{\gamma\beta}(x;0) = \delta^{ab}\delta_{\alpha\beta}\delta_{r;0} \tag{4.82}$$

mit der Fermion-Matrix M , (4.62), für jede der N eichfixierten Eichfeld-Konfigurationen. Und andererseits muß man für die 3-pt Quark Greensfunktion im Falle ausgedehnter Operatoren $\mathcal{O}$ wie Ableitungen (oder sogar Produkte von Ableitungen) zusätzlich Dirac-Gleichungen mit $v \neq 0$ lösen:

$$\sum_x M^{ac}_{\alpha\gamma}(r;x)G^{cb}_{\gamma\beta}(x;v) = \delta^{ab}\delta_{\alpha\beta}\delta_{r;v} \tag{4.83}$$

Über die Beziehung $G(w;y) = \gamma_5 G^{+}(y;w)\gamma_5$ hat man dann ebenfalls $G^{bd}_{\delta\beta}(w;y)$ in (4.81) ausgerechnet.

Diese Methode berechnet eine Quark-Ausbreitung (einen Propagator) von festen Punkten 0 oder $v \neq 0$ ($w \neq 0$) zu beliebigen Punkten x (y)- man nennt sie deswegen **Punkt-Quellen** Methode.

Eine simple, aber numerisch wesentlich bessere Alternative dazu berechnet den vollen Quark Propagator und die volle Quark Greensfunktion ohne Ausnutzung von Translationsinvarianz [22].

Verwendet man nämlich **Impuls-Quellen**, d.h. löst man die folgende Gitter-Dirac-Gleichung

$$\sum_x M^{ac}_{\alpha\gamma}(r;x)\Big(\sum_y G^{cb}_{\gamma\beta}(x;y)\mathrm{e}^{ipy}\Big) \;=\; \delta^{ab}\delta_{\alpha\beta}\mathrm{e}^{ipr}, \tag{4.84}$$

so hat man bereits alles Notwendige berechnet. Denn den Quark Propagator (4.67) erhält man so über

$$S^{cd}_{\alpha\beta}(p) \;=\; \frac{1}{VT}\sum_x \mathrm{e}^{-ipx}\langle\Big(\sum_y G^{cb}_{\gamma\beta}(x;y)\mathrm{e}^{ipy}\Big)\rangle_U \tag{4.85}$$

und die 3-pt Quark Greensfunktion (4.68) mit Hilfe der Relation $G(x;v) = \gamma_5 G^+(v;x)\gamma_5$ zu

$$C^{(q)cd}_{\alpha\beta}(p) \;=\; \frac{1}{VT}\sum_{z,v,w}\langle\gamma_5\Big(\sum_x G^{ca}_{\alpha\gamma}(v;x)\mathrm{e}^{ipx}\Big)^+\gamma_5\mathcal{O}^{ab}_{\gamma\delta}(v,w;z)\Big(\sum_y G^{bd}_{\delta\beta}(w;y)\mathrm{e}^{ipy}\Big)\rangle_U \tag{4.86}$$

Ein Nachteil dieser Methode ist allerdings die Festlegung auf bestimmte Impulse p von vornherein, wobei die Anzahl der Impulse zu der Anzahl der numerisch aufwendig zu lösenden Dirac-Gleichungen proportional ist. Bei der Punkt-Quellen-Methode wächst die Anzahl der zu lösenden Dirac-Gleichungen mit der Ausdehnung der Operatoren, so daß bei Operatoren mit mehreren Ableitungen die Impuls-Quellen-Methode schnell überlegen ist. Die Qualität der Ergebnisse (das Rauschverhalten) ist auf jeden Fall deutlich besser bei der Impuls-Quellen-Methode. Dies soll durch folgenden Vergleich in Fig. 4.3 gezeigt werden. Hierzu wird die Renormierungskonstante für den axialen Operator $\gamma_\mu\gamma_5$ (gemittelt über die 4 Richtungen μ) auf einem 16^3x32 Gitter ($\beta = 6.0$) berechnet (siehe Abschnitt 6). Die dazu notwendigen Quark Propagatoren und 3-pt Greensfunktionen werden einmal über die Punkt-Quellen-Methode und zum anderen mit der Impuls-Quellen-Methode ausgerechnet.

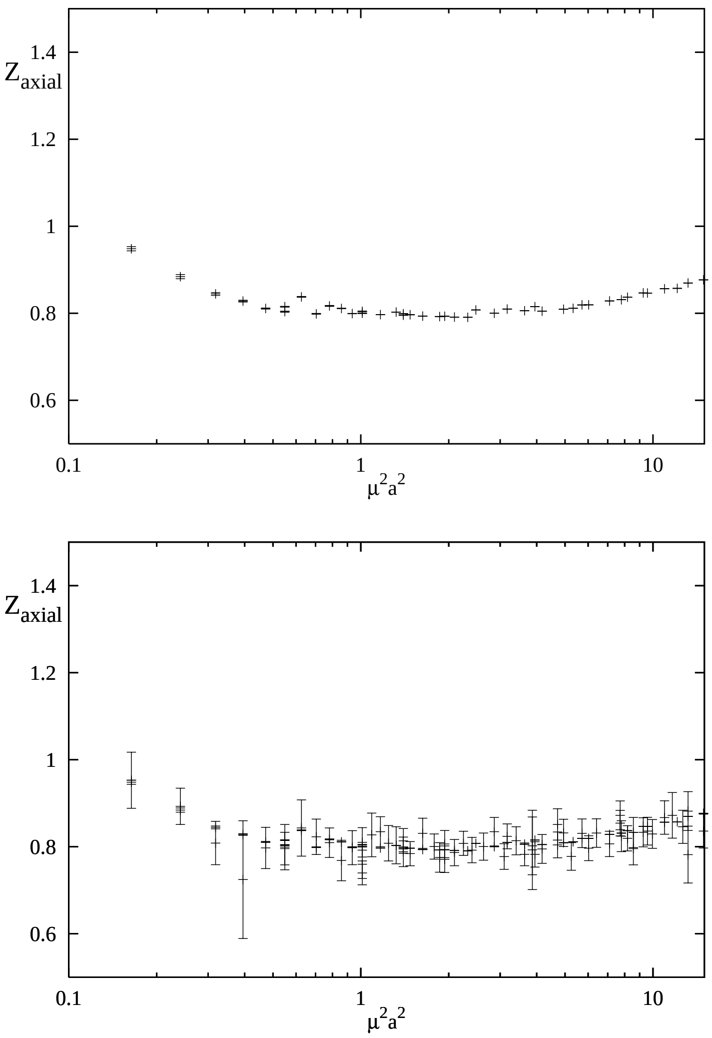

Abbildung 4.3: Z des Axialvektor-Stromes gemittelt über Raum- und Zeit-Komponenten mit einer Impuls-Quellen-Methode (oberes Bild; 20 Eichfeld-Konfigurationen) und einer Punkt-Quellen-Methode (unteres Bild; 120 Eichfeld-Konfigurationen) berechnet.

In dieser Arbeit werden Wilson-Fermionen (mit $r = 1$) in der quenched Näherung verwendet. Die Punkt-Quellen-Methode (Bearbeitung von 120 Eichfeld-Konfigurationen) und die Impuls-Quellen-Methode (Bearbeitung von 20 Eichfeld-Konfigurationen) wurden auf einem 16^3x32 Gitter bei $\beta = 6.0$ und den hopping Parametern $\kappa = 0.155, 0.153$ und 0.1515 angewendet. Auf dem 24^3x48 Gitter (Bearbeitung von 4 Feld-Konfigurationen) wurde bei $\beta = 6.2$ und den hopping Parametern $\kappa = 0.152, 0.1507$ und 0.1489 nur die Impuls-Quellen-Methode eingesetzt. Die zur Lösung der Dirac-Gleichungen notwendige Invertierung der Fermion-Matrix M wurde z.B. mit Hilfe des Minimal-Residuum Verfahrens auf dem Gitter durchgeführt [17].

Es wurden systematisch alle 3-pt Quark Greensfunktionen mit bilinearen Quark Operatoren $\psi\mathcal{O}\overline{\psi}$ mit $\mathcal{O}$ gleich

$$\gamma_\mu, \gamma_\mu\gamma_5 \qquad \mu = 1,2,3,4 \tag{4.87}$$
$$I, \gamma_5 \tag{4.88}$$
$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \qquad \mu,\nu = 1,2,3,4 \tag{4.89}$$

und diese in Kombination mit allen möglichen Produkten von bis zu 3 Ableitungen

$$D_{\mu_1}, D_{\mu_2}, D_{\mu_3} \qquad \mu_1, \mu_2, \mu_3 = 1,2,3,4 \tag{4.90}$$

berechnet (zur Darstellung der Dirac-Matrizen siehe Anhang A.).

Für die Vierer-Impulse wurden 43 bei $\beta = 6.0$ und 41 bei $\beta = 6.2$ möglichst in Richtung der Raum-Zeit-Diagonalen (zur Minimierung von Diskretisierungs-Fehlern) ausgewählt.

4.5 APE-Parallelrechner

Der APE Quadrics Parallelrechner ist ein von theoretischen Physikern von INFN ROME und der Universität von Pisa entwickelter Spezial-Rechner. Es handelt sich hierbei um eine single user SIMD-Maschine (Single Instruction Multi Data), d.h. ein Programm zur Zeit wird von vielen Prozessor-Einheiten synchron auf verschiedene Daten angewendet. Ein solcher Rechner ist somit besonders geeignet für parallelisierbare homogene lokale Probleme wie sie z.B. in Gitter-Eichtheorien zu lösen sind.

Ein physikalisches Raum-Zeit-Gitter (L_1, L_2, L_3, T) wird auf ein 3-dimensionales Prozessor-Gitter (l_1, l_2, l_3) abgebildet, d.h. jedem Prozessor wird ein Raum-Zeit-Untergitter zugeordnet (siehe Abb.). Da das Prozessor-Gitter 3-dimensional ist, liegt dabei eine Richtung (bei uns die x-Richtung) komplett auf jedem einzelnen Prozessor; die Raum-Zeit-Punkte der anderen Richtungen werden dagegen über das ganze Prozessor-Gitter verteilt. Nächste-Nachbar-Kommunikation ist zwischen den Prozessoren in einer solchen Weise möglich, als ob die Prozessor-Einheiten in einem 3-dimensionalen Torus angeordnet wären; d.h die Prozessoren der untersten Ebene sind z.B. kommunikationsmäßig denen ganz oben direkt benachbart.

Von der Hardware her besteht der hier verwendete Rechner QH2 aus 256 Prozessor-Einheiten mit jeweils 16 Mb Arbeitsspeicher, 50 MFlops Prozessor-Rechenleistung (insgesamt 12.5 GFlops Rechner-Höchstleistung) und einer Nächste-Nachbar-Komunikationsgeschwindigkeit von 12.5 Mb/s. Die Rechengenauigkeit ist single precision. Eine zentrale Steuereinheit, Z-CPU genannt, führt alle integer-Rechnungen aus, rechnet Speicheradressen und Adressen im Prozessor-Gitter aus, steuert den synchronen globalen Rechenablauf und ist für die Komunikation nach außen verantwortlich. Das Quadrics-System ist über eine Sun-Workstation nach außen verbunden, d.h. Programme werden hierüber abgeschickt und Ergebnisdaten herausgeschrieben.

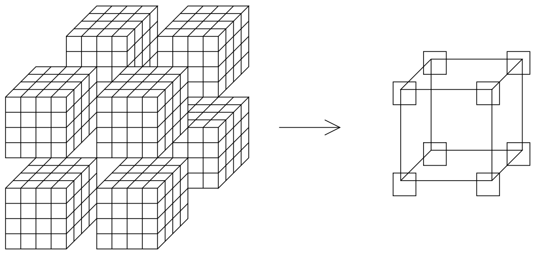

Abbildung 4.4: Abbildung des physikalischen Raum-Zeit-Gitters auf das Prozessor-Gitter der APE-Parallelrechner.

Die Programmiersprache TAO ist eine Kombination aus Fortran und C/C++; der Prä-Prozessor zz erlaubt selbstdefinierte mathematische Objekte zu programmieren. Spezielle integer-Variablen in TAO wie left, right, top, ... erlauben den Zugriff jeder Prozessor-Einheit auf den Speicherraum der Nachbar-Einheit. Arithmetische Operationen zwischen geblockten Daten-Strukturen wie 3x3-SU(3)-Matrizen sind hardware-mäßig optimiert.

Damit ist ein solcher Hochleistungs-Parallelrechner sehr geeignet, Funktional-Integrale der QCD, d.h. hier hadronische Greensfunktionen und Quark-Greensfunktionen wie (4.11) und (4.12) bzw. (4.64) und (4.65) zu berechnen.

Die theoretisch unendliche kontinuierliche Raum-Zeit wird durch ein endliches 4-dimensionales Raum-Zeit-Gitter, das auf ein 3-dimensionales Prozessor-Gitter abgebildet wird, dargestellt. Dabei wählt man periodische Randbedingungen, d.h. z.B. der größte Gitterpunkt in y-Richtung ist dem kleinsten (im allgemeinen der Nullpunkt) benachbart. Die Quark-Propagatoren $G^{ab}_{\alpha\beta}(x;0)$ oder $G^{ab}_{\alpha\beta}(x;p)$, die Eichfelder $U_{ab}(x,\mu)$ und Eichtransformationsfelder $g_{ab}(x)$ werden je nach Raum-Zeit-Punkt x den Prozessor-Einheiten zugeordnet ($a,b = 1,2,3$ sind Farbindizes, $\alpha,\beta = 1,2,3,4$ Spinindizes, $\mu = 1,2,3,4$ ist ein Lorentzindex und p ein Vierer-Impuls). Die einzelnen Algorithmen für die Eichfeld-

Generierung, zur Lösung von Dirac-Gleichungen und für die Eichfixierung laufen dann lokal für sich auf den Prozessor-Einheiten ab, wenn innere Punkte x der zugeteilten Raum-Zeit-Untergitter berechnet werden, erfordern jedoch Informationsaustausch zwischen benachbarten Prozessoren, wenn Randpunkte x der Raum-Zeit-Untergitter behandelt werden.

Kapitel 5

Renormierung im Raum-Zeit-Kontinuum

5.1 Quark Greensfunktionen in der Kontinuums-Störungstheorie

Die Wirkung der QCD mit Eichfixierungs- und Geisttermen ist im euklidischen Kontinuum:[1]

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \quad \Big[\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu} + \frac{1}{2\xi}\sum_a(\partial_\mu A^a_\mu)^2 - \\ &- \quad \overline{u}^a\partial_\mu(\partial_\mu\delta_{ab} - gf_{abc}A^c_\mu)u^b + \overline{\psi}(\gamma_\mu D_\mu + m)\psi\Big] \end{aligned} \tag{5.1}$$

mit

$$D_\mu = \partial_\mu - igT_aA^a_\mu, \qquad [T_a, T_b] = if_{abc}T_c$$

und

$$F^a_{\mu\nu} \quad = \quad \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf_{abc}A^b_\mu A^c_\nu$$

Betrachte im folgenden die zusammengesetzten Operatoren

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^{(s)}_{\mu_1\ldots\mu_n} &= \overline{\psi}(\gamma_{\mu_1}\gamma_5^s D_{\mu_2}\ldots D_{\mu_n})\psi \qquad\qquad \text{mit} \quad s = 0,1 \\ &= \overline{\psi}(\gamma_{\mu_1}\gamma_5^s\partial_{\mu_2}\ldots\partial_{\mu_n})\psi - ig\sum_{j=2}^{n}\overline{\psi}(\gamma_{\mu_1}\gamma_5^s\partial_{\mu_2}\ldots T_aA^a_{\mu_j}\ldots\partial_{\mu_n})\psi \\ &+ \quad O(g^2) \end{aligned} \tag{5.2}$$

[1]Es gilt: $D_\mu \equiv \overleftrightarrow{D}_\mu = \overrightarrow{D}_\mu - \overleftarrow{D}_\mu$. **Anmerkung:** Abschnitt 5.1 kann übersprungen werden.

In den folgenden beiden Abschnitten werden nun 2-pt und 3-pt Quark-Greensfunktionen über dimensionale Regularisierung in 1-Schleifen-Näherung im Kontinuum mit beliebiger kovarianter Eichung (Feynman-Eichung: $\xi = 1$, Landau-Eichung: $\xi = 0$) berechnet [23]:

$$\langle \psi_{\alpha i}(x)\overline{\psi}_{\beta j}(y)\rangle = \frac{1}{Z}\int DAD\overline{\psi}D\psi D\overline{u}Du \quad \psi_{\alpha i}(x)\overline{\psi}_{\beta j}(y)e^{-S} \tag{5.3}$$

$$\langle \psi_{\alpha i}(x)\mathcal{O}^{(s)}_{\mu_1\ldots\mu_n}(z)\overline{\psi}_{\beta j}(y)\rangle = \frac{1}{Z}\int DAD\overline{\psi}D\psi D\overline{u}Du \quad \psi_{\alpha i}(x)\mathcal{O}^{(s)}_{\mu_1\ldots\mu_n}(z)\overline{\psi}_{\beta j}(y)e^{-S} \tag{5.4}$$

mit

$$Z = \int DAD\overline{\psi}D\psi D\overline{u}Du \quad e^{-S}$$

Die Grundelemente sind dabei die freien Propagatoren; für den freien Quark-Propagator mit color- und spin-Indizes i, j bzw. α, β gilt:

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{\alpha i}(x)\overline{\psi}_{\beta j}(y)\rangle_0 &= \frac{\int D\overline{\psi}D\psi\psi_{\alpha i}(x)\overline{\psi}_{\beta j}(y) \quad e^{-\int d^4z\overline{\psi}_{\delta l}(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi_{\delta l}}}{\int D\overline{\psi}D\psi \quad e^{-\int d^4z\overline{\psi}_{\delta l}(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi_{\delta l}}} \\
&= \delta_{ij}S_F(x-y)_{\alpha\beta} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \quad e^{ip(x-y)}\tilde{S}_{\alpha\beta}(p)\delta_{ij} \\
&\quad \text{mit} \quad \tilde{S}_{\alpha\beta}(p) = \frac{1}{i\not{p}+m} = \frac{-i\not{p}+m}{p^2+m}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Für den freien Gluon-Propagator mit color- und Lorentz-Indizes a, b bzw. μ, ν gilt:

$$\begin{aligned}
\langle A^a_\mu(x)A^b_\nu(y)\rangle_0 &= \frac{\int DAA^a_\mu(x)A^b_\nu(y) \quad e^{-\frac{1}{2}\int d^4zA^a_\mu(-\delta_{\mu\nu}\partial^2+\partial_\mu\partial_\nu-\frac{1}{\xi}\partial_\mu\partial_\nu)A^a_\nu}}{\int DA \quad e^{-\frac{1}{2}\int d^4zA^a_\mu(-\delta_{\mu\nu}\partial^2+\partial_\mu\partial_\nu-\frac{1}{\xi}\partial_\mu\partial_\nu)A^a_\nu}} \\
&= \delta^{ab}G_{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \quad e^{ip(x-y)}\tilde{G}_{\mu\nu}(p)\delta^{ab} \\
&\quad \text{mit} \quad \tilde{G}_{\mu\nu}(p) = \frac{1}{p^2}(\delta_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{p_\mu p_\nu}{p^2})
\end{aligned} \tag{5.6}$$

5.1.1 Der Quark-Propagator

Für den Fermion-Propagator (5.3) gilt, wenn Wechselwirkungsterme, die keinen Beitrag in der 1-Schleifen-Näherung liefern, weggelassen werden:

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{\alpha i}(x)\overline{\psi}_{\beta j}(y)\rangle &= \frac{1}{Z}\int DAD\overline{\psi}D\psi D\overline{u}Du \quad \psi_{\alpha i}(x)\overline{\psi}_{\beta j}(y)e^{-S} \\
&= \frac{1}{Z}\int DAD\overline{\psi}D\psi D\overline{u}Du \quad \psi_{\alpha i}(x)\overline{\psi}_{\beta j}(y)\cdot
\end{aligned}$$

$$\cdot\Big[1 + ig\int d^4x'\overline{\psi}(x')\gamma_\mu T_a A^a_\mu(x')\psi(x') - \frac{g^2}{2}\Big(\int d^4x'\overline{\psi}(x')\gamma_\mu T_a A^a_\mu(x')\psi(x')\Big)^2 + \ldots\Big]e^{-S_0}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{Z}\int DAD\overline{\psi}D\psi D\overline{u}Du \quad \psi_{\alpha i}(x)\overline{\psi}_{\beta j}(y)\cdot \\
&\quad \cdot\Big[1-\frac{g^2}{2}\int d^4x'd^4y'\Big(\overline{\psi}_{\gamma i'}(x')(\gamma_\mu)_{\gamma\delta}(T_a)_{i'j'}A^a_\mu(x')\psi_{\delta j'}(x')\Big)\cdot \\
&\qquad\qquad \cdot\Big(\overline{\psi}_{\gamma' i''}(x')(\gamma_\nu)_{\gamma'\delta'}(T_b)_{i''j''}A^b_\mu(x')\psi_{\delta' j''}(x')\Big)+\ldots\Big]e^{-S_0} \qquad (5.7)
\end{aligned}
$$

mit

$$
S_0 = \frac{1}{2}\int d^4z \quad \Big(A^a_\mu(-\delta_{\mu\nu}\partial^2+\partial_\mu\partial_\nu-\frac{1}{\xi}\partial_\mu\partial_\nu)A^a_\nu \quad + \quad \overline{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi\Big)
$$

Die Auswertung der Funktional-Integrale in (5.7) führt auf folgende Gleichungskette, wobei nichtzusammenhängende Beiträge weggelassen werden:

$$
\begin{aligned}
&= S_F(x-y)_{\alpha\beta}\delta_{ij}-\frac{g^2}{2}\int d^4x'd^4y' \quad (\gamma_\mu)_{\gamma\delta}(\gamma_\nu)_{\gamma'\delta'}(T_a)_{i'j'}(T_b)_{i''j''}\cdot \\
&\quad \cdot\delta^{ab}G_{\mu\nu}(x'-y')\Big[S_F(x-x')_{\alpha\gamma}\delta_{ii'}S_F(x'-y')_{\delta\gamma'}\delta_{j'i''}S_F(y'-y)_{\delta'\beta}\delta_{j''j}+ \\
&\qquad\qquad +S_F(x-y')_{\alpha'\gamma'}\delta_{ii''}S_F(y'-x')_{\delta'\gamma}\delta_{j''i'}S_F(x'-y)_{\delta\beta}\delta_{j'j}\Big]+\ldots \\
&= S_F(x-y)_{\alpha\beta}\delta_{ij}-\frac{g^2}{2}\int d^4x'd^4y' \quad \cdot \\
&\quad \cdot G_{\mu\nu}(x'-y')\Big[\Big(S_F(x-x')\gamma_\mu S_F(x'-y')\gamma_\nu S_F(y'-y)\Big)_{\alpha\beta}(T_aT_a)_{ij}+ \\
&\qquad\qquad +\Big(S_F(x-y')\gamma_\nu S_F(y'-x')\gamma_\mu S_F(x'-y)\Big)_{\alpha\beta}(T_aT_a)_{ij}\Big]+\ldots \\
&= S_F(x-y)_{\alpha\beta}\delta_{ij}-g^2(T_aT_a)_{ij}\int d^4x'd^4y' \quad \cdot \\
&\quad \cdot G_{\mu\nu}(x'-y')\Big(S_F(x-x')\gamma_\mu S_F(x'-y')\gamma_\nu S_F(y'-y)\Big)_{\alpha\beta}+\ldots \qquad (5.8)
\end{aligned}
$$

Mit $(T_aT_a)_{ij} = C_F\delta_{ij}$ ($C_F = 4/3$) und der Fourierdarstellung der freien Propagatoren $S_F(x-y)$ und $G_{\mu\nu}(x-y)$ (siehe (5.5), (5.6)) erhält man:

$$
\begin{aligned}
&= \delta_{ij}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4} \quad e^{ip(x-y)}\tilde{S}_{\alpha\beta}(p)- \\
&\quad -g^2C_F\delta_{ij}\int d^4x'd^4y' \quad \int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p'}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p''}{(2\pi)^4}\cdot \\
&\quad \cdot\tilde{G}_{\mu\nu}(q)\Big(\tilde{S}(p)\gamma_\mu\tilde{S}(p')\gamma_\nu\tilde{S}(p'')\Big)_{\alpha\beta}e^{iq(x'-y')}e^{ip(x-x')+ip'(x'-y')+ip''(y'-y)}+\ldots \\
&= \delta_{ij}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4} \quad e^{ip(x-y)}\tilde{S}_{\alpha\beta}(p)- \\
&\quad -g^2C_F\delta_{ij} \quad \int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p'}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p''}{(2\pi)^4}e^{ipx-ip''y}\cdot \\
&\quad \cdot\tilde{G}_{\mu\nu}(q)\Big(\tilde{S}(p)\gamma_\mu\tilde{S}(p')\gamma_\nu\tilde{S}(p'')\Big)_{\alpha\beta}(2\pi)^4\delta(q-p+p')(2\pi)^4\delta(-q-p'+p'')+\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \delta_{ij} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \quad e^{ip(x-y)} \tilde{S}_{\alpha\beta}(p) - \\
&-g^2 C_F \delta_{ij} \quad \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} \tilde{G}_{\mu\nu}(q) \Big(\tilde{S}(p) \gamma_\mu \tilde{S}(p-q) \gamma_\nu \tilde{S}(p) \Big)_{\alpha\beta} + \dots
\end{aligned}
$$

Dieses Ergebnis gibt man allgemein in der folgenden Form an:

$$
\langle \psi_{\alpha i}(x) \overline{\psi}_{\beta j}(y) \rangle \quad = \quad \delta_{ij} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \quad e^{ip(x-y)} \Big\{ \tilde{S}_{\alpha\beta}(p) - \Big(\tilde{S}(p) \sum(p) \tilde{S}(p) \Big)_{\alpha\beta} \Big\} + \dots \tag{5.9}
$$

mit der Selbstenergiegröße

$$
\sum(p) \quad = \quad g^2 C_F \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{G}_{\mu\nu}(q) \gamma_\mu \tilde{S}(p-q) \gamma_\nu + \dots \tag{5.10}
$$

In der Fourierdarstellung gilt dann:

$$
\langle \psi_{\alpha i}(p) \overline{\psi}_{\beta j}(p) \rangle \quad = \quad \delta_{ij} \Big\{ \tilde{S}_{\alpha\beta}(p) - \Big(\tilde{S}(p) \sum(p) \tilde{S}(p) \Big)_{\alpha\beta} \Big\} + \dots \tag{5.11}
$$

Dimensionale Regularisierung ($D = 4 - \varepsilon, g^2 \rightarrow g^2 \mu^\varepsilon$) für die masselose QCD ($m = 0$, siehe (5.5), (5.6)) ergibt für die Selbstenergie:

$$
\begin{aligned}
\sum(p) \quad &= \quad g^2 \mu^\varepsilon C_F \int \frac{d^Dq}{(2\pi)^D} \tilde{G}_{\mu\nu}(q) \gamma_\mu \tilde{S}(p-q) \gamma_\nu + \dots \\
&= \quad g^2 \mu^\varepsilon C_F \int \frac{d^Dq}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^2} \Big(\delta_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \Big) \gamma_\mu (-i) \frac{\not{p} - \not{q}}{(p-q)^2} \gamma_\nu + \dots \\
&= \quad \dots \quad (\text{Anhang A}) \\
&= -i \frac{g^2}{16\pi^2} C_F \not{p} (-\xi) \Big(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E - ln \frac{p^2}{4\pi\mu^2} + 1 + O(\varepsilon) \Big) + \dots
\end{aligned} \tag{5.12}
$$

Für den Quark-Propagator erhält man also in der 1-Schleifen-Näherung aus (5.11) und (5.12) im Fourierraum das Ergebnis:

$$
\begin{aligned}
\langle \psi_{\alpha i}(p) \overline{\psi}_{\beta j}(p) \rangle \quad &= \quad \delta_{ij} \Big\{ (-i) \frac{\not{p}}{p^2} - (-i) \frac{\not{p}}{p^2} \sum(p) (-i) \frac{\not{p}}{p^2} \Big\} + \dots \\
&= -i \delta_{ij} \frac{\not{p}}{p^2} \Big[1 - \frac{g^2}{16\pi^2} C_F \xi \Big(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E - ln \frac{p^2}{4\pi\mu^2} + 1 + O(\varepsilon) \Big) \Big] + \dots
\end{aligned} \tag{5.13}
$$

5.1.2 3-pt Quark-Greensfunktionen mit Operator

Die Berechnung der 3-pt Quark-Greensfunktionen (5.4) verläuft entsprechend zu der des Quark-Propagators im vorigen Abschnitt. Berechne für $s = 0, 1$:

$$
\langle \psi_{\alpha i}(x) \mathcal{O}^{(s)}_{\mu_1 \dots \mu_n}(z) \overline{\psi}_{\beta j}(y) \rangle \quad = \quad \frac{1}{Z} \int DAD\overline{\psi} D\psi D\overline{u} Du \quad \psi_{\alpha i}(x) \mathcal{O}^{(s)}_{\mu_1 \dots \mu_n}(z) \overline{\psi}_{\beta j}(y) e^{-S}
$$

Setzt man für $\mathcal{O}^{(s)}_{\mu_1\ldots\mu_n}(z)$ und e^{-S} Entwicklungen in g ein, bekommt man:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{Z}\int DAD\overline{\psi}D\psi D\overline{u}Du\,\cdot\\
&\cdot\psi_{\alpha i}(x)\Big[\overline{\psi}_{\alpha' k}(z)(\gamma_{\mu_1}\gamma_5^s)_{\alpha'\beta'}\partial^z_{\mu_2}\ldots\partial^z_{\mu_n}\psi_{\beta' k}(z) -\\
&\quad -ig\sum_{j'=2}^{n}\overline{\psi}_{\alpha' k}(z)(\gamma_{\mu_1}\gamma_5^s)_{\alpha'\beta'}\partial^z_{\mu_2}\ldots(T_a)_{kl}A^a_{\mu_{j'}}(z)\ldots\partial^z_{\mu_n}\psi_{\beta' l}(z) + \quad O(g^2)\Big]\overline{\psi}_{\beta j}(y)\cdot e^{-S}\\
&= \frac{1}{Z}\int DAD\overline{\psi}D\psi D\overline{u}Du\,\cdot\\
&\cdot\psi_{\alpha i}(x)\Big[\overline{\psi}_{\alpha' k}(z)(\gamma_{\mu_1}\gamma_5^s)_{\alpha'\beta'}\partial^z_{\mu_2}\ldots\partial^z_{\mu_n}\psi_{\beta' k}(z) -\\
&\quad -ig\sum_{j'=2}^{n}\overline{\psi}_{\alpha' k}(z)(\gamma_{\mu_1}\gamma_5^s)_{\alpha'\beta'}\partial^z_{\mu_2}\ldots(T_a)_{kl}A^a_{\mu_{j'}}(z)\ldots\partial^z_{\mu_n}\psi_{\beta' l}(z) + \quad O(g^2)\Big]\overline{\psi}_{\beta j}(y)\,\cdot\\
&\quad\cdot\Big[1 + ig\int d^4x'\overline{\psi}(x')\gamma_\mu T_a A^a_\mu(x')\psi(x') - \frac{g^2}{2}\Big(\int d^4x'\overline{\psi}(x')\gamma_\mu T_a A^a_\mu(x')\psi(x')\Big)^2 + \ldots\Big]e^{-S_0}
\end{aligned}
$$

mit

$$
S_0 = \frac{1}{2}\int d^4z \quad \Big(A^a_\mu(-\delta_{\mu\nu}\partial^2 + \partial_\mu\partial_\nu - \frac{1}{\xi}\partial_\mu\partial_\nu)A^a_\nu \quad + \quad \overline{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu + m)\psi\Big)
$$

Die weitere Auswertung führt schließlich für zusammenhängende Beiträge ohne Selbstenergiekorrekturen an äußeren Beinen zu:

$$
\begin{aligned}
\langle\psi_{\alpha i}(x)\mathcal{O}^{(s)}_{\mu_1\ldots\mu_n}(z)\overline{\psi}_{\beta j}(y)\rangle \;&=\; \delta_{ij}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\quad e^{ipx+i(q-p)z-iqy}\,\cdot\\
&\quad\cdot\tilde{S}_{\alpha\alpha'}(p)i^{n-1}\Big(\Gamma^{(s)}_{\mu_1\ldots\mu_n}(p,q)\Big)_{\alpha'\beta'}\tilde{S}_{\beta'\beta}(q) + \ldots \qquad (5.14)
\end{aligned}
$$

mit der Vertexfunktion

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{(s)}_{\mu_1\ldots\mu_n}(p,q) \;&=\; \gamma_{\mu_1}\gamma_5^s q_{\mu_2}\ldots q_{\mu_n} -\\
&-g^2C_F\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\gamma_\mu\tilde{S}(k)\gamma_{\mu_1}\gamma_5^s\tilde{S}(q-p+k)\gamma_\nu\tilde{G}_{\mu\nu}(p-k)(q-p+k)_{\mu_2}\ldots(q-p+k)_{\mu_n} -\\
&-g^2C_F\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\gamma_{\mu_1}\gamma_5^s\tilde{S}(k)\gamma_\mu\sum_{r=2}^{n}\tilde{G}_{\mu_r\mu}(q-k)q_{\mu_2}\ldots q_{\mu_{r-1}}k_{\mu_{r+1}}\ldots k_{\mu_n} -\\
&-g^2C_F\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\gamma_\mu\tilde{S}(k)\gamma_{\mu_1}\gamma_5^s\sum_{r=2}^{n}\tilde{G}_{\mu_r\mu}(k-p)(k-p+q)_{\mu_2}\ldots(k-p+q)_{\mu_{r-1}}q_{\mu_{r+1}}\ldots q_{\mu_n}\\
&+\ldots \qquad (5.15)
\end{aligned}
$$

Zur weiteren Berechnung kann die Vertexfunktion (über eine Zerlegung des freien Gluon-Propagators $\tilde{G}_{\mu\nu}(p)$, (5.6)) in der folgenden Form geschrieben werden:

$$
\Gamma^{(s)}_{\mu_1\ldots\mu_n}(p,q) \;=\; \Gamma^{(s)}_{\mu_1\ldots\mu_n}(p,q)\Big|_{\xi=1} - (1-\xi)\hat{\Gamma}^{(s)}_{\mu_1\ldots\mu_n}(p,q) \qquad (5.16)
$$

Ein allgemeines (implizites) Ergebnis für ein beliebiges n erhält man, indem man einen (komplexen) Vektor Δ mit $\Delta^2 = 0$ einführt und die beiden Ausdrücke

$$\Delta_{\nu_1} \dots \Delta_{\nu_n} \Gamma^{(s)}_{\nu_1 \dots \nu_n}(p,q)\Big|_{\xi=0} \quad \text{und} \quad \Delta_{\nu_1} \dots \Delta_{\nu_n} \hat{\Gamma}^{(s)}_{\nu_1 \dots \nu_n}(p,q)$$

berechnet und zu $\Delta_{\nu_1} \dots \Delta_{\nu_n} \Gamma^{(s)}_{\nu_1 \dots \nu_n}(p,q)$ zusammensetzt. Vereinfachend wird zuerst der Fall $s = 0$ berechnet und daraus $s = 1$ für ein antikommutierendes γ_5 abgeleitet. Dimensionale Regularisierung ($D = 4 - \varepsilon, g^2 \to g^2 \mu^\varepsilon$) für die masselose QCD ($m = 0$, siehe (5.5), (5.6)) ergibt dann schließlich für den hier interessierenden Fall $q = p$:

$$\begin{aligned}
\Delta_{\nu_1} \dots \Delta_{\nu_n} \Gamma^{(s)}_{\nu_1 \dots \nu_n}(p,p) \;=\; & \not{\Delta}\ \gamma_5^s (\Delta p)^{n-1} + \frac{g^2}{16\pi^2} C_F \cdot \not{\Delta}\ \gamma_5^s (\Delta p)^{n-1} \cdot \\
& \cdot \Big[\Big(\frac{2}{n(n+1)} - 4 \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} - 1 + \xi \Big) \cdot \Big(\frac{2}{\varepsilon} - ln \frac{p^2}{4\pi\mu^2} - \gamma_E + O(\varepsilon) \Big) + \frac{2}{n(n+1)} \cdot \\
& \cdot \Big(-3 - S_{n-1} + 2S_{n+1} \Big) + \frac{2}{n+1} - 4 \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} (2S_j - S_{j-1}) - (1-\xi)(1 - S_{n-1}) \Big] + \\
& + \frac{g^2}{16\pi^2} C_F \cdot (\Delta p)^n \frac{\not{p}\gamma_5^s}{p^2} \cdot \Big[-\frac{4}{n+1} + (1-\xi)\frac{2}{n} \Big] \quad + O(g^4)
\end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\text{mit} \quad S_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$$

Durch passende Differentiation nach $\Delta_{\mu_1} \dots \Delta_{\mu_n}$ kann man nun aus diesem Summenausdruck (über doppelte Indizes wird summiert) in den Lorentz-Indizes symmetrische und spurfreie Linearkombinationen

$$\Gamma^{(s)}_{\mu_1 \dots \mu_n}(p) \;=\; \Gamma^{(s)}_{\{\mu_1 \dots \mu_n\}}(p,p) - \text{Spuren}$$

konstruieren.[2] Auf diese Weise betrachtet man den symmetrischen und spurfreien Anteil der Operatoren $\overline{\psi}(\gamma_{\mu_1} \gamma_5^s D_{\mu_2} \dots D_{\mu_n})\psi$:

$$\overline{\psi}(\gamma_{\{\mu_1} \gamma_5^s D_{\mu_2} \dots D_{\mu_n\}})\psi - \text{Spuren.}$$

Somit erhält man für die dimensional regularisierte Vertexfunktion eines symmetrisierten und spurlos gemachten zusammengesetzten Operators $\overline{\psi}(\gamma_{\mu_1} \gamma_5^s D_{\mu_2} \dots D_{\mu_n})\psi$ mit antikommutierendem γ_5 und $s = 0, 1$, wobei der Impuls, der in den Operator hineinfließt, null ist, und die Vertexfunktion im Fourierraum dann allein vom Fermionimpuls p abhängt:

$$\Gamma^{(s)}_{\mu_1 \dots \mu_n}(p) \;=\; \Gamma^{Born}_{\mu_1 \dots \mu_n}(p) + g^2 \Big[\Big(\tilde{\gamma} \cdot ln \frac{p^2}{\mu^2} + d(\varepsilon) \Big) \Gamma^{Born}_{\mu_1 \dots \mu_n}(p) + f_{\mu_1 \dots \mu_n}(p) \Big] + O(g^4) \tag{5.18}$$

[2] Alle nicht-symmetrischen Anteile und Spuren ($\Delta^2 = 0$) werden in (5.17) verschluckt.

mit

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{Born}_{\mu_1\ldots\mu_n}(p) &= \Big(\gamma_{\{\mu_1}p_{\mu_2}\ldots p_{\mu_n\}} - \text{Spuren}\Big)\gamma_5^s \\
\tilde{\gamma} &= \frac{C_F}{16\pi^2}\Big(-\frac{2}{n(n+1)} + 4\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j} + 1 - \xi\Big) \\
d(\varepsilon) &= \frac{C_F}{16\pi^2}\Big[\Big(\frac{2}{n(n+1)} - 4\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j} - 1 + \xi\Big)\Big(\frac{2}{\varepsilon} + ln(4\pi) - \gamma_E + O(\varepsilon)\Big) + \frac{2}{n(n+1)}\cdot \\
&\quad \cdot\Big(-3 - S_{n-1} + 2S_{n+1}\Big) + \frac{2}{n+1} - 4\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}(2S_j - S_{j-1}) - (1-\xi)(1-S_{n-1})\Big] \\
f_{\mu_1\ldots\mu_n}(p) &= \frac{\not{p}}{p^2}\gamma_5^s\Big(p_{\mu_1}\ldots p_{\mu_n} - \text{Spuren}\Big)\frac{C_F}{16\pi^2}\Big(-\frac{4}{n+1} + (1-\xi)\frac{2}{n}\Big)
\end{aligned}
$$

Wegen $O(\varepsilon) \to 0$ für $\varepsilon \to 0$, wird $O(\varepsilon)$ im folgenden wegegelassen.

5.2 Renormierungs-Schemata wie MOM, MS, $\overline{MS}$

Dimensional regularisierte Größen:

Es werden im folgenden Vertexfunktionen zusammengesetzter Operatoren $\mathcal{O}$ wie z.B.

$$
\begin{array}{rl}
 & \overline{\psi}I\psi, \quad \overline{\psi}\gamma_5\psi, \quad \overline{\psi}\gamma_\mu\psi, \quad \overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi, \\
\text{und} & \overline{\psi}(\gamma_{\mu_1}D_{\mu_2}\ldots D_{\mu_n})\psi, \quad \overline{\psi}(\gamma_{\mu_1}\gamma_5 D_{\mu_2}\ldots D_{\mu_n})\psi
\end{array}
$$

mit zwei äußeren (Quark-) Beinen in der QCD betrachtet. Die Operatoren werden als multiplikativ renormierbar vorausgesetzt, seien also im Falle der Operatoren der OPE in den Lorentz-Indizes symmetrisiert und spurfrei. Der Impuls, der in den Operator hineinfließt, sei null, so daß die Vertexfunktionen im Fourierraum nur von dem Quark-Impuls p abhängen.

Für eine dimensional regularisierte Vertexfunktion liefert die Kontinuums-Störungstheorie dann allgemein (siehe z.B. (5.18)) bis auf Terme, die für $\varepsilon \to 0$ verschwinden:

$$
\Gamma^D(p,\mu,g,\varepsilon) = \Gamma^{Born}(p) + g^2\Big[\Big(\tilde{\gamma}\cdot ln\frac{p^2}{\mu^2} + d(\varepsilon)\Big)\Gamma^{Born}(p) + f(p)\Big] + O(g^4) \quad (5.19)
$$

(Dirac- und gegebenenfalls Lorentz-Indizes sind nicht explizit angegeben worden, g ist die Kopplungskonstante, μ, ε sind Parameter der dimensionalen Regularisierung, $D = 4 - \varepsilon$ ist die Raum-Zeit-Dimension).

Der dimensional regularisierte inverse Quark-Propagator (ohne Masse) hat nach (5.13) wiederum bis auf Terme, die für $\varepsilon \to 0$ verschwinden, die folgende Struktur:

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\alpha i}(p)\overline{\psi}_{\beta j}(p)\rangle^{-1} &\equiv \delta_{ij} i S^{-1}(p) \\ \text{mit} \quad S^{-1}(p) &= \not{p} + g^2\Big(\gamma_F \cdot ln\frac{p^2}{\mu^2} + d_F(\varepsilon)\Big)\not{p} + O(g^4), \end{aligned} \tag{5.20}$$

wobei in einer allgemeinen kovarianten Eichung (Feynman-Eichung: $\xi = 1$, Landau-Eichung: $\xi = 0$) mit einem freien Gluon-Propagator der Form (5.6) gilt:

$$\begin{aligned} \gamma_F &= -\frac{1}{16\pi^2} C_F \xi, \\ d_F(\varepsilon) &= \frac{1}{16\pi^2} C_F \xi \Big(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + ln(4\pi) + 1\Big). \end{aligned}$$

Renormierte Größen:

Die renormierte Vertexfunktion und der renormierte inverse Propagator seien dann mit $\Gamma^D(p,\mu,g,\varepsilon)$ aus (5.19) und $S^{-1}(p,\mu,g,\varepsilon) = S^{-1}(p)$ aus (5.20):[3]

$$\Gamma^R(p,\mu,g) = Z_{\mathcal{O}} Z_\psi \cdot \Gamma^D(p,\mu,g,\varepsilon) \tag{5.21}$$

$$(S^R)^{-1}(p,\mu,g) = Z_\psi \cdot S^{-1}(p,\mu,g,\varepsilon) \tag{5.22}$$

(Wenn man nur bis zur Ordnung g^2 rechnet, kann man hier die renormierte Kopplungskonstante g_R mit der nackten g gleichsetzen. Die Renormierungsskala μ_R in den renormierten Größen auf der linken Seite wird hier mit der Regularisierungsskala μ auf der rechten Seite identifiziert: $\mu_R = \mu$.)

Renormierungs-Bedingungen:

• ***MOM* -Schema** (momentum space subtraction scheme):
Die Renormierungskonstanten werden so gewählt, daß im renormierten (inversen) Quark-Propagator bzw. in der renormierten Vertexfunktion der Koeffizient des Born-Terms für $p^2 = \mu^2$ gleich 1 ist. Insofern:

$$(S^R)^{-1}(p) \equiv \not{p}\Big|_{p^2=\mu^2}, \qquad \Gamma^R(p) \equiv \Gamma^{Born}(p)\Big|_{p^2=\mu^2}. \tag{5.23}$$

• ***MOM* -Schema durch Projektion:**
In numerischen Simulationen kann man nicht wie in der Störungstheorie allein den Born-Term einer renormierten Größe herausgreifen und den Koeffizienten gleich 1 setzen. Man hat ein numerisches Gesamtergebnis aller Terme und kann lediglich auf den Born-Term

[3] Allgemeine Renormierungs-Konvention ist: $\mathcal{O}^R = Z_{\mathcal{O}}\mathcal{O}$, $\psi^R = Z_\psi^{-1/2}\psi$. In den numerischen Simulationen haben wir davon abweichend $\psi^R = Z_\psi^{1/2}\psi$ gesetzt, was natürlich keine Rolle spielt, wenn man jeweils konsistent ist.

projizieren und damit geeignete Renormierungsbedingungen zur Festlegung der Renormierungskonstanten aufstellen. Mit geeigneten Projektionen P_1, P_2 und Spurbildung im *color* $\times$ *spin* Raum (bzw. nur *spin* Raum wegen (5.14) und (5.20)) fordert man:

$$TrP_1 \cdot (S^R)^{-1}(p) = TrP_1 \cdot \not{p}\Big|_{p^2=\mu^2}, \qquad TrP_2 \cdot \Gamma^R(p) = TrP_2 \cdot \Gamma^{Born}(p)\Big|_{p^2=\mu^2}. \quad (5.24)$$

• $\boldsymbol{MS}$ **- und** $\boldsymbol{\overline{MS}}$ **-Schema** (minimal subtraction bzw. modified minimal subtraction scheme):
Die Renormierungskonstanten werden so definiert, daß im renormierten (inversen) Quark-Propagator bzw. in der renormierten Vertexfunktion allein die Singularitäten (bei dimensionaler Regularisierung: $\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon^2}, \ldots$) entfernt werden. Im $\overline{MS}$-Schema werden zusätzlich durch die Regularisierung auftretende künstliche Konstanten entfernt.

5.2.1 Renormierung der Quark-Wellenfunktion

• $\boldsymbol{MOM}$ **-Schema:**
Setze für die Renormierungskonstante der Quark-Wellenfunktion für $p^2 = \mu^2$:

$$\begin{aligned} Z_\psi &= 1 - g^2 d_F(\varepsilon) + O(g^4) \\ \Rightarrow \quad (S^R)^{-1}(p) &= Z_\psi \cdot \Big[\not{p} + g^2\Big(\gamma_F \cdot ln\frac{p^2}{\mu^2} + d_F(\varepsilon)\Big)\not{p} + O(g^4)\Big] \\ &= \not{p} \cdot \Big[1 + g^2\gamma_F \cdot ln\frac{p^2}{\mu^2} + O(g^4)\Big] \end{aligned} \quad (5.25)$$

• $\boldsymbol{MOM}$ **-Schema durch Projektion:**
Mit dem Projektor $P_1 = \not{p}/p^2$ in (5.24) folgt bis zur Ordnung g^2 ebenfalls für $p^2 = \mu^2$:

$$Z_\psi = 1 - g^2 d_F(\varepsilon) + O(g^4) \quad (5.26)$$

• $\boldsymbol{MS}$ **- und** $\boldsymbol{\overline{MS}}$ **-Schema:**
Setze für die Renormierungskonstante der Quark-Wellenfunktion für $p^2 = \mu^2$:

$$\begin{aligned} Z_\psi^* &= 1 + g^2(d_F(\varepsilon^*) - d_F(\varepsilon)) + O(g^4) \\ \text{mit} \quad \varepsilon^* &= \infty \qquad \text{für} \quad MS \\ \text{mit} \quad \varepsilon^* &= \frac{2}{\gamma_E - ln(4\pi)} \qquad \text{für} \quad \overline{MS} \\ \Rightarrow \quad (S^R)^{-1}(p) &= Z_\psi^* \cdot \Big[\not{p} + g^2\Big(\gamma_F \cdot ln\frac{p^2}{\mu^2} + d_F(\varepsilon)\Big)\not{p} + O(g^4)\Big] \\ &= \not{p} \cdot \Big[1 + g^2\Big(\gamma_F \cdot ln\frac{p^2}{\mu^2} + d_F(\varepsilon^*)\Big) + O(g^4)\Big] \end{aligned} \quad (5.27)$$

5.2.2 Renormierung der Vertexfunktionen

• ***MOM* -Schema:**
Setze für $p^2 = \mu^2$:

$$\begin{aligned}
Z_1 Z_\psi &= 1 - g^2 d(\varepsilon) + O(g^4), \\
\text{d.h.} \quad Z_1 &= 1 + g^2(d_F(\varepsilon) - d(\varepsilon)) + O(g^4) \\
\Rightarrow \quad {}^1\Gamma^R(p) &= Z_1 Z_\psi \cdot \Big\{ \Gamma^{Born}(p) + g^2 \Big[(\tilde{\gamma} \cdot ln \frac{p^2}{\mu^2} + d(\varepsilon)) \Gamma^{Born}(p) + f(p) \Big] + O(g^4) \Big\} \\
&= \Gamma^{Born}(p) + g^2 \Big[\tilde{\gamma} \cdot ln \frac{p^2}{\mu^2} \Gamma^{Born}(p) + f(p) \Big] + O(g^4) \qquad (5.28)
\end{aligned}$$

• ***MOM* -Schema durch Projektion:**
In **Schema A** fordern wir mit einer Dirac-Matrix M und für bestimmte Impulse p mit $p^2 = \mu^2$:

$$\begin{aligned}
Tr\Big(M \cdot S^R(p) \Gamma^R(p) S^R(p) \Big) &= Tr\Big(M \cdot S^R(p) \Gamma^{Born}(p) S^R(p) \Big) \\
\text{d.h.} \quad Z_2 Z_\psi \cdot Tr\Big(M \cdot S(p) \Gamma^D(p) S(p) \Big) &= Tr\Big(M \cdot S(p) \Gamma^{Born}(p) S(p) \Big) \qquad (5.29)
\end{aligned}$$

($\Gamma^D(p)$ ist die dimensional regularisierte Vertexfunktion (5.19) und $S(p)$ der dimensional regularisierte Quark-Propagator aus (5.20).) Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}
Z_2 Z_\psi &= 1 - g^2 d(\varepsilon) - g^2 \frac{Tr(M \cdot \not{p} f(p) \not{p})}{Tr(M \cdot \not{p} \Gamma^{Born}(p) \not{p})} + O(g^4) \Big|_{p^2=\mu^2}, \\
\text{d.h.} \quad Z_2 &= 1 + g^2(d_F(\varepsilon) - d(\varepsilon)) - g^2 \frac{Tr(M \cdot \not{p} f(p) \not{p})}{Tr(M \cdot \not{p} \Gamma^{Born}(p) \not{p})} + O(g^4) \Big|_{p^2=\mu^2} \\
\Rightarrow \quad {}^2\Gamma^R(p) &= Z_2 Z_\psi \cdot \Big\{ \Gamma^{Born}(p) + g^2 \Big[(\tilde{\gamma} \cdot ln \frac{p^2}{\mu^2} + d(\varepsilon)) \Gamma^{Born}(p) + f(p) \Big] + O(g^4) \Big\} \\
&= \Gamma^{Born}(p) + g^2 \Big[\tilde{\gamma} \cdot ln \frac{p^2}{\mu^2} \Gamma^{Born}(p) + f(p) - \frac{Tr(M \cdot \not{p} f(p) \not{p})}{Tr(M \cdot \not{p} \Gamma^{Born}(p) \not{p})} \Big] \\
&\quad + \; O(g^4) \qquad (5.30)
\end{aligned}$$

In **Schema B** fordern wir für bestimmte Impulse p mit $p^2 = \mu^2$:

$$\begin{aligned}
Tr\Big((\Gamma^{Born})^{-1}(p) \cdot \Gamma^R(p) \Big) &= Tr\Big((\Gamma^{Born})^{-1}(p) \cdot \Gamma^{Born}(p) \Big) \\
\text{d.h.} \quad Z_3 Z_\psi \cdot Tr\Big((\Gamma^{Born})^{-1}(p) \cdot \Gamma^D(p) \Big) &= 4 \qquad (5.31)
\end{aligned}$$

($\Gamma^D(p)$ ist wiederum die dimensional regularisierte Vertexfunktion (5.19); die Zahl 4 entsteht durch Spurbildung im *spin*-Raum.)

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}
Z_3 Z_\psi &= 1 - g^2 d(\varepsilon) - g^2 \frac{1}{12} \cdot Tr\Big(f(p)(\Gamma^{Born})^{-1}(p)\Big) + O(g^4)\Big|_{p^2=\mu^2}, \\
\text{d.h.} \qquad Z_3 &= 1 + g^2(d_F(\varepsilon) - d(\varepsilon)) - g^2 \frac{1}{4} \cdot Tr\Big(f(p)(\Gamma^{Born})^{-1}(p)\Big) + O(g^4)\Big|_{p^2=\mu^2} \\
\Rightarrow \qquad {}^3\Gamma^R(p) &= Z_3 Z_\psi \cdot \Big\{\Gamma^{Born}(p) + g^2\Big[(\tilde{\gamma} \cdot ln\frac{p^2}{\mu^2} + d(\varepsilon))\Gamma^{Born}(p) + f(p)\Big] + O(g^4)\Big\} \\
&= \Gamma^{Born}(p) + g^2\Big[\tilde{\gamma} \cdot ln\frac{p^2}{\mu^2}\Gamma^{Born}(p) + f(p) - \frac{1}{4} \cdot Tr\Big(f(p)(\Gamma^{Born})^{-1}(p)\Big)\Big] \\
&+ \quad O(g^4) \qquad (5.32)
\end{aligned}$$

• ***MS* - und $\overline{\boldsymbol{MS}}$ -Schema:**
Setze für $p^2 = \mu^2$:

$$\begin{aligned}
Z^* Z_\psi^* &= 1 + g^2\Big(d(\varepsilon^*) - d(\varepsilon)\Big) + O(g^4), \\
\text{d.h.} \qquad Z^* &= 1 + g^2\Big(d(\varepsilon^*) - d(\varepsilon) - d_F(\varepsilon^*) + d_F(\varepsilon)\Big) + O(g^4) \\
\text{mit} \qquad \varepsilon^* &= \infty \qquad \text{für } MS \\
\text{mit} \qquad \varepsilon^* &= \frac{2}{\gamma_E - ln(4\pi)} \qquad \text{für } \overline{MS} \\
\Rightarrow \qquad {}^*\Gamma^R(p) &= Z^* Z_\psi^* \cdot \Big\{\Gamma^{Born}(p) + g^2\Big[(\tilde{\gamma} \cdot ln\frac{p^2}{\mu^2} + d(\varepsilon))\Gamma^{Born}(p) + f(p)\Big] + O(g^4)\Big\} \\
&= \Gamma^{Born}(p) + g^2\Big[\Big(\tilde{\gamma} \cdot ln\frac{p^2}{\mu^2} + d(\varepsilon^*)\Big)\Gamma^{Born}(p) + f(p)\Big] + O(g^4) \qquad (5.33)
\end{aligned}$$

5.3 Umrechnung zwischen Schemata

Im vorhergehenden Abschnitt wurden drei Renormierungs-Schemata vom Typ MOM und die Standard-Schemata der Hochenergiephysik MS und $\overline{MS}$ in der Kontinuums-Störungstheorie (dimensionale Regularisierung) berechnet; die renormierten Vertexfunktionen sind:

$$\begin{aligned}
{}^i\Gamma^R(p,\mu,g) &= Z_i Z_\psi \cdot \Gamma^D(p,\mu,g,\varepsilon), \qquad MOM : i = 1,2,3 \\
{}^*\Gamma^R(p,\mu,g) &= Z^* Z_\psi^* \cdot \Gamma^D(p,\mu,g,\varepsilon), \qquad MS, \overline{MS}
\end{aligned}$$

(Bis zur störungstheoretischen Ordnung g^2 gilt, daß die nach irgendeinem Schema renormierte Kopplungskonstante gleich der nackten ist: $g_R = g$. Die Renormierungsskala μ in den renormierten Größen auf der linken Seite wird hier mit der Regularisierungsskala μ auf der rechten Seite identifiziert.)

Daraus folgen unmittelbar (von der Regularisierung unabhängige) Umrechnungsformeln von MOM $(i = 1, 2, 3)$ zu den Schemata MS und $\overline{MS}(*)$:

$$ {}^{*}\Gamma^R(p,\mu,g) \;=\; (Z^* Z_i^{-1}) \cdot (Z_\psi^* Z_\psi^{-1}) \cdot \;\; {}^{i}\Gamma^R(p,\mu,g) \tag{5.34}$$

Betrachtet man stattdessen $\mathcal{O}^R = Z_\mathcal{O}\mathcal{O}$, so bekommt man für die Operator-Renormierungskonstanten, hier für das $\overline{MS}$-Schema geschrieben (entsprechend für MS):

$$ Z_\mathcal{O}^{\overline{MS}} \;=\; X_{MOM}^{\overline{MS}} \cdot \;\; Z_\mathcal{O}^{MOM} \qquad \text{mit} \quad X_{MOM}^{\overline{MS}} = (Z^* Z_i^{-1}) \tag{5.35}$$

Dabei ist nach (5.20) und (5.25) - (5.27):

$$\begin{aligned} Z_\psi^* Z_\psi^{-1} &= 1 + g^2 d_F(\varepsilon^*) + O(g^4), \\ d_F(\varepsilon^*) &= \frac{1}{16\pi^2} C_F \xi \Big(\frac{2}{\varepsilon^*} - \gamma_E + ln(4\pi) + 1 \Big) \\ \varepsilon^* &= \frac{2}{\gamma_E - ln(4\pi)} \qquad \text{für} \quad \overline{MS} \end{aligned} \tag{5.36}$$

und es ist nach (5.28), (5.30), (5.32), (5.33):

$$ Z^* Z_1^{-1} \;=\; 1 + g^2 \Big(d(\varepsilon^*) - d_F(\varepsilon^*) \Big) + O(g^4) \tag{5.37}$$

$$ Z^* Z_2^{-1} \;=\; 1 + g^2 \Big[d(\varepsilon^*) - d_F(\varepsilon^*) - g^2 \frac{Tr(M \cdot \not p f(p) \not p)}{Tr(M \cdot \not p \Gamma^{Born}(p) \not p)} \Big]_{p^2=\mu^2} + O(g^4) \tag{5.38}$$

$$ Z^* Z_3^{-1} \;=\; 1 + g^2 \Big[d(\varepsilon^*) - d_F(\varepsilon^*)) - g^2 \frac{1}{4} \cdot Tr\Big(f(p) (\Gamma^{Born})^{-1}(p) \Big) \Big]_{p^2=\mu^2} + O(g^4) \tag{5.39}$$

5.3.1 Schema-Wechsel für lokale Operatoren

Für die dimensional regularisierten Vertexfunktionen der lokalen Operatoren

$$ \overline{\psi} I \psi, \quad \overline{\psi}\gamma_5\psi, \quad \overline{\psi}\gamma_\mu\psi, \quad \overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi, $$

ergeben sich in 1-Schleifen-Näherung der Kontinuums-Störungstheorie die in der folgenden Tabelle aufgeführten Daten, wobei im weiteren wegen $O(\varepsilon) \to 0$ für $\varepsilon \to 0$ Terme der Ordnung $O(\varepsilon)$ weggelassen werden.

	$\overline{\psi} I \psi$	$\overline{\psi}\gamma_5\psi$	$\overline{\psi}\gamma_\mu\psi$	$\overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$
Γ^{Born}	I	γ_5	γ_μ	$\gamma_\mu\gamma_5$
$\tilde{\gamma}$	$\frac{C_F}{16\pi^2}(-3-\xi)$		$\frac{C_F}{16\pi^2}(-\xi)$	
$d(\varepsilon)$	$\frac{C_F}{16\pi^2}\Big[(3+\xi)\Big(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + ln(4\pi)\Big) + 4 + 2\varepsilon\Big]$		$\frac{C_F}{16\pi^2}\xi\Big(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + ln(4\pi) + 1\Big)$	
$f(p)$	0	0	$\frac{C_F}{16\pi^2}\frac{\not p}{p^2}p_\mu(-2\xi)$	$\frac{C_F}{16\pi^2}\frac{\not p}{p^2}p_\mu\gamma_5(-2\xi)$

wobei (5.19) gilt:

$$\Gamma^D(p,\mu,g,\varepsilon) \;=\; \Gamma^{Born}(p) + g^2\Big[\Big(\tilde{\gamma}\cdot ln\frac{p^2}{\mu^2} + d(\varepsilon)\Big)\Gamma^{Born}(p) + f(p)\Big] + O(g^4)$$

Über (5.36) - (5.39) folgen so im allgemeinen für jedes MOM-Schema verschiedene Umrechnungsformeln $X_{MOM}^{\overline{MS}}$. In der Landau-Eichung, $\xi = 0$, gibt es für die obigen 3 MOM-Schemata nur einen einzigen, besonders einfachen Umrechnungsausdruck:

$$X_{MOM}^{\overline{MS}} \;=\; 1 + \frac{g^2}{16\pi^2}C_F 4 + O(g^4) \qquad \text{für} \quad \overline{\psi}I\psi, \overline{\psi}\gamma_5\psi \tag{5.40}$$

$$X_{MOM}^{\overline{MS}} \;=\; 1 + O(g^4) \qquad \text{für} \quad \overline{\psi}\gamma_\mu\psi, \overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi. \tag{5.41}$$

Im Falle der skalaren und pseudo-skalaren Operatoren $\overline{\psi}I\psi$ und $\overline{\psi}\gamma_5\psi$ wurden in [24] 2-Schleifen-Näherungen in der Kontinuums-Störungstheorie berechnet.

Für $X_{MOM}^{\overline{MS}}$ (Schema B bzw. $i = 3$) findet man dort in der Landau-Eichung (für 3 color- und n_f flavor-Zustände):

$$X_{MOM}^{\overline{MS}} \;=\; 1 + \frac{g^2}{16\pi^2}C_F 4 + \Big(177.48452 - \frac{83}{9}n_f\Big)\Big(\frac{g^2}{16\pi^2}\Big)^2 + O(g^6). \tag{5.42}$$

5.3.2 Schema-Wechsel für Operatoren der OPE

Die dimensional regularisierten Vertexfunktionen der Operatoren der OPE

$$\overline{\psi}\Big(\gamma_{\{\mu_1}\gamma_5^s D_{\mu_2}\dots D_{\mu_n\}}\Big)\psi - \text{Spuren} \qquad \text{mit} \quad s = 0,1$$

(symmetrisiert in den Lorentz-Indizes $= \{\mu_1 \dots \mu_n\}$ und spurlos gemacht) sind in der 1-Schleifen-Näherung der Kontinuums-Störungstheorie in Gleichung (5.18) gegeben und erlauben die Angabe allgemeiner Ergebnisse (5.35) für die Umrechnung der 3 MOM-Schemata $i = 1, 2, 3$ nach $\overline{MS}$ (MS).

In dieser Arbeit von Interesse sind jedoch nur die MOM-Schemata $i=2$ (Schema A) und $i=3$ (Schema B), die Landau-Eichung ($\xi=0$) und bestimmte Operatoren:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{a_0} &= \overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi \\
\mathcal{O}_{v_{2,a}} &= \overline{\psi}\tfrac{1}{2}\Big(\gamma_1 D_4+\gamma_4 D_1\Big)\psi \\
\mathcal{O}_{r_{2,a}} &= \overline{\psi}\tfrac{1}{2}\Big(\gamma_1 D_4+\gamma_4 D_1\Big)\gamma_5\psi \\
\mathcal{O}_{a_1} &= \overline{\psi}\tfrac{1}{2}\Big(\gamma_2 D_4+\gamma_4 D_2\Big)\gamma_5\psi \\
\mathcal{O}_{v_{2,b}} &= \overline{\psi}\Big(\gamma_4 D_4-\tfrac{1}{3}\gamma_1 D_1-\tfrac{1}{3}\gamma_2 D_2-\tfrac{1}{3}\gamma_3 D_3\Big)\psi \\
\mathcal{O}_{r_{2,b}} &= \overline{\psi}\Big(\gamma_4 D_4-\tfrac{1}{3}\gamma_1 D_1-\tfrac{1}{3}\gamma_2 D_2-\tfrac{1}{3}\gamma_3 D_3\Big)\gamma_5\psi \\
\mathcal{O}_{v_3} &= \overline{\psi}\Big(\gamma_{\{1}D_1 D_{4\}}-\tfrac{1}{2}\gamma_{\{2}D_2 D_{4\}}-\tfrac{1}{2}\gamma_{\{3}D_3 D_{4\}}\Big)\psi \\
\mathcal{O}_{r_3} &= \overline{\psi}\Big(\gamma_{\{1}D_1 D_{4\}}-\tfrac{1}{2}\gamma_{\{2}D_2 D_{4\}}-\tfrac{1}{2}\gamma_{\{3}D_3 D_{4\}}\Big)\gamma_5\psi \\
\mathcal{O}_{a_2} &= \overline{\psi}\gamma_{\{2}D_1 D_{4\}}\gamma_5\psi \\
\mathcal{O}_{v_4} &= \overline{\psi}\Big(\gamma_{\{1}D_1 D_4 D_{4\}}+\gamma_{\{2}D_2 D_3 D_{3\}}-\gamma_{\{1}D_1 D_3 D_{3\}}-\gamma_{\{2}D_2 D_4 D_{4\}}\Big)\psi. \qquad (5.43)
\end{aligned}$$

Die Operatoren auf der linken Seite sind mit den Bezeichnungen der dazugehörigen reduzierten Matrixelemente indiziert und nach der Anzahl der Ableitungen geordnet. Hierfür sollen Ergebnisse für die Umrechnung zu $\overline{MS}$ mit $\varepsilon^*=\frac{2}{\gamma_E-ln(4\pi)}$ (entsprechend MS mit $\varepsilon^*=\infty$) angegeben werden:

Schema A (i=2):
Mit der besonders einfachen „Projektionsmatrix" M und der Abkürzung Q_μ

$$M=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, \qquad Q_\mu=\frac{1}{4}Tr\Big(M\not{p}\gamma_\mu\not{p}\Big),$$

erhält man:

$\mathcal{O}_{a_0}$:

$$X_{MOM}^{\overline{MS}}=1+O(g^4)$$

$\mathcal{O}_{v_{2,a}},\mathcal{O}_{r_{2,a}}$:

$$X_{MOM}^{\overline{MS}}=1+\frac{g^2}{16\pi^2}C_F\Big[-\frac{8}{3}\Big(\frac{2}{\varepsilon^*}+ln(4\pi)-\gamma_E\Big)-\frac{31}{9}-\frac{\frac{1}{3}(-ip_3+p_4)p_1p_4}{\frac{1}{2}(Q_1p_4+Q_4p_1)}\Big]+O(g^4)$$

$\mathcal{O}_{a_1}$:

$$X_{MOM}^{\overline{MS}}=1+\frac{g^2}{16\pi^2}C_F\Big[-\frac{8}{3}\Big(\frac{2}{\varepsilon^*}+ln(4\pi)-\gamma_E\Big)-\frac{31}{9}-\frac{\frac{1}{3}(-ip_3+p_4)p_2p_4}{\frac{1}{2}(Q_2p_4+Q_4p_2)}\Big]+O(g^4)$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{O}_{v_{2,b}}, \mathcal{O}_{r_{2,b}}: \\
&X_{MOM}^{\overline{MS}} = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} C_F \Big[-\frac{8}{3}\Big(\frac{2}{\varepsilon^*} + ln(4\pi) - \gamma_E\Big) - \frac{31}{9} - \\
&\qquad -\tfrac{1}{3}(-ip_3 + p_4)\frac{p_4^2 - \frac{1}{3}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)}{Q_4 p_4 - \frac{1}{3}(Q_1 p_1 + Q_2 p_2 + Q_3 p_3)}\Big] + O(g^4) \\
&\mathcal{O}_{v_3}, \mathcal{O}_{r_3}: \\
&X_{MOM}^{\overline{MS}} = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} C_F \Big[-\frac{25}{6}\Big(\frac{2}{\varepsilon^*} + ln(4\pi) - \gamma_E\Big) - \frac{107}{18} - \\
&\qquad -\tfrac{1}{3}(-ip_3 + p_4)\frac{p_1^2 p_4 - \frac{1}{2}(p_2^2 p_4 + p_3^2 p_4)}{\frac{1}{3}(2Q_1 p_1 p_4 + Q_4 p_1^2) - \frac{1}{6}(2Q_2 p_2 p_4 + Q_4 p_2^2) - \frac{1}{6}(2Q_3 p_3 p_4 + Q_4 p_3^2)}\Big] + \\
&\qquad + \quad O(g^4) \\
&\mathcal{O}_{a_2}: \\
&X_{MOM}^{\overline{MS}} = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} C_F \Big[-\frac{25}{6}\Big(\frac{2}{\varepsilon^*} + ln(4\pi) - \gamma_E\Big) - \frac{107}{18} - \\
&\qquad -\tfrac{1}{3}(-ip_3 + p_4)\frac{p_1^2 p_4 - \frac{1}{2}(p_2^2 p_4 + p_3^2 p_4)}{\frac{1}{3}Q_2 p_1 p_4 + \frac{1}{3}Q_1 p_2 p_4 + \frac{1}{3}Q_4 p_1 p_2}\Big] + O(g^4) \\
&\mathcal{O}_{v_4}: \\
&X_{MOM}^{\overline{MS}} = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} C_F \Big[-\frac{157}{30}\Big(\frac{2}{\varepsilon^*} + ln(4\pi) - \gamma_E\Big) - \frac{3607}{450} - \\
&-\frac{\frac{3}{10}(-ip_3 + p_4)(p_1^2 p_4^2 + p_2^2 p_3^2 - p_1^2 p_3^2 - p_2^2 p_4^2)}{\frac{1}{2}(Q_1 p_1 p_4^2 + Q_4 p_4 p_1^2) + \frac{1}{2}(Q_2 p_2 p_3^2 + Q_3 p_3 p_2^2) - \frac{1}{2}(Q_1 p_1 p_3^2 + Q_3 p_3 p_1^2) - \frac{1}{2}(Q_2 p_2 p_4^2 + Q_4 p_4 p_2^2)}\Big] + \\
&\qquad + \quad O(g^4)
\end{aligned}
\tag{5.44}
$$

Schema B (i=3):
Man bekommt hier:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{O}_{a_0}: \\
&X_{MOM}^{\overline{MS}} = 1 + O(g^4) \\
&\mathcal{O}_{v_{2,a}}, \mathcal{O}_{r_{2,a}}: \\
&X_{MOM}^{\overline{MS}} = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} C_F \Big[-\frac{8}{3}\Big(\frac{2}{\varepsilon^*} + ln(4\pi) - \gamma_E\Big) - \frac{31}{9} - \frac{4}{3}\frac{1}{p^2}\frac{p_1^2 p_4^2}{p_1^2 + p_4^2}\Big] + O(g^4) \\
&\mathcal{O}_{a_1}: \\
&X_{MOM}^{\overline{MS}} = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} C_F \Big[-\frac{8}{3}\Big(\frac{2}{\varepsilon^*} + ln(4\pi) - \gamma_E\Big) - \frac{31}{9} - \frac{4}{3}\frac{1}{p^2}\frac{p_2^2 p_4^2}{p_2^2 + p_4^2}\Big] + O(g^4)
\end{aligned}
$$

$\mathcal{O}_{v_{2,b}}, \mathcal{O}_{r_{2,b}}$:

$$X_{MOM}^{\overline{MS}} = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} C_F \Big[-\frac{8}{3}\Big(\frac{2}{\varepsilon^*} + ln(4\pi) - \gamma_E\Big) - \frac{31}{9} - \\ -\frac{1}{3}\frac{1}{p^2}\frac{p_4^2 - \frac{1}{3}(p_1^2+p_2^2+p_3^2)}{p_4^2 + \frac{1}{9}(p_1^2+p_2^2+p_3^2)}\Big] + O(g^4)$$

$\mathcal{O}_{v_3}, \mathcal{O}_{r_3}$:

$$X_{MOM}^{\overline{MS}} = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} C_F \Big[-\frac{25}{6}\Big(\frac{2}{\varepsilon^*} + ln(4\pi) - \gamma_E\Big) - \frac{107}{18} - \\ -3\frac{p_4^2}{p^2}\frac{(p_1^2 - \frac{1}{2}p_2^2 - \frac{1}{2}p_3^2)^2}{(4p_1^2+p_2^2+p_3^2)p_4^2 + (p_1^2 - \frac{1}{2}p_2^2 - \frac{1}{2}p_3^2)^2}\Big] + O(g^4)$$

$\mathcal{O}_{a_2}$:

$$X_{MOM}^{\overline{MS}} = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} C_F \Big[-\frac{25}{6}\Big(\frac{2}{\varepsilon^*} + ln(4\pi) - \gamma_E\Big) - \frac{107}{18} - \\ -3\frac{1}{p^2}\frac{p_1^2 p_2^2 p_4^2}{p_1^2p_4^2 + p_2^2p_4^2 + p_1^2p_2^2}\Big] + O(g^4)$$

$\mathcal{O}_{v_4}$:

$$X_{MOM}^{\overline{MS}} = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} C_F \Big[-\frac{157}{30}\Big(\frac{2}{\varepsilon^*} + ln(4\pi) - \gamma_E\Big) - \frac{3607}{450} - \\ -\frac{6}{5}\frac{1}{p^2}\frac{(p_1^2+p_2^2)^2(p_4^2-p_3^2)^2}{(p_1^2+p_2^2)(p_4^2-p_3^2)^2 + (p_3^2+p_4^2)(p_2^2-p_1^2)^2}\Big] + O(g^4) \tag{5.45}$$

5.4 Umrechnung zwischen Renormierungsskalen

Eine andere Möglichkeit, das Renormierungsschema zu wechseln, ist, z.B. im $\overline{MS}$-Schema zu bleiben, aber die Renormierungsskala μ_R zu ändern. Die Physik muß von dieser Skala unabhängig sein und führt so zu Differentialgleichungen für das Änderungsverhalten mit μ_R für die Theorie-Parameter (in der masselosen Theorie nur g) und die Wellenfunktions- und Operator-Renormierungskonstanten Z_ψ bzw. $Z_\mathcal{O}$. Genauso wie zur Umrechnung zwischen Renormierungsschemata startet man z.B. für Vertexfunktionen mit

$$\begin{aligned} {}^*\Gamma^R(p,\mu_2,g(\mu_2)) &= Z^*(\mu_2,\mu,\varepsilon)Z_\psi^*(\mu_2,\mu,\varepsilon)\cdot\Gamma^D(p,\mu,g,\varepsilon) \\ {}^*\Gamma^R(p,\mu_1,g(\mu_1)) &= Z^*(\mu_1,\mu,\varepsilon)Z_\psi^*(\mu_1,\mu,\varepsilon)\cdot\Gamma^D(p,\mu,g,\varepsilon), \end{aligned}$$

wobei hier zwischen Renormierungsskala μ_2 bzw. μ_1 und Regularisierungsskala μ unterschieden wird. Die Renormierungskonstanten hängen dann explizit von beiden ab.[4] Man

[4]Die MS-/$\overline{MS}$-Ergebnisse (5.27) und (5.33), für die die Renormierungsskala μ_R und die Regularisierungsskala μ zur Einfachheit identifiziert wurden, müssen dazu verallgemeinert werden. Man findet: setze bei MS: $\varepsilon^* = \frac{2}{ln(\mu^2/\mu_R^2)}$; und bei $\overline{MS}$: $\varepsilon^* = \frac{2}{\gamma_E - ln(4\pi) + ln(\mu^2/\mu_R^2)}$.

folgert wiederum unmittelbar, wobei zur besseren Übersicht bei den Renormierungskonstanten nur die Abhängigkeit von der jeweiligen Renormierungsskala angegeben wird:

$$\Gamma^R(p,\mu_2,g(\mu_2)) \;=\; (Z^*(\mu_2)Z^{*,-1}(\mu_1))\cdot(Z^*_\psi(\mu_2)Z^{*,-1}_\psi(\mu_1))\cdot \quad \Gamma^R(p,\mu_1,g(\mu_1)) \quad (5.46)$$

Für die Operator-Renormierungskonstanten $Z^{\overline{MS}}_{\mathcal{O}}$ (betrachte hier $\mathcal{O}^R = Z_{\mathcal{O}}\mathcal{O}$ und entferne dann $\mathcal{O}$) gilt entsprechend:

$$Z^{\overline{MS}}_{\mathcal{O}}(\mu_2) \;=\; (Z^*(\mu_2)Z^{*,-1}(\mu_1))\cdot \quad Z^{\overline{MS}}_{\mathcal{O}}(\mu_1). \quad (5.47)$$

Dabei seien Z^*_ψ und Z^* aus (5.27) bzw. (5.33) unter Beachtung der Fußnote auf S.74 mit der Kopplungskonstanten $g = g(\mu)$ im $\overline{MS}$-Schema (siehe (5.51) ff).

Wählt man μ_2 und μ_1 infintesimal benachbart, findet man dazugehörige Differentialgleichungen (Renormierungsgruppen-Gleichungen). So ergibt sich z.B. für die Operator-Renormierungskonstanten:

$$\mu\frac{d}{d\mu}Z^{\overline{MS}}_{\mathcal{O}}(\mu) \;=\; -\gamma(g(\mu))Z^{\overline{MS}}_{\mathcal{O}}(\mu) \quad (5.48)$$

mit der sogenannten anomalen Dimension

$$\begin{aligned}\gamma(g(\mu)) &= -\mu\cdot Z^{*,-1}(\mu)\frac{d}{d\mu}Z^*(\mu)\\ &= \gamma_0\left(\frac{g^2(\mu)}{16\pi^2}\right)+\gamma_1\left(\frac{g^2(\mu)}{16\pi^2}\right)^2+\dots \end{aligned} \quad (5.49)$$

Dabei entnehme man γ_0 und γ_1 der folgenden Tabelle (hier $n_f = 0$) [25, 26]:

	$\overline{\psi}I\psi$	$\overline{\psi}\gamma_5\psi$	$\overline{\psi}\gamma_\mu\psi$	$\overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$	
γ_0	-8	-8	0	0	
γ_1	-134.67	-134.67	0.00	0.00	
	$\mathcal{O}_{a_0}$	$\mathcal{O}_{v_{2,a}}$	$\mathcal{O}_{r_{2,a}}$	$\mathcal{O}_{a_1}$	$\mathcal{O}_{v_{2,b}}$
γ_0	0	64/9	64/9	64/9	64/9
γ_1	0.00	96.69	96.69	96.69	96.69
	$\mathcal{O}_{r_{2,b}}$	$\mathcal{O}_{v_3}$	$\mathcal{O}_{r_3}$	$\mathcal{O}_{a_2}$	$\mathcal{O}_{v_4}$
γ_0	64/9	100/9	100/9	100/9	628/45
γ_1	96.69	141.78	141.78	141.78	172.58

Die allgemeine Lösung der Renormierungsgruppen-Gleichung ist:

$$R_{\mathcal{O}}(\mu,\mu_0) := \frac{Z^{\overline{MS}}_{\mathcal{O}}(\mu)}{Z^{\overline{MS}}_{\mathcal{O}}(\mu_0)} = \exp\left\{-\int_{\mu_0}^{\mu} d\mu'\,\frac{\gamma(g(\mu'))}{\mu'}\right\}. \quad (5.50)$$

Für die renormierte Kopplungskonstante $g(\mu) = Z_g(\mu)^{-1} g_0$ (hier im $\overline{MS}$-Schema mit der unrenormierten Kopplungskonstanten g_0) führen die gleichen Überlegungen zu:

$$\mu \frac{d}{d\mu} g(\mu) \quad = \quad \beta(g(\mu)) \tag{5.51}$$

mit der β-Funktion

$$\beta(g(\mu)) \quad = \quad -\beta_0 \left(\frac{g^2(\mu)}{16\pi^2} \right) g(\mu) - \beta_1 \left(\frac{g^2(\mu)}{16\pi^2} \right)^2 g(\mu) + \ldots \tag{5.52}$$

Dabei ist

$$\beta_0 = 11 - \frac{2}{3} n_f \, , \, \beta_1 = 102 - \frac{38}{3} n_f \, . \tag{5.53}$$

(n_f ist die Anzahl der *flavour*-Zustände.) Die allgemeine Lösung läßt sich wie bei der Renormierungskonstanten $Z_{\mathcal{O}}$ angeben, wird aber meistens nur in eine Reihendarstellung aufgelöst mit einem experimentell fixierten Λ-Parameter gegeben.

Mit diesen Teil-Ergebnissen ergibt sich für den Skalen-Umrechnungsfaktor $R_{\mathcal{O}}(\mu, \mu_0)$ in 1- bis 3-Schleifen-Näherungen in $g(\mu)$ explizit:

- In 1-Schleifen-Näherung in $g(\mu)$:

$$R_{\mathcal{O}}(\mu, \mu_0) = \left(\frac{g^2(\mu)}{g^2(\mu_0)} \right)^{\frac{\gamma_0}{2\beta_0}} \tag{5.54}$$

mit der laufenden Kopplungskonstanten

$$\frac{g^2(\mu)}{16\pi^2} = \frac{1}{\beta_0 \ln(\mu^2/\Lambda^2)}. \tag{5.55}$$

- In 2-Schleifen-Näherung in $g(\mu)$:

$$R_{\mathcal{O}}(\mu, \mu_0) = \left(\frac{g^2(\mu)}{g^2(\mu_0)} \right)^{\frac{\gamma_0}{2\beta_0}} \left(\frac{1 + \frac{\beta_1}{\beta_0} \frac{g^2(\mu)}{16\pi^2}}{1 + \frac{\beta_1}{\beta_0} \frac{g^2(\mu_0)}{16\pi^2}} \right)^{\frac{1}{2}((\gamma_1/\beta_1) - (\gamma_0/\beta_0))} \tag{5.56}$$

mit der laufenden Kopplungskonstanten

$$\frac{g^2(\mu)}{16\pi^2} = \frac{1}{\beta_0 \ln(\mu^2/\Lambda^2)} - \frac{\beta_1}{\beta_0^3} \frac{\ln \ln(\mu^2/\Lambda^2)}{\ln^2(\mu^2/\Lambda^2)} + \cdots. \tag{5.57}$$

- Im Falle der skalaren und pseudo-skalaren Operatoren $\overline{\psi}I\psi$ und $\overline{\psi}\gamma_5\psi$ existieren 3-Schleifen-Näherungen [27, 28, 29]:

$$\begin{aligned}
\beta_2 &= \frac{2857}{2} - \frac{5033}{18} n_f + \frac{325}{54} n_f^2 , \\
\gamma_1 &= -\frac{404}{3} + \frac{40}{9} n_f , \\
\gamma_2 &= -2498 + \left(\frac{4432}{27} + \frac{320}{3}\zeta_3 \right) n_f + \frac{280}{81} n_f^2
\end{aligned} \tag{5.58}$$

mit $\zeta_3 \approx 1.2020569032$.

Neu [30] und für diese Arbeit interessant sind die 3-Schleifen-Näherungen für die Operatoren der Operator-Produkt-Entwicklung $\mathcal{O}_{v_{2,a}}$, $\mathcal{O}_{v_{2,b}}$, $\mathcal{O}_{a_1}$, $\mathcal{O}_{r_{2,a}}$ und $\mathcal{O}_{r_{2,b}}$:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= 84.03 - (n_f - 2) \cdot 6.33 , \\
\gamma_2 &= 2 \cdot \left(859.45 - 133.44 \cdot n_f - 1.23 \cdot n_f^2 \right)
\end{aligned} \tag{5.59}$$

(Allerdings existieren für diese Operatoren die zur Umrechnung ins $\overline{MS}$-Schema notwendigen Daten in der Landau-Eichung z.Z. nicht [31].)

Hier ist das Ergebnis für $R_{\mathcal{O}}$:

$$R_{\mathcal{O}}(\mu, \mu_0) = \frac{\exp F\left(\frac{g^2(\mu)}{16\pi^2}\right)}{\exp F\left(\frac{g^2(\mu_0)}{16\pi^2}\right)} \tag{5.60}$$

mit der Funktion

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{\gamma_0}{2\beta_0} \ln x + \frac{\beta_0\gamma_2 - \beta_2\gamma_0}{4\beta_0\beta_2} \ln\left(\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2\right) \\
&\quad + \frac{2\beta_0\beta_2\gamma_1 - \beta_1\beta_2\gamma_0 - \beta_0\beta_1\gamma_2}{2\beta_0\beta_2\sqrt{4\beta_0\beta_2 - \beta_1^2}} \arctan\left(\frac{\beta_1 + 2\beta_2 x}{\sqrt{4\beta_0\beta_2 - \beta_1^2}} \right)
\end{aligned} \tag{5.61}$$

und mit der laufenden Kopplungskonstanten

$$\begin{aligned}
\frac{g^2(\mu)}{16\pi^2} &= \frac{1}{\beta_0 \ln(\mu^2/\Lambda^2)} - \frac{\beta_1}{\beta_0^3} \frac{\ln\ln(\mu^2/\Lambda^2)}{\ln^2(\mu^2/\Lambda^2)} + \frac{1}{\beta_0^5 \ln^3(\mu^2/\Lambda^2)} \cdot \\
&\quad \cdot \left(\beta_1^2 \ln^2 \ln(\mu^2/\Lambda^2) - \beta_1^2 \ln\ln(\mu^2/\Lambda^2) + \beta_2\beta_0 - \beta_1^2 \right) + \cdots .
\end{aligned} \tag{5.62}$$

Kapitel 6

Renormierung auf dem Gitter

6.1 Die Methode

Zur Renormierung von Proton Greensfunktionen mit Operatoren werden in diesem Abschnitt Renormierungskonstanten für bilineare Quark Operatoren nicht-störungstheoretisch berechnet. Hierzu werden Renormierungsbedingungen analog zur Kontinuums-Störungstheorie an off-shell Quark Greensfunktionen, die numerisch auf dem Gitter über Monte-Carlo Simulationen ausgerechnet werden, gestellt [32].

Die untersuchte Methode bietet die Möglichkeit, nicht-störungstheoretische Beiträge und alle Ordnungen der QCD Störungstheorie auf relativ simple Art und Weise zu berücksichtigen, im Gegensatz zu dem großen Aufwand auch nur niedrige Ordnungen mit störungstheoretischen Methoden zu bekommen. Die Nachteile dieser numerischen Renormierung sind zum einen der notwendige Einsatz von Höchstleistungs-Parallelrechnern und zum anderen die gegenwärtig noch vorhandenen theoretischen Unsicherheiten aufgrund der sogenannten quenched Näherung (die Quark-Schleifen Beiträge wegläßt), durch Diskretisierungsfehler und aufgrund der Eichfixierung (Gribov-Kopie Problem auf dem Gitter).

Die Renormierungsmethode ist ein MOM-Schema, das das Raum-Zeit Gitter als Regulator benutzt mit dem Gitterpunktabstand a als cut-off oder Abschneide-Parameter. Gitter-Operatoren $\mathcal{O}(a)$ und Quark-Felder $q(a)$ werden also so renormiert, daß sie nur noch von einer Renormierungsskala μ abhängen:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^R(\mu) &= Z_{\mathcal{O}}((a\mu)^2, g(a))\mathcal{O}(a), \\ q^R(\mu) &= Z_q^{1/2}((a\mu)^2, g(a))q(a) \end{aligned} \tag{6.1}$$

($g(a)$ ist die nackte (starke) Kopplungskonstante.)

Über den Quark Propagator (4.65) und die Quark Greensfunktion mit Operator (4.64)

$$S^{cd}_{\alpha\beta}(p) = \frac{1}{VT}\sum_{x,y} \mathrm{e}^{-ip(x-y)}\langle q^c_\alpha(x)\bar{q}^d_\beta(y)\rangle \tag{6.2}$$

$$C^{(q)cd}_{\alpha\beta}(p) = \frac{1}{VT}\sum_{x,y,z} \mathrm{e}^{-ip(x-y)}\langle q^c_\alpha(x)\mathcal{O}(z)\bar{q}^d_\beta(y)\rangle \tag{6.3}$$

wird die amputierte Vertexfunktion (oder amputierte Greensfunktion) definiert als

$$\Gamma(p) = S^{-1}(p)C^{(q)}(p)S^{-1}(p)\,. \tag{6.4}$$

Die renormierte Vertexfunktion ist dann

$$\Gamma_{\mathrm{R}}(p) = Z_q^{-1} Z_{\mathcal{O}} \Gamma(p) \tag{6.5}$$

Um die Renormierungskonstanten $Z_{\mathcal{O}}$ zu bestimmen (multiplikative Renormierbarkeit der Operatoren vorausgesetzt), stellt man die folgende, mehr symbolische Bedingung[1] auf der Renormierungsskala $p^2 = \mu^2$:

$$\Gamma_R(p) \equiv \Gamma_{Born}(p)\Big|_{p^2=\mu^2}\,. \tag{6.6}$$

Dabei ist die Bornsche Näherung Γ_{Born} (auch Baumgraphen-Näherung) die nullte Ordnung der Störungstheorie auf dem Gitter. Mit Hilfe einer Projektion, wobei die Spur $Tr(P_{\mathcal{O}}\times ...)$ im Farb-Spin Raum genommen wird, ergibt sich

$$Z_q^{-1} Z_{\mathcal{O}} Tr\Big(P_{\mathcal{O}}\times\Gamma(p)\Big) = Tr\Big(P_{\mathcal{O}}\times\Gamma_{Born}(p)\Big)\Big|_{p^2=\mu^2} \tag{6.7}$$

Eine optimale (nicht zwingende) Wahl für den Projektor ist $P_{\mathcal{O}} \sim \Gamma^{-1}_{Born}(p)$. Man erhält dann die allgemein gebräuchliche Bedingungsgleichung:

$$Z_q^{-1} Z_{\mathcal{O}} \tfrac{1}{12} Tr\left(\Gamma_{Born}(p)^{-1}\times\Gamma(p)\right) = 1\Big|_{p^2=\mu^2} \tag{6.8}$$

Z_q bekommt man ganz entsprechend mit einer Renormierungsbedingung für den inversen Quark Propagator; dabei projiziert man auf den Energie-Impuls Teil $\sin(p_\mu a)\gamma_\mu/a$ (im Kontinuum: $\not{p}$) des inversen Propagators und erhält:

[1]Streng genommen ist diese Bedingung nicht erfüllbar.

$$Z_q = Tr\Big[\frac{-i\sum_\lambda \gamma_\lambda \sin(p_\lambda a)}{12\sum_\lambda \sin^2(p_\lambda a)} S^{-1}(p_\lambda a)\Big]_{p^2=\mu^2} \tag{6.9}$$

Anzumerken ist hier, daß die obigen Renormierungsbedingungen entweder aufgrund ihrer Definition oder der Operatoren im allgemeinen nicht kovariant sind. Durch einen Wechsel zu einem kovarianten Renormierungsschema, z.B. $\overline{MS}$ (siehe Abschnitt 5), kann dies allerdings erreicht werden.

So ergeben z.B. solche Operatoren aus (4.34) - (4.45) mit mindestens einer Ableitung eine von der Richtung von p abhängige Spur in der Renormierungsbedingung (6.8). Diese Bedingung verletzt sogar $O(4)$ Kovarianz im Kontinuum, was jedoch durch eine geeignete Summation über die Operatoren der $O(4)$ Multipletts behoben werden kann. Auf dem Gitter geht das nur für die wenigen Operatoren, die zu einem $O(4)$ Multiplett gehören, das außerdem irreduzibel bezüglich der hyperkubischen Gruppe $H(4)$ ist; Renormierungskonstanten für Operatoren verschiedener $H(4)$ Multipletts innerhalb eines $O(4)$ Multipletts sind nämlich im allgemeinen verschieden.

Die Renormierungsskala μ^2 sollte idealerweise die Forderungen

$$1/L^2 \ll \Lambda^2_{\rm QCD} \ll \mu^2 \ll 1/a^2 \tag{6.10}$$

auf dem Gitter mit linearer Ausdehnung L erfüllen. Ob es ein solches Fenster bei den gegebenen numerischen Einstellungen gibt, muß untersucht werden. Bei kleineren Skalen treten komplizierte nicht-störungstheoretische Effekte auf und es werden höhere Ordnungen der Störungstheorie wichtig, z.B. für einen Wechsel des Renormierungsschemas im Kontinuum oder zu einem Vergleich mit der Gitter-Störungstheorie. Höhere Ordnungen der Störungstheorie stehen aber zur Zeit kaum zur Verfügung. Bei größeren Renormierungsskalen können Diskretisierungsfehler die Ergebnisse verfälschen.

Ein Spezialfall: Vektor- und Axialvektor-Strom-Operator

Hier liegt gerade der seltene Fall vor, daß man (auch) auf dem Gitter über alle 4 Raum- und Zeit-Richtungen mitteln darf. Man kann außerdem zwischen longitudinalen und transversalen Komponenten bezüglich des Vierer-Impulses p unterscheiden und so (auf dem Gitter) $O(4)$ kovariante Renormierungsbedingungen stellen, die nur longitudinale oder nur transversale Komponenten enthalten.

Für den Vektor-Strom hat man (im Kontinuum):

$$(Z_q^{\rm long})^{-1} Z_V^{\rm long} \tfrac{1}{12} Tr\left(\sum_\mu \frac{p_\mu}{p^2}\, \not{p} V_\mu(p)\right) = 1\,, \tag{6.11}$$

$$(Z_q^{\rm trans})^{-1} Z_V^{\rm trans} \tfrac{1}{12} Tr\left(\sum_\mu \left(\gamma_\mu - \frac{p_\mu}{p^2}\, \not{p}\right) V_\mu(p)\right) = 3\,. \tag{6.12}$$

und für den Axialvektor-Strom:

$$(Z_q^{\text{long}})^{-1} Z_A^{\text{long}} \tfrac{1}{12} Tr \left(\sum_\mu \frac{p_\mu}{p^2} \gamma_5 \not{p} A_\mu(p) \right) = 1 \,, \tag{6.13}$$

$$(Z_q^{\text{trans}})^{-1} Z_A^{\text{trans}} \tfrac{1}{12} Tr \left(\sum_\mu \left(\gamma_5 \gamma_\mu - \frac{p_\mu}{p^2} \gamma_5 \not{p} \right) A_\mu(p) \right) = 3 \,. \tag{6.14}$$

Ward Identitäten legen die Renormierungskonstanten der Vektor- und Axialvektor-Ströme fest und erlauben so eine Bestimmung der Quarkfeld-Renormierungskonstanten Z_q^{long} und Z_q^{trans}. Von der Vektor-Strom-Ward Identität folgt so, daß Z_q^{trans} mit Z_q aus (6.9) bis auf Gitter-Artefakte übereinstimmt; für Z_q^{long} stimmt dies im allgemeinen nicht.

Eine Verallgemeinerung der Renormierungsbedingungen, hier der transversalen Bedingung, auf das Gitter führt für $J_\mu = V_\mu, A_\mu$ zu dem Ansatz

$$(Z_q^{\text{trans}})^{-1} Z_J \tfrac{1}{12} Tr \left(\sum_\mu Q_\mu^\perp J_\mu(p) \right) = \tfrac{1}{12} Tr \left(\sum_\mu Q_\mu^\perp J_\mu^{\text{Born}}(p) \right) = 3 \,, \tag{6.15}$$

wobei $Q_\mu^\perp$ eine geeignete Dirac-Matrix und $J_\mu^{\text{Born}}(p)$ den auf dem Gitter berechneten Born-Term bezeichnet. Naheliegend ist

$$Q_\mu^\perp = \left(J_\mu^{\text{Born}} \right)^{-1} - Q_\mu^{\|} \,, \tag{6.16}$$

mit

$$Q_\mu^{\|} = \frac{1}{N} \sin(ap_\mu) \sum_\lambda \left(J_\lambda^{\text{Born}} \right)^{-1} \sin(ap_\lambda) \,. \tag{6.17}$$

Der Normierungsfaktor N folgt dann unmittelbar zu

$$N = \tfrac{1}{12} Tr \left[\sum_\mu J_\mu^{\text{Born}} \sin(ap_\mu) \sum_\lambda \left(J_\lambda^{\text{Born}} \right)^{-1} \sin(ap_\lambda) \right] \,. \tag{6.18}$$

Der Kontinuumslimes $a \to 0$ und $J_\mu^{\text{Born}} \to \gamma_\mu$ oder $\gamma_\mu \gamma_5$ ergibt $N/a^2 \to p^2$ und führt, wie es sein sollte, zur Kontinuums-Renormierungsbedingung (6.12).

Für den sogenannten erhaltenen Vektor-Strom (4.45) ist auf dem Gitter

$$J_\mu^{\text{Born}}(p) = \gamma_\mu \cos(ap_\mu) + \mathrm{i} \sin(\mathrm{ap}_\mu) \tag{6.19}$$

und man erhält

$$N = \left(\sum_\mu \sin^2(ap_\mu)\right)^2 + \sum_\mu \sin^2(ap_\mu) - \sum_\mu \sin^4(ap_\mu)\,. \tag{6.20}$$

Der erhaltene Vektor-Strom ermöglicht gerade eine Bestimmung von Z_q^{trans} auf dem Gitter; und zwar mit Hilfe von $Z_J = 1$ und der Renormierungsbedingung (6.15).

Für den Vektor-Strom und den Axialvektor-Strom hat man

$$J_\mu^{\text{Born}} = \gamma_\mu \tag{6.21}$$

bzw.

$$J_\mu^{\text{Born}} = \gamma_\mu \gamma_5\,, \tag{6.22}$$

und bekommt in beiden Fällen

$$N = \sum_\mu \sin^2(ap_\mu)\,. \tag{6.23}$$

Es zeigt sich nun, daß die transversalen Renormierungskonstanten (von Vektor-Strom und Axialvektor-Strom) variiert über den Renormierungspunkt μ^2 sehr glatt sind, also hier die Diskretisierungsfehler geringer sind (Fig. 6.3). Bei longitudinalen Renormierungskonstanten ist dies weniger deutlich.

6.2 Ergebnisse im MOM-Schema

Im folgenden werden Renormierungskonstanten gegeben, die im MOM-Schema (6.8) bzw. (6.15) (im Falle des Vektor- und Axialvektor-Stromes) berechnet wurden. Die Ergebnisse beruhen auf Rechnungen mit Standard Wilson Fermionen ($r = 1$) in der quenched Approximation auf den Gittern 16^3x32 ($a^{-2} = 3.8GeV^2$, $\beta = 6.0$) und 24^3x48 ($a^{-2} = 7.0GeV^2$, $\beta = 6.2$) mit den räumlichen Ausdehnungen 1.6 fm bzw. 1.8 fm; dabei werden hopping Parameter $\kappa = 0.155$, 0.1530, 0.1515 ($\kappa_c = 0.157211$) bzw. $\kappa = 0.152$, 0.1507, 0.1489 ($\kappa_c = 0.153374$) verwendet [33].

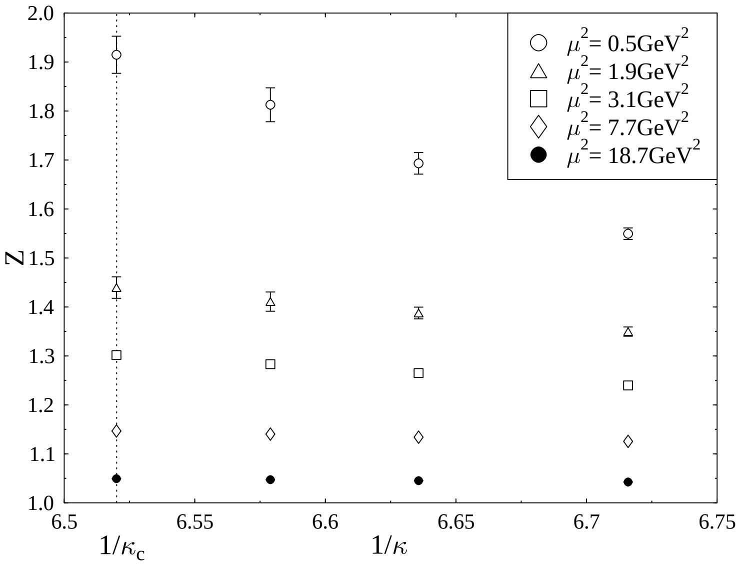

Abbildung 6.1: Chirale Extrapolation für Z von $\mathcal{O}_{v_{2,a}}$ bei $\beta = 6.2$. Repräsentative Werte für μ^2 wurden ausgewählt.

Zur Darstellung der Renormierungskonstanten wird der dimensionslose Gitter-Renormierungspunkt $a^2\mu^2$ in einen physikalischen $\mu^2[GeV^2]$ umgerechnet. Dazu ist eine Kenntnis des physikalischen Gitterpunktabstandes a^{-2} in GeV^2 notwendig. Die Bestimmung von $a^{-2} = 3.8GeV^2$ ($\beta = 6.0$) und $a^{-2} = 7.0GeV^2$ ($\beta = 6.2$) erfolgte im QCDSF-Projekt über die physikalische Größe der string-Konstanten [33]. Der Renormierungspunkt μ^2 wird so auf logarithmischer Skala im Bereich $0.5GeV^2 < \mu^2 < 80GeV^2$ variiert.

Die in den Rechnungen simulierten Quarkmassen sind verhälnismäßig groß. Über eine Extrapolation der Ergebnisse (der Renormierungskonstanten) zum sogenannten chiralen Limes wird zur näherungsweise gültigen masselosen Theorie übergegangen. Dies erfolgt linear in $1/\kappa$. In den meisten Fällen ist die Massenabhängigkeit relativ schwach, so daß eine lineare Extrapolation sinnvoll ist, siehe Fig. 6.1 am Beispiel des Operators $\mathcal{O}_{v_{2,a}}$ bei $\beta = 6.2$. Diese im allgemeinen nur leichte Abhängigkeit von der Quarkmasse ist vernünftig, da die Massenskala nicht von der Quarkmasse, sondern von der typischerweise viel größeren Renormierungsskala μ^2 gesetzt wird.

In den Abbildungen 6.2-6.5 werden nun unmittelbar sich aus dem MOM-Schema ergebende Renormierungskonstanten (extrapoliert zum chiralen Limes) für $\beta = 6.00$ und $\beta = 6.20$ gezeigt. Die dargestellten Fehler sind rein statistisch und wurden mit Hilfe eines Jackknife-Verfahrens berechnet.

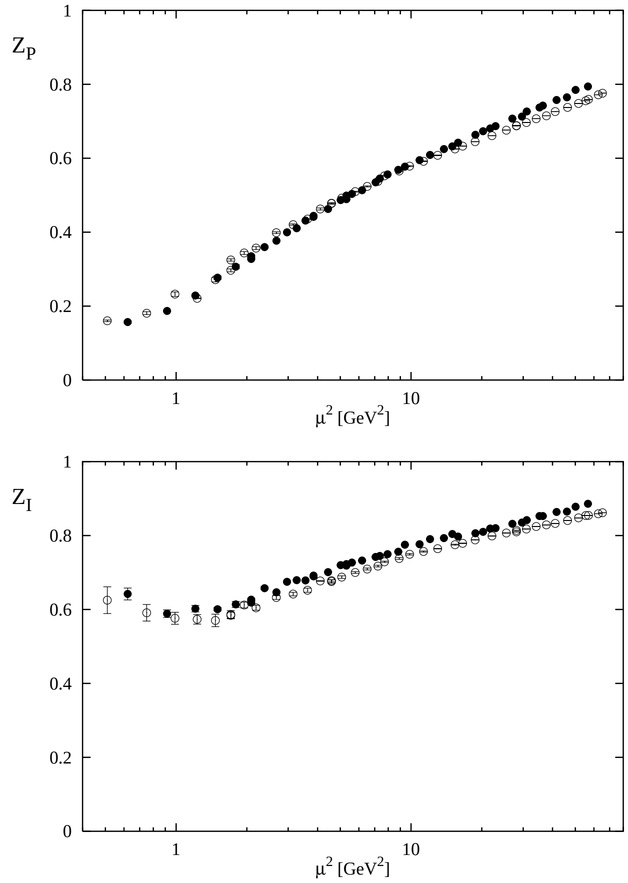

Abbildung 6.2: Z im MOM-Schema (6.8) für $\mathcal{O}_P$, $\mathcal{O}_I$ bei $\beta = 6.00$ (schwarze Datenpunkte) und $\beta = 6.20$ (weiße Datenpunkte).

In Anhang A werden die Ergebnisse für die Renormierungskonstanten im MOM-Schema (6.8) und (6.15) in Tabellenform gegeben.

An dieser Stelle ist es interessant, die erhaltenen Resultate mit der Literatur zu vergleichen. Für die lokalen Operatoren, d.h. ohne Ableitungen (4.44), ($\mathcal{O}_I$, $\mathcal{O}_P$, $\mathcal{O}_V$, $\mathcal{O}_A$), sind Renormierungskonstanten bereits über ähnliche nicht-störungstheoretische Methoden berechnet worden. Allerdings wird meistens mit verbesserten Gitterformulierungen der QCD oder bei anderen β-Werten gearbeitet, so daß hier ein direkter Vergleich nicht möglich ist. In [34] wird dagegen ebenfalls unter anderem mit quenched Wilson-Fermionen bei $\beta = 6.00$ und $\beta = 6.20$, in beiden Fällen allerdings auf 16^3x32-Gittern, gerechnet.

Im Falle des lokalen Vektor-Stroms und des Axialvektor-Stroms sieht man eine gute Übereinstimmung mit [34], wenn man jeweils die Renormierungskonstanten, gemittelt über alle 4 Komponenten, miteinander vergleicht. Die Renormierungskonstante des loka-

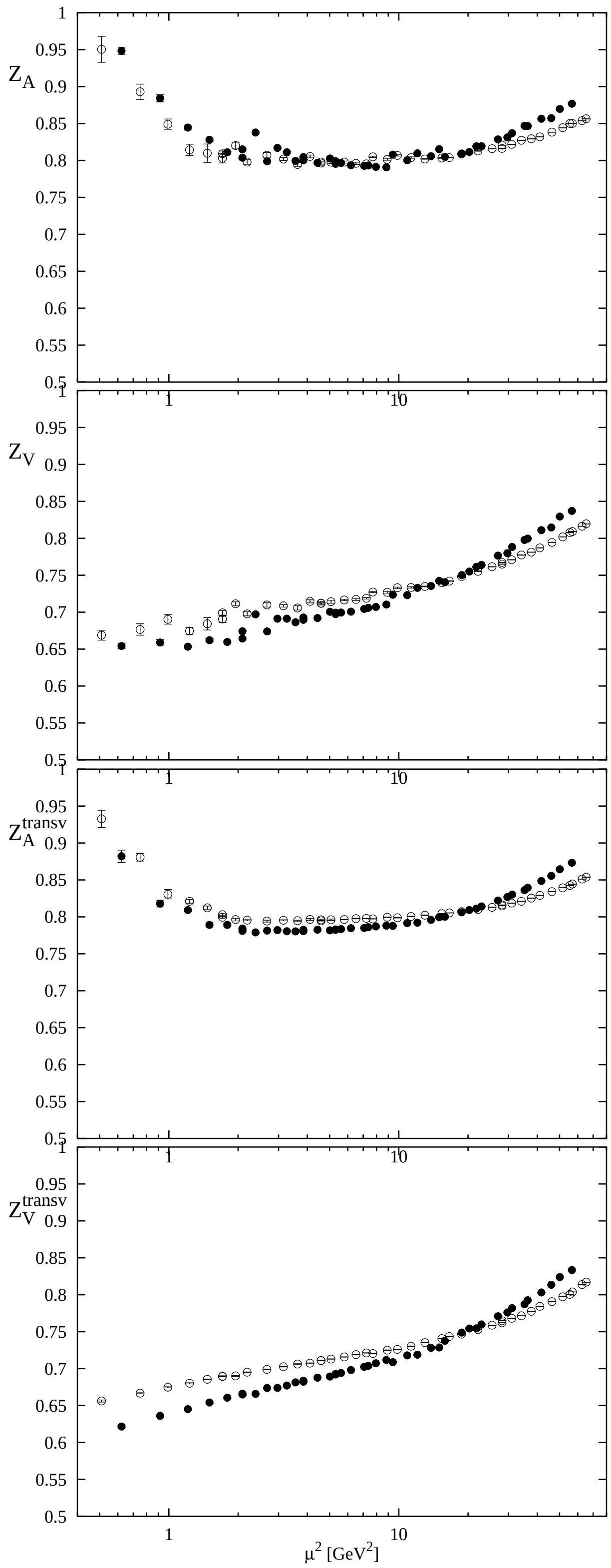

Abbildung 6.3: Z im MOM-Schema (6.8) für $\mathcal{O}_A$, $\mathcal{O}_V$ (obere Bilder) und im MOM-Schema (6.15) (untere Bilder) bei $\beta = 6.00$ (schwarze Datenpunkte) und $\beta = 6.20$ (weiße Datenpunkte).

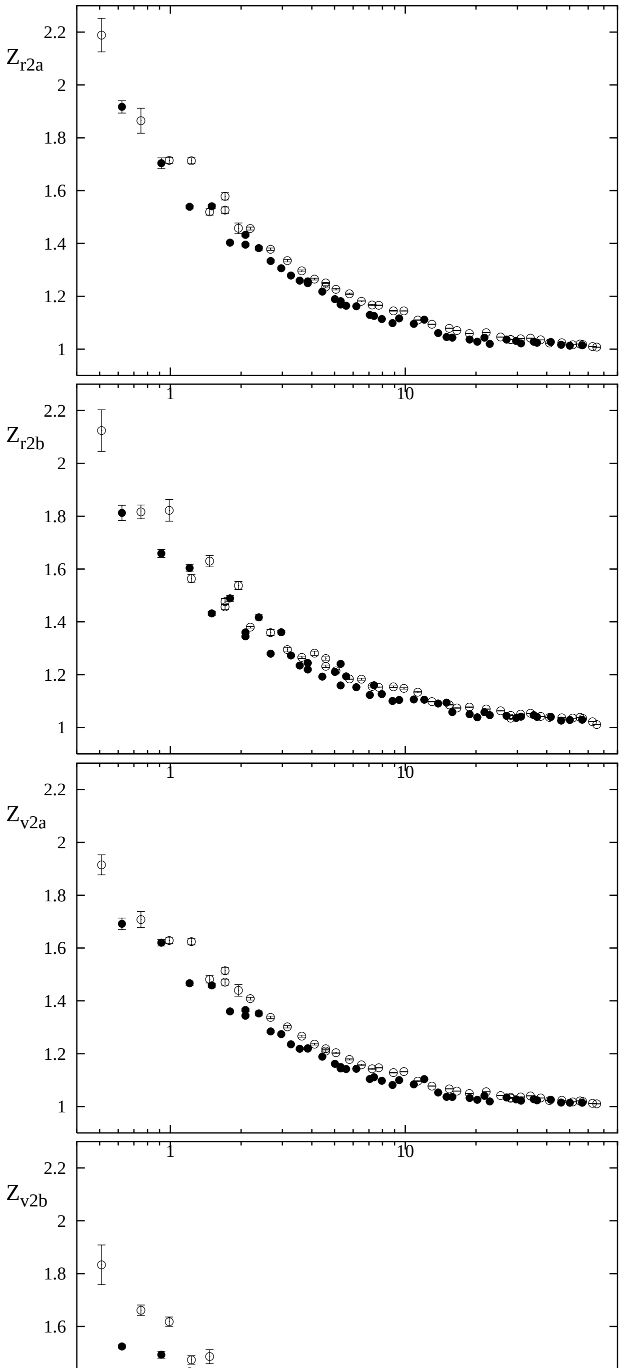

Abbildung 6.4: Z im MOM-Schema (6.8) für $\mathcal{O}_{v2a}$, $\mathcal{O}_{v2b}$, $\mathcal{O}_{r2a}$, $\mathcal{O}_{r2b}$ bei $\beta = 6.00$ (schwarze Datenpunkte) und $\beta = 6.20$ (weiße Datenpunkte).

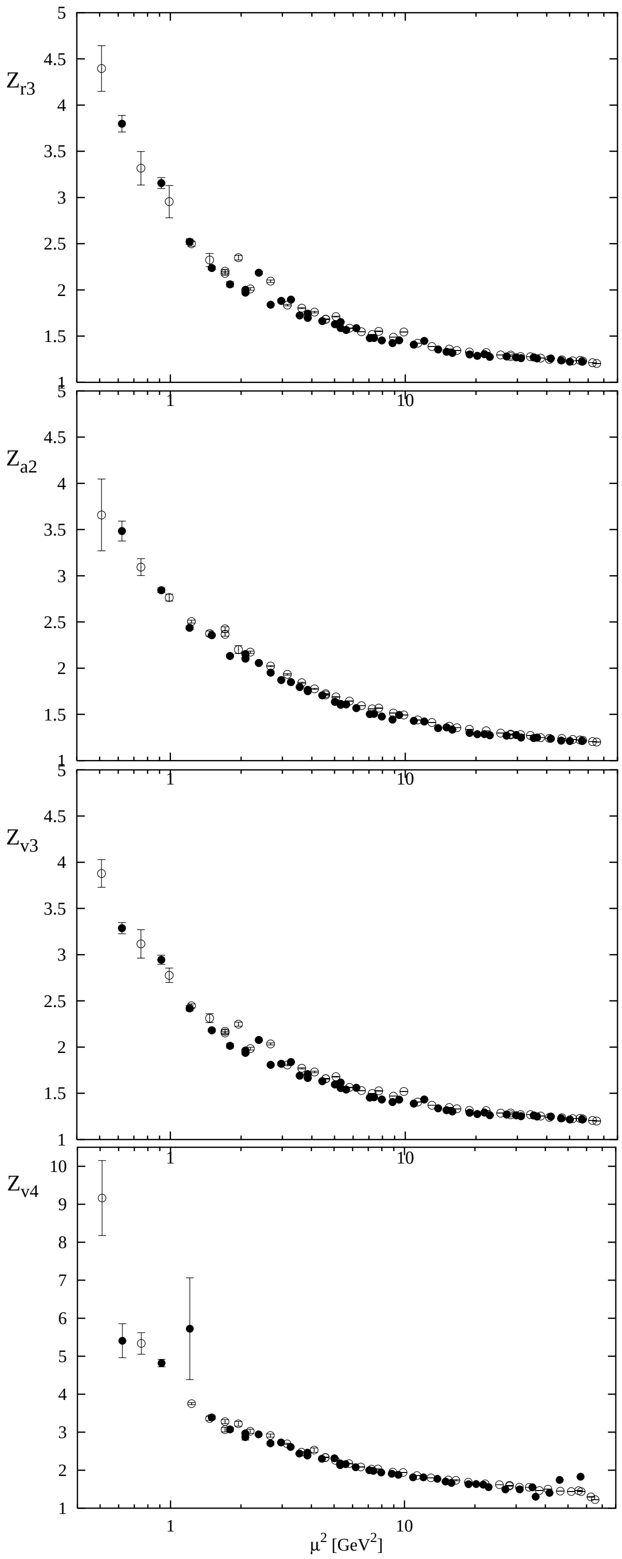

Abbildung 6.5: Z im MOM-Schema (6.8) für $\mathcal{O}_{r3}$, $\mathcal{O}_{a2}$, $\mathcal{O}_{v3}$, $\mathcal{O}_{v4}$ bei $\beta = 6.00$ (schwarze Datenpunkte) und $\beta = 6.20$ (weiße Datenpunkte).

len Vektor-Stroms zeigt eine funktionelle Abhängigkeit von der Renormierungsskala auf dem Gitter, was man bei uns etwas deutlicher sieht (Abb. 6.3), insbesondere über die Methode der transversalen Projektion nach (6.15). Die Z's über eine solche Projektion sind dabei jeweils systematisch ein wenig verschoben von denen, die über alle 4 Komponenten gemittelt werden.

Bei der pseudoskalaren Dichte gibt es leichte Unterschiede zu [34]. Unsere Z's sind systematisch kleiner bei $\beta = 6.00$ und größer bei $\beta = 6.20$. Dies könnte mit der chiralen Extrapolation zusammenhängen, die insbesondere bei kleinen μ^2 nicht mehr ganz linear in $1/\kappa$ ist. Genauso wie bei uns ist jedoch die „anomale Dimension“ auf dem Gitter[2] viel zu groß im Vergleich mit der Kontinuums-Störungstheorie, siehe Abb. 6.2. Beim skalaren Operator findet man eine gute Übereinstimmung, wenn μ^2 nicht allzu groß ist. Wie in unseren Daten, ist aufgrund der ungewöhnlich großen „anomale Dimension“ der pseudoskalaren Dichte das Verhältnis Z_P/Z_S in [34] nicht konstant, auch nicht für sehr große Renormierungsskalen μ^2.

Zur Berechnung der Renormierungskonstanten des lokalen Vektor-Stroms Z_V und des Axialvektor-Stroms Z_A gibt es einige andere nicht-störungstheoretische Methoden, deren Ergebnisse hier zu einem Vergleich zitiert werden sollen:

Z.B. kann man Z_V berechnen, indem man hadronische Greensfunktionen des lokalen Vektor-Stroms und des erhaltenen Vektor-Stroms (die Renormierungskonstante ist eins) miteinander vergleicht. Einige solche Resultate werden bei $\beta = 6.00$ in [35] und [36] gegeben. In [35] wird 0.73 mit Hilfe von 3-pt-Greensfunktionen und 0.57 über 2-pt-Greensfunktionen ausgerechnet. Der große Unterschied wird mit Diskretisierungs-Artefakten erklärt, worauf die funktionelle Abhängigkeit von Z_V vom Renormierungspunkt in Abb. 6.3 bei uns ebenfalls hindeutet (siehe Abschnitt 6.4.2). Die japanische JLQCD-Arbeitsgruppe hat diese Methode ebenfalls auf Wilson-Fermionen bei $\beta = 5.90$, 6.10 und 6.30 angewendet [37]; wenn diese Ergebnisse interpoliert werden [38], erhält man 0.57 bei $\beta = 6.00$ und 0.62 bei $\beta = 6.20$.

Der lokale Vektor-Strom und der Axialvektor-Strom können nicht-störungstheoretisch auch über die sogenannte Ward-Identität Methode renormiert werden [39]. In [36] gibt man für Wilson-Fermionen 0.57(2) bei $\beta = 6.00$ für den lokalen Vektor-Strom an. Diesen Wert könnte man bei uns mit 0.68 bei $\mu^2 a^2 = 1$ aus dem MOM-Schema über die Methode der transversalen Projektion nach (6.15) vergleichen (siehe Tabelle A.2); wiederum erklärt sich der große Unterschied wahrscheinlich durch Diskretisierungsfehler, die bei verschiedenen Methoden unterschiedlich sind. Die JLQCD-Arbeitsgruppe hat den Axialvektor-Strom ebenfalls über die Ward-Identität Methode bei $\beta = 5.90, 6.10$ und 6.30 renormiert [37]; durch Interpolation ergibt sich dann etwa 0.75 bei $\beta = 6.0$ und 0.77 bei $\beta = 6.2$, zu vergleichen mit 0.78 bei $\beta = 6.0$ und 0.79 bei $\beta = 6.2$ jeweils auf der Gitter-Renormierungsskala $\mu^2 a^2 = 1$ bei uns (siehe Tabelle A.2).

[2] Die Größe „anomale Dimension“ ist eigentlich nur im Kontinuum definiert.

6.3 Ein anderes MOM-Schema auf dem Gitter

Es soll hier kurz ein anderes Gitter-MOM-Schema vorgestellt werden [40]. Man geht wiederum von der allgemeinen, etwas symbolischen (störungstheoretischen) Bedingung für amputierte Quark Vertexfunktionen bei $p^2 = \mu^2$ aus:

$$\Gamma_R(p) \equiv \Gamma_{Born}(p)\Big|_{p^2=\mu^2}, \tag{6.24}$$

wobei Γ_{Born} die nullte Ordnung der Störungstheorie auf dem Gitter ist, und fordert etwas unkonventionell für bestimmte Impulse p mit $p^2 = \mu^2$:

$$\begin{aligned} Tr\Big(M \cdot S_R(p)\Gamma_R(p)S_R(p)\Big) &= Tr\Big(M \cdot S_R(p)\Gamma_{tree}(p)S_R(p)\Big) \\ \text{d.h.} \qquad Z_{\mathcal{O}} Z_q^{-1} \cdot Tr\Big(M \cdot S(p)\Gamma(p)S(p)\Big) &= Tr\Big(M \cdot S(p)\Gamma_{tree}(p)S(p)\Big) \end{aligned} \tag{6.25}$$

Dabei ist $Tr(\ldots)$ eine Spur im Farb-Spin-Raum und $S_R(p)$ der renormierte Quark Propagator. M ist eine „Projektionsmatrix“ und wurde hier konkret zu

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.26}$$

gewählt. Die Quarkfeld Renormierungskonstante ist nach (6.9):

$$Z_q = Tr\Big[\frac{-i\sum_\lambda \gamma_\lambda \sin(p_\lambda a)}{12\sum_\lambda \sin^2(p_\lambda a)} S^{-1}(p_\lambda a)\Big]_{p^2=\mu^2} \tag{6.27}$$

Ein Vergleich mit dem konventionellen Schema (6.8) in Abb. 6.6 am Beispiel der Operatoren $\mathcal{O}_{v2a}$ und $\mathcal{O}_{v2b}$ zeigt nun erwartungsgemäß eine weitgehende Übereinstimmung der beiden MOM-Schemata (Das Schema (6.25) wurde mit einer Punkt-Quellen-Methode (4.82) und (4.83) berechnet).

Theoretisch gibt es viele Möglichkeiten, ein MOM-Schema auf dem Gitter zu realisieren. Und da man letztendlich doch zum Standard-Schema der Hochenergiephysik, zu $\overline{MS}$, wechselt (hier z.B. über (5.44)), stellen die MOM-Schemata für sich genommen uninteressante beliebige Zwischenschritte dar. Praktisch sind alle diese Schemata allerdings nicht gleichwertig, da systematische Fehler durch das Gitter und z.B. durch den Wechsel des Schemas zu $\overline{MS}$ vom gewähltem MOM-Schema abhängig sind.

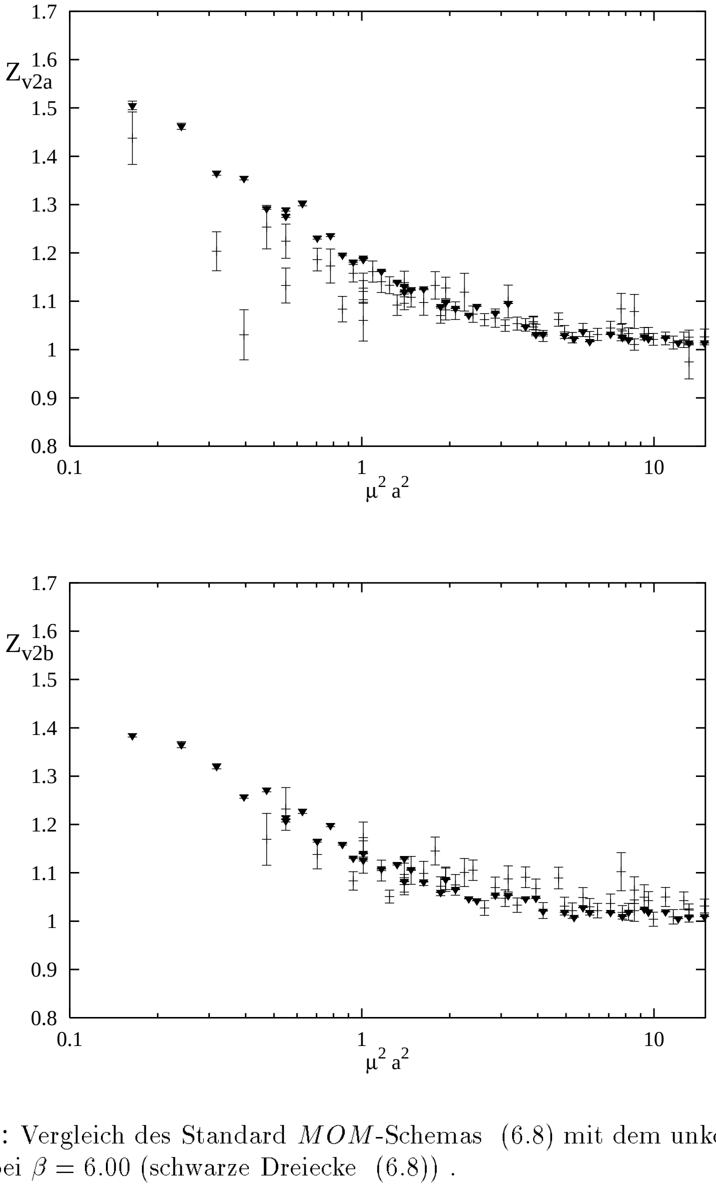

Abbildung 6.6: Vergleich des Standard *MOM*-Schemas (6.8) mit dem unkonventionellen (6.25) für $\mathcal{O}_{v2a}$ und $\mathcal{O}_{v2b}$ bei $\beta = 6.00$ (schwarze Dreiecke (6.8)) .

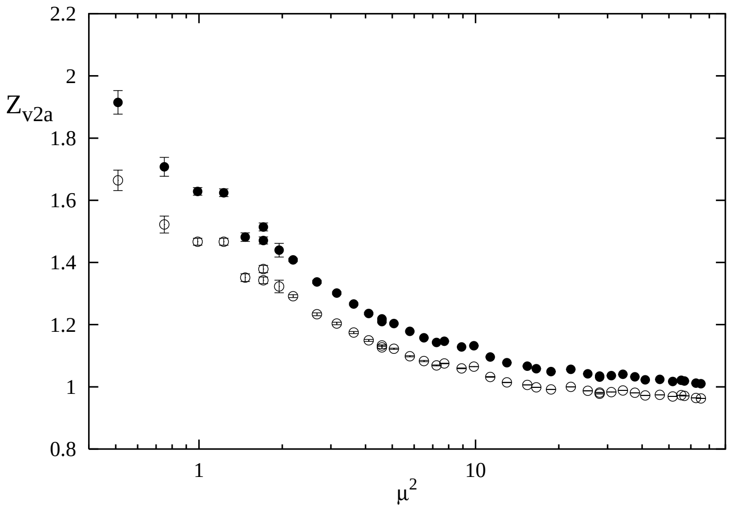

Abbildung 6.7: Z für den Operator $\mathcal{O}_{v_{2,a}}$ bei $\beta = 6.2$ im MOM-Schema (6.8) (schwarze Datenpunkte) und im $\overline{MS}$-Schema (weiße Datenpunkte).

6.4 Ergebnisse im $\overline{MS}$-Schema im Vergleich mit der Störungstheorie

Das eigentliche Ziel ist die Berechnung der Momente der Proton Strukturfunktionen (Non-Singlet) im tief-inelastischen Limes $Q^2 \to \infty$

$$M(Q^2, \text{Proton}) \quad \sim \quad \sum_{\mathcal{O}} c_{\mathcal{O}}^{\overline{MS}}(Q^2, \mu) \cdot v(\mathcal{O}^{\overline{MS}}(\mu), \text{Proton}) \tag{6.28}$$

mit Wilson-Koeffizienten $c_{\mathcal{O}}^{\overline{MS}}(Q^2, \mu)$ und reduzierten Proton Matrixelementen $v(\mathcal{O}^{\overline{MS}}(\mu)$, Proton) lokaler, zusammengesetzter Operatoren $\mathcal{O}$, beide z.B. (off-shell) renormiert im Standard-Schema $\overline{MS}$. Dabei wird das reduzierte Proton Matrixelementen auf dem Gitter berechnet und renormiert:

$$v(\mathcal{O}^{\overline{MS}}(\mu), \text{Proton}) \quad = \lim_{a \to 0} \quad Z_{\mathcal{O}}^{\overline{MS}}(\mu a, a) \cdot v(\mathcal{O}(a), \text{Proton}) \tag{6.29}$$

Nicht-störungstheoretisch berechnet man die gesuchten Renormierungskonstanten aus den MOM-Ergebnissen der Schemata (6.8) bzw. (6.15) über Umrechnungsfaktoren aus der Kontinuumstheorie (5.40), (5.41) (5.42) und (5.45) zu

$$Z_{\mathcal{O}}^{\overline{MS}}(\mu a, a) = X_{MOM}^{\overline{MS}} \cdot Z_{\mathcal{O}}^{MOM}(\mu a, a). \tag{6.30}$$

(Es wird $g = g(\mu)$ nach (5.57) und (5.62) verwendet.) Dabei verursacht ein solcher Schemenwechsel (außer beim Vektor-Strom und Axialvektor-Strom) einen merklichen Effekt wie Abb. 6.7 zeigt.

	$\overline{\psi}I\psi$	$\overline{\psi}\gamma_5\psi$	$\overline{\psi}\gamma_\mu\psi$	$\overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$	
$\Delta_{\mathcal{O}}$	12.9524	22.5954	20.6178	15.7963	
γ_0	-8	-8	0	0	
γ_1	-134.67	-134.67	0.00	0.00	
	$\mathcal{O}_{a_0}$	$\mathcal{O}_{v_{2,a}}$	$\mathcal{O}_{r_{2,a}}$	$\mathcal{O}_{a_1}$	$\mathcal{O}_{v_{2,b}}$
$\Delta_{\mathcal{O}}$	15.7963	1.2796	0.3451	0.3451	2.5619
γ_0	0	64/9	64/9	64/9	64/9
γ_1	0.00	96.69	96.69	96.69	96.69
	$\mathcal{O}_{r_{2,b}}$	$\mathcal{O}_{v_3}$	$\mathcal{O}_{r_3}$	$\mathcal{O}_{a_2}$	$\mathcal{O}_{v_4}$
$\Delta_{\mathcal{O}}$	0.1674	-12.1274	-12.8589	-12.1171	-27.2296
γ_0	64/9	100/9	100/9	100/9	628/45
γ_1	96.69	141.78	141.78	141.78	172.58

Tabelle 6.1: Finite Anteile und anomale Dimensionen in 1- und 2-Schleifen-Näherung ($n_f = 0$ *flavour*-Zustände) der Renormierungskonstanten in der Gitter-Störungstheorie.

Im Vergleich dazu (Siehe Tabelle 6.2, S. 95) liefert die Gitter-Störungstheorie in 1-Schleifen-Näherung im $\overline{MS}$-Schema

$$Z_{\mathcal{O}}^{\overline{MS}}(\mu a, a) = 1 - \frac{g^2}{16\pi^2}(\gamma_0 \ln(a\mu) + C_F \Delta_{\mathcal{O}}), \tag{6.31}$$

wobei $\Delta_{\mathcal{O}}$ der finite Anteil und γ_0 die anomale Dimensionen ist, siehe Tabelle 6.1 [15]. Es ist $C_F = 4/3$ für die Eichgruppe SU(3).

Für die tadpole verbesserte Gitter-Störungstheorie wird hier für einen Operator $\mathcal{O}$ mit n_D kovarianten Ableitungen

$$Z_{\mathcal{O}}^{\overline{MS}}(\mu a, a) = u_0^{1-n_D}\left[1 - \frac{g^{*2}}{16\pi^2}(\gamma_0 \ln(a\mu) + C_F \overline{\Delta}_{\mathcal{O}})\right] \tag{6.32}$$

verwendet, wobei $\overline{\Delta}_{\mathcal{O}} = \Delta_{\mathcal{O}} + (n_D - 1)\pi^2$ und $u_0 = 1 - g^2/(16\pi^2)C_F\pi^2 + O(g^4)$ mit $g^2 = 6/\beta$ ist. g^* wird über $\alpha_{\overline{\mathrm{MS}}}(1/a)$ in Tabelle I aus Ref. [41] ermittelt. Konkret haben wir $g^* = 1.5778$ und $u_0 = 0.8778$ bei $\beta = 6.00$ und $g^* = 1.4931$ und $u_0 = 0.8851$ bei $\beta = 6.20$ genommen.[3]

[3] In einer heuristischen Herleitung nach [41] schreibt man (6.31) bei $\mu = 1/a$ für einen Operator mit n_D Ableitungen:

Die Renormierungskonstanten der Gitter-Störungstheorie können mit Hilfe der Renormierungsgruppe (der Kontinuumstheorie) weiter verbessert werden. So liefern dann (6.31) und das tadpole verbesserte Analogon (6.32) Startwerte z.B. bei $\mu_0 = 1/a$, während die μ-Abhängigkeit durch den Renormierungsgruppen-Faktor $R_{\mathcal{O}}(\mu,\mu_0)$ der Kontinuumstheorie (5.50) beschrieben wird.

$$Z_{\mathcal{O}}^{\overline{MS}}(\mu a, a) = R_{\mathcal{O}}(\mu,\mu_0) \cdot Z_{\mathcal{O}}^{\overline{MS}}(\mu_0 a, a) \tag{6.35}$$

In Abschnitt 5 sind je nach Operator 1- bis 3-Schleifen-Näherungen für $R_{\mathcal{O}}(\mu,\mu_0)$, (5.54) ff., mit entsprechend renormierten Kopplungskonstanten aufgelistet. Der Λ Parameter wird im folgenden zu $\Lambda_{\overline{\mathrm{MS}}} = 230$ MeV gewählt. Dieser Wert folgt aus [42], wenn man berücksichtigt, daß dort zur Bestimmung des Gitterpunktabstandes a in physikalischen Einheiten der Kraft-Parameter r_0, im QCDSF-Projekt aber die string-Konstante [33] verwendet wurde. Aufgrund der quenched-Näherung bei den numerischen Simulationen wird die Anzahl der *flavour*-Zustände $n_f = 0$ gesetzt und damit der Beitrag durch Quark-Schleifen unterdrückt.

Es stellt sich nun die Frage, ob es einen Skalen-Bereich μ^2 gibt, in dem die Renormierungsskalen μ^2 einerseits groß genug sind, daß die nicht-störungstheoretischen Renormierungskonstanten im $\overline{MS}$-Schema (6.30) ein störungstheoretisches Verhalten zeigen, aber μ^2 zum anderen auch klein genug ist, damit Gitter-Diskretisierungsfehler gering sind. (Nur dann kann das Produkt des renormierten reduzierten Proton Matrixelementes mit dem zugehörigen Wilson-Koeffizienten ein zuverlässiges μ^2-unabhängiges physikalisches Moment ergeben.) Um dies zu testen werden zwei Darstellungsarten gewählt. Zum einen werden die nicht-störungstheoretischen Daten im $\overline{MS}$-Schema den verschiedenen Lösungen der Störungstheorie (Gitter-Störungstheorie, tadpole verbesserte Störungstheorie, jeweils mit der Renormierungsgruppe verbessert und in verschiedenen Schleifen-Näherungen) direkt gegenübergestellt. Zum anderen werden die nicht-störungstheoretischen Renormierungskonstanten im $\overline{MS}$-Schema durch den Renormierungsgruppen-Faktor $R_{\mathcal{O}}(\mu,\mu_0)$ (in verschiedenen Schleifen-Näherungen) geteilt dargestellt. Wir setzen $\mu_0^2 = 4$ GeV^2.

$$\begin{aligned} 1 - \frac{g^2}{16\pi^2} C_F \Delta_{\mathcal{O}} &= \frac{u_0}{u_0^{n_D}} u_0^{n_D - 1} \left(1 - \frac{g^2}{16\pi^2} C_F \Delta_{\mathcal{O}}\right) \\ &\approx \frac{u_0}{u_0^{n_D}} \left(1 - \frac{g^{*2}}{16\pi^2} C_F \overline{\Delta}_{\mathcal{O}}\right) + O(g^{*4}) \, , \end{aligned} \tag{6.33}$$

mit

$$u_0 = \langle \tfrac{1}{3} \mathrm{tr} \mathrm{U}_\square \rangle^{\frac{1}{4}} = 1 - \frac{\mathrm{g}^2}{16\pi^2} \mathrm{C_F} \pi^2 + \mathrm{O(g^4)} \qquad \text{und} \qquad \overline{\Delta}_{\mathcal{O}} = \Delta_{\mathcal{O}} + (\mathrm{n_D} - 1)\pi^2 \, . \tag{6.34}$$

Hierdurch wird berücksichtigt, daß man n_D Operator tadpole Diagramme hat und eins an den Beinen, das mit derselben Größe, aber umgekehrten Vorzeichen beiträgt. Zusätzlich wird statt der nackten Kopplung g als Entwicklungsparameter die auf einer physikalischen Skala renormierte Kopplungskonstante g^* genommen. g^* wird über $\alpha_{\overline{\mathrm{MS}}}(1/a)$ in Tabelle I aus [41] gewonnen.

Störungstheoretische und Nicht-Störungstheoretische $\overline{MS}$-Ergebnisse im Vergleich bei $\mu^2 = a^{-2}$

$\mathcal{O}$	$Z_\mathcal{O}$	$Z_\mathcal{O}^{\mathrm{ti}}$	$Z_\mathcal{O}^{\mathrm{pert}}$	$Z_\mathcal{O}$	$Z_\mathcal{O}^{\mathrm{ti}}$	$Z_\mathcal{O}^{\mathrm{pert}}$
	$\beta = 6.0$			$\beta = 6.2$		
$\mathcal{O}_{v_{2,a}}$	1.1332(29)	0.9731	0.9892	1.0732(19)	0.9759	0.9895
$\mathcal{O}_{v_{2,b}}$	1.0836(24)	0.9462	0.9784	1.0426(36)	0.9518	0.9791
$\mathcal{O}_{v_3}$	1.4973(67)	1.1933	1.1024	1.3458(15)	1.1778	1.0991
$\mathcal{O}_{v_4}$	2.0042(121)	1.5021	1.2299	1.7497(85)	1.4565	1.2225
$\mathcal{O}_{a_2}$	1.5409(64)	1.1930	1.1023	1.3962(16)	1.1776	1.0990
$\mathcal{O}_{r_{2,a}}$	1.1615(33)	0.9927	0.9971	1.0956(18)	0.9935	0.9972
$\mathcal{O}_{r_{2,b}}$	1.1541(24)	0.9965	0.9986	1.0912(36)	0.9968	0.9986
$\mathcal{O}_{r_3}$	1.5292(68)	1.2108	1.1086	1.3628(15)	1.1934	1.1051
$\mathcal{O}_I$	0.7718(16)	0.8209	0.8906	0.7897(29)	0.8337	0.8942
$\mathcal{O}_P$	0.4934(24)	0.6430	0.8092	0.5888(15)	0.6731	0.8154
$\mathcal{O}_V$	0.6833(8)	0.6795	0.8259	0.7206(3)	0.7060	0.8315
$\mathcal{O}_A$	0.7821(9)	0.7684	0.8666	0.7978(4)	0.7864	0.8709

Tabelle 6.2: Renormierungskonstanten im $\overline{\mathrm{MS}}$-Schema für $\beta = 6.0$ bei $\mu^2 = a^{-2} = 3.8$ GeV^2 und für $\beta = 6.2$ bei $\mu^2 = a^{-2} = 7$ GeV^2 . Die angegebenen Fehler bei den nicht-störungstheoretisch berechneten $Z_\mathcal{O}$ nach (6.30) sind rein statistisch. $Z_\mathcal{O}^{\mathrm{ti}}$ sind nach (6.32) störungstheoretisch tadpole verbessert und $Z_\mathcal{O}^{\mathrm{pert}}$ sind nach (6.31) einfach störungstheoretisch berechnet.

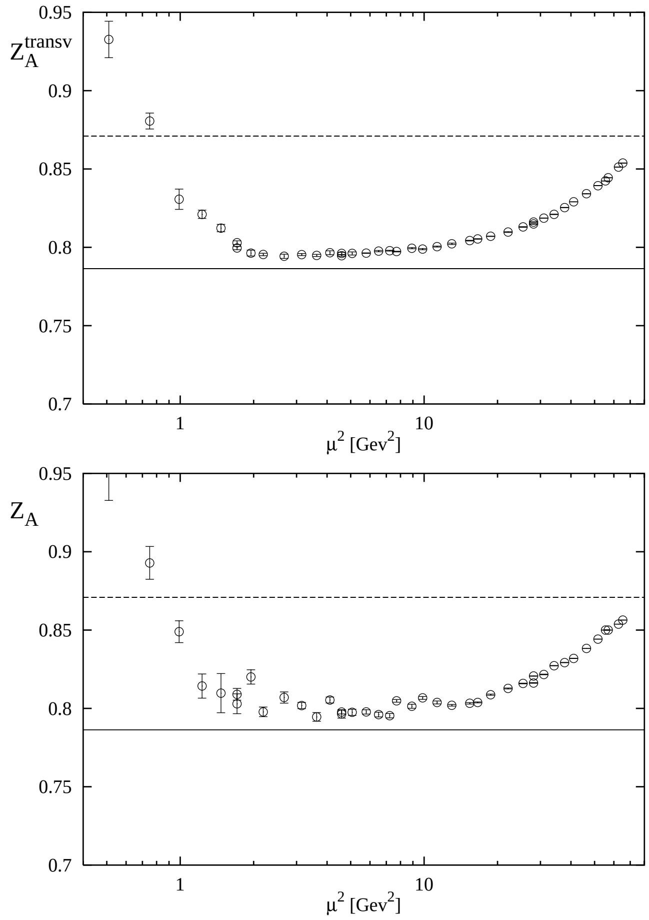

Abbildung 6.8: Z für den axialen Vektorstrom bei $\beta = 6.20$: berechnet nach der Methode der transversalen Projektion (6.15) (oberes Bild) und der Standard Methode (6.8) gemittelt über alle 4 Richtungen (unteres Bild). Außerdem: Ergebnisse der 1-Schleifen-Gitter-Störungstheorie (6.31) (gestrichelte Linie) und tadpole verbessert (6.32) (durchgezogen).

6.4.1 A, I und $\mathcal{O}_{v2b}$

Der Axialvektor-Strom A ist ein besonders einfacher Fall: Die Renormierungskonstante im MOM-Schema ist (in 1-Schleifen-Näherung) gleichzeitig auch die in $\overline{MS}$, siehe (5.41). Die anomalen Dimensionen sind null im $\overline{MS}$-Schema und der Renormierungsgruppen-Faktor $R_{\mathcal{O}}(\mu, \mu_0)$ ist somit 1. Wie bereits in Abb. 6.3 zu sehen ist, ergibt die Methode der Projektion auf die transversale Komponente (6.15) ein glatteres Ergebnis als die Standard Methode (6.8). Abb. 6.8 zeigt beide Methoden zusammen mit den störungstheoretischen Lösungen. Die Erwartungen werden hier erfüllt. Um $\mu^2 = 4$ GeV^2 sieht man ein näherungsweise Skalen-unabhängiges nicht-störungstheoretisches Ergebnis. Die tadpole verbesserte Störungstheorie ist in besserer Übereinstimmung als die 1-Schleifen-Gitter-Störungstheorie.

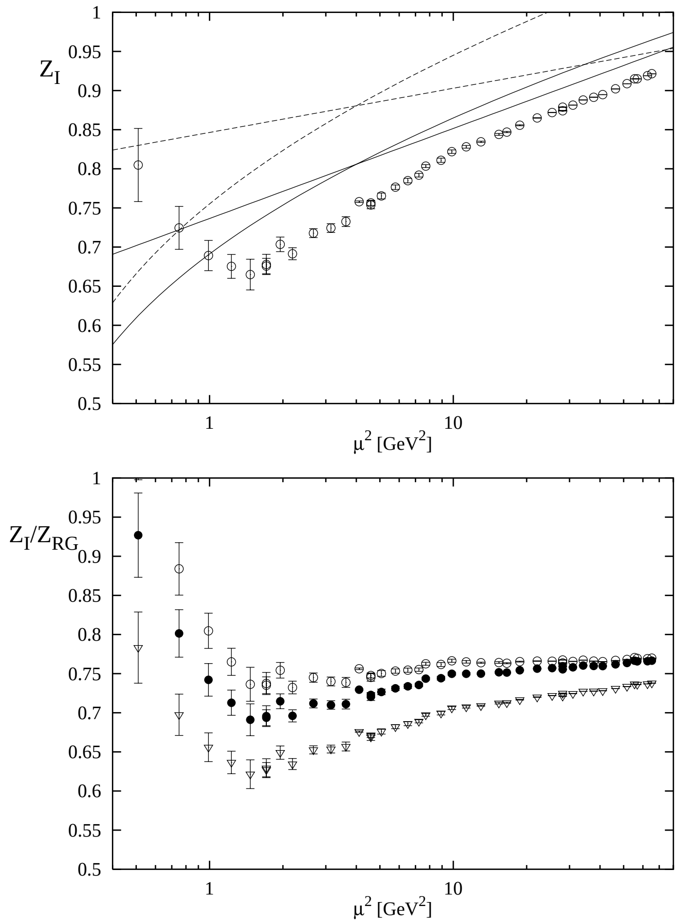

Abbildung 6.9: Z für den skalaren Operator bei $\beta = 6.20$. Oberes Bild: nicht-störungstheoretische Daten im $\overline{MS}$-Schema, nach (5.40) umgerechnet, und störungstheoretische Ergebnisse der Standard Theorie (gestrichelte Linie) und der tadpole verbesserten Theorie (durchgezogene Linie). Dabei: Geraden =1-Schleifen-Gitter-Störungstheorie (6.31) und (6.32); gekrümmte Kurven = $R_{\mathcal{O}}(\mu,\mu_0)Z(\mu_0)$ mit Startwerten (6.31) und (6.32) bei $\mu_0^2 = 4$ GeV^2 und einem Renormierungsgruppen-Faktor $R_{\mathcal{O}}(\mu,\mu_0)$ hier in 3-Schleifen-Näherung der Kontinuums-Störungstheorie (5.60). Unteres Bild: $Z/R_{\mathcal{O}}(\mu,\mu_0)$ mit $R_{\mathcal{O}}(\mu,\mu_0)$ in 1- bis 3-Schleifen-Näherung (Dreiecke= 1-, schwarze Kreise= 2-, weiße Kreise= 3-Schleifen-Näherung) nach (5.54) ff. (Umrechnung der nicht-störungstheoretischen Z nach $\overline{MS}$ entsprechend 0- bis 2-Schleifen-genähert (5.40), (5.42)).

Der skalare Operator ist etwas komplizierter und geradezu ein Paradefall. In Abb. 6.9 wird dies demonstriert. Das obere Bild vergleicht die nicht-störungstheoretischen Z, nach $\overline{MS}$ transformiert, mit den Vorhersagen der Gitter-Störungstheorie mit und ohne tadpole Verbesserung. Außerdem wird der Einfluß der Renormierungsgruppen-Verbesserung, angewandt bei $\mu_0^2 = 4$ GeV^2, auf die störungstheoretischen Ergebnisse gezeigt. Die tadpole Verbesserung wirkt in die richtige Richtung und die nicht-störungstheoretischen Daten folgen sehr gut dem Verlauf der Renormierungsgruppe für nicht zu kleine Skalen μ^2. Im unteren Bild werden die Daten, geteilt durch den Renormierungsgruppen-Faktor in 1- bis 3-Schleifen-Näherung, dargestellt. Die Störungstheorie scheint sich den nicht-störungs-

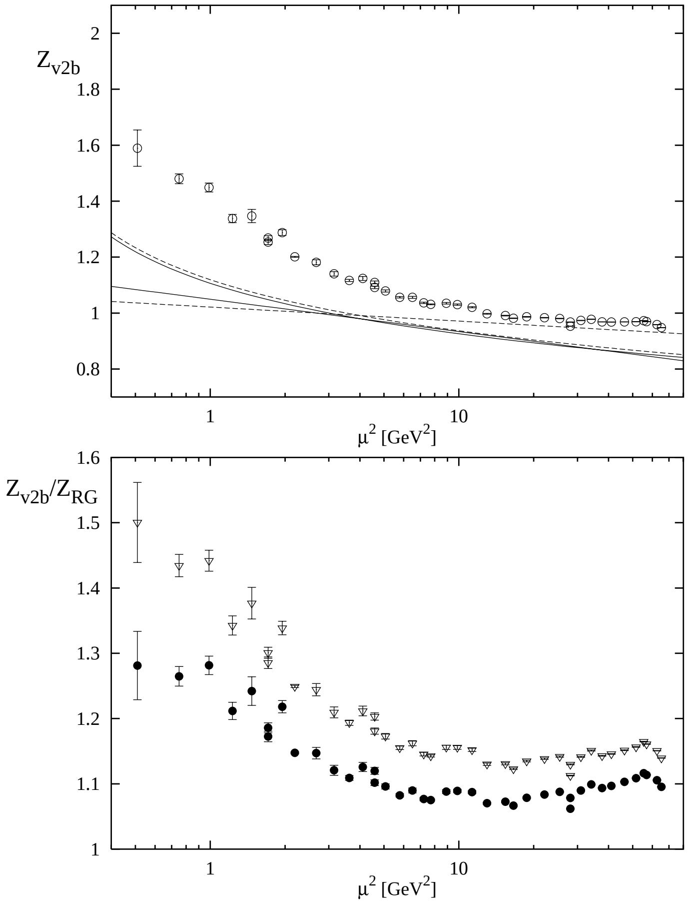

Abbildung 6.10: Z für $\mathcal{O}_{v2b}$ bei $\beta = 6.20$. Oberes Bild: nicht-störungstheoretische Daten im $\overline{MS}$-Schema, nach (5.45) umgerechnet, und störungstheoretische Ergebnisse der Standard Theorie (gestrichelte Linie) und der tadpole verbesserten Theorie (durchgezogene Linie). Dabei: Geraden =1-Schleifen-Gitter-Störungstheorie (6.31) und (6.32); gekrümmte Kurven = $R_{\mathcal{O}}(\mu, \mu_0)Z(\mu_0)$ mit Startwerten (6.31) und (6.32) bei $\mu_0^2 = 4$ GeV^2 und einem Renormierungsgruppen-Faktor $R_{\mathcal{O}}(\mu, \mu_0)$ hier in 2-Schleifen-Näherung der Kontinuums-Störungstheorie (5.56). Unteres Bild: $Z/R_{\mathcal{O}}(\mu, \mu_0)$ mit $R_{\mathcal{O}}(\mu, \mu_0)$ in 1- bis 2-Schleifen-Näherung (Dreiecke= 1-, schwarze Kreise= 2-Schleifen-Näherung) nach (5.54) ff. (Umrechnung der nicht-störungstheoretischen Z nach $\overline{MS}$ entsprechend 0- bis 1-Schleifen-genähert (5.45)).

theoretischen Daten immer mehr anzupassen und so, wie erwartet, ein μ^2-unabhängiges Plateau zu bilden.

Ähnliches kann man zu dem Operator der OPE $\mathcal{O}_{v2b}$ in Abb. 6.10 sagen. Die tadpole Verbesserung scheint jedoch hier keinen wesentlichen Effekt zu haben. Deutlich ist auch hier im oberen Bild eine störungstheoretische μ^2-Abhängigkeit der nicht-störungstheoretisch berechneten Renormierungskonstanten zu erkennen. Entsprechend ist auch hier im unteren Bild ein Plateau ab ca. $\mu^2 = 4$ GeV^2 zu sehen, wenn die nicht-störungstheoretischen Z durch den Renormierungsgruppen-Faktor $R_{\mathcal{O}}(\mu, \mu_0)$ geteilt werden. Gitter-Artefakte (Streuung der Datenpunkte) sind hier jedoch deutlicher zu erkennen.

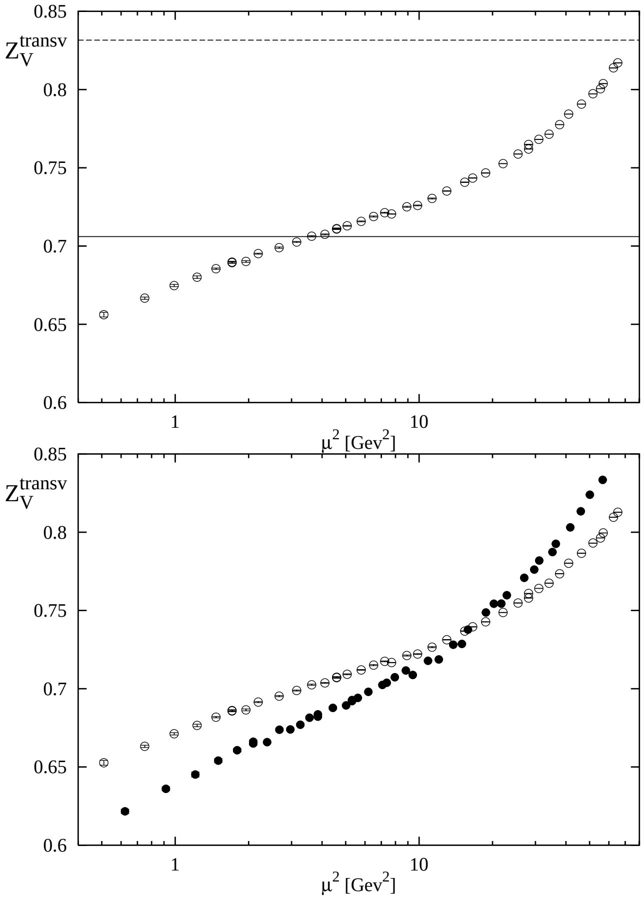

Abbildung 6.11: Z für den lokalen Vektorstrom (transversale Komponente berechnet nach (6.15)). Oberes Bild: nicht-störungstheoretische Daten bei $\beta = 6.20$ und störungstheoretische Ergebnisse der Standard Theorie (gestrichelte Linie) und der tadpole verbesserten Theorie (durchgezogene Linie). Unteres Bild: nicht-störungstheoretische Daten bei $\beta = 6.00$ (schwarze Kreise) und $\beta = 6.20$ (weiße Kreise), letztere nach der Renormierungsgruppe (6.39) (im Raum der nackten Parameter) auf $\beta = 6.00$ reskaliert.

6.4.2 Problem-Fälle: V und γ_5

Der zum Axialvektor-Strom A analoge lokale Vektor-Strom V (hier die transversale Komponente berechnet nach (6.15)) ist in Abb.6.11 dargestellt. Auch hier ist die Renormierungskonstante im MOM-Schema (in 1-Schleifen-Näherung) gleichzeitig die in $\overline{MS}$, siehe (5.41). Die anomalen Dimensionen sind zu allen Ordnungen der Störungstheorie im $\overline{MS}$-Schema null und der Renormierungsgruppen-Faktor $R_{\mathcal{O}}(\mu, \mu_0)$ ist somit 1. Trotzdem ist hier kein Anzeichen eines Plateaus zu sehen.

Einen Hinweis auf eine Erklärung hierfür erkennt man im unteren Bild von Abb.6.11. Hier werden nicht-störungstheoretische Daten bei $\beta = 6.00$ und $\beta = 6.20$ ($\beta = 6/g^2$), also verschieden nahe am Kontinuum, miteinander verglichen. Die störungstheoretische Renormierungsgruppe (im Raum der nackten Parameter) ergibt einen sehr nahe bei 1 liegenden und praktisch μ^2-unabhängigen Umrechnungsfaktor (6.39) für die Renormierungskonstanten der beiden β-Werte (höhere Ordnungen Störungstheorie sind dann vermutlich vernachlässigbar). Im unteren Bild von Abb.6.11 sind die Daten bei $\beta = 6.20$ hiermit auf $\beta = 6.00$ umgerechnet, um Gitter-Artefakte deutlich zu machen. D.h. wenn es keine solchen Artefakte gäbe, müßten die Datenpunkte jetzt aufeinander liegen. Wie erwartet, zeigen die Renormierungskonstanten kein solches Verhalten, stattdessen haben die reskalierten $\beta = 6.20$ Daten, da sie näher am Kontinuum liegen, eine geringere Steigung. Dies zeigt, daß der lokale Vektorstrom stark von Gitter-Artefakten (z.B. Diskretisierungsfehler oder Brechen der chiralen Symmetrie auf dem Gitter, verursacht durch die Wilson-Formulierung) beeinflußt wird. Im Falle des lokalen Vektorstroms ergibt die Wilson-Formulierung der QCD auf dem Gitter also bei den hier gegebenen Gittern kein Skalen- oder Kontinuums-nahes Verhalten. Damit sind die bekannten Eigenschaften des Kontinuums, z.B. daß die anomalen Dimensionen beim lokalen Vektorstrom null sind, nicht mehr maßgebend.

Auch beim pseudoskalaren Operator erkennt man kein störungstheoretisches Verhalten in der μ^2-Abhängigkeit, siehe Abb. 6.12. Dies wurde bereits in [32] beobachtet. Einen Hinweis auf eine Erklärung liefert hier die deutliche Quarkmassen-Abhängigkeit der Renormierungskonstanten insbesondere bei kleinen Renormierungsskalen μ^2. Diese Eigenschaft kann mit Hilfe der Dynamik des Brechens der chiralen Symmetrie (im Kontinuum) erklärt werden [32]. Es existiert im Kontinuum eine Ward-Identität, die die unrenormierte pseudoskalare Vertexfunktion bei verschwindendem Impuls-Übertrag $q^2 = 0$ mit dem Quark Propagator in Beziehung setzt:

$$-2m_0\Gamma^P(p) = S^{-1}(p)\gamma_5 + \gamma_5 S^{-1}(p)\,. \tag{6.36}$$

m_0 ist hier die nackte Quarkmasse, die im chiralen Limes gegen null geht. Nach [43] erzeugt das spontane Brechen der chiralen Symmetrie einen masseartigen Beitrag zu S^{-1}, der mit γ_5 kommutiert (und nicht antikommutiert) und im chiralen Limes bestehen bleibt. Deswegen wird die rechte Seite von (6.36) im Limes $m_0 \to 0$ nicht verschwinden und der pseudoskalare Vertex muß divergieren. Damit ist die pseudoskalare Dichte einfach nicht wohldefiniert, wenn der chirale Limes nach dem Limes $q^2 \to 0$ vorgenommen wird, was gerade bei unserem Vorgehen so geschieht.

Für die Renormierungskonstante des pseudoskalaren Operators führt (6.8) mit (6.36) zu

$$Z_P(p) = -\frac{12 m_0 Z_q(p)}{\mathrm{trS^{-1}(p)}} \tag{6.37}$$

und mit nicht verschwindendem $\mathrm{trS^{-1}(p)}$ auch im chiralen Limes muß $Z_P(p)$ für $m_0 \to 0$ verschwinden. Und genau dies ist zumindest für kleine μ^2 in den nicht-störungstheoretischen Daten zu sehen. Für große μ^2, d.h. im störungstheoretischen Bereich, sollte das Verhältnis Z_P/Z_S konstant werden, da die Operatoren P and S gleiche anomale Dimensionen haben. Ein Vergleich von Abb. 6.9 mit Abb. 6.12 zeigt keinen solchen Bereich; vermutlich verfälschen bei großen Skalen Diskretisierungsfehler das Ergebnis.

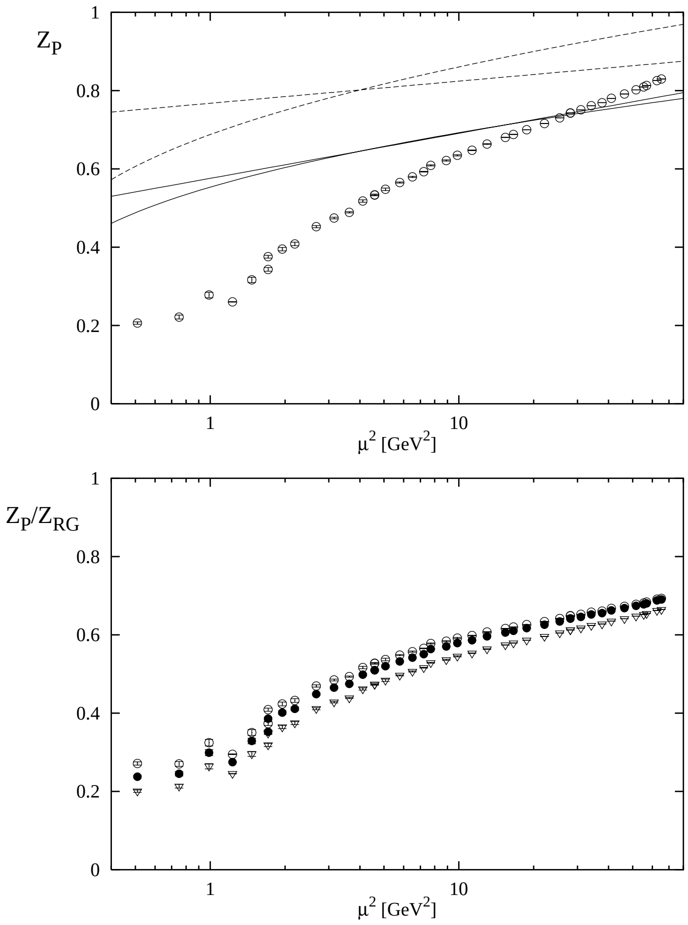

Abbildung 6.12: Z für den pseudoskalaren Operator bei $\beta = 6.20$. Oberes Bild: nicht-störungstheoretische Daten im $\overline{MS}$-Schema, nach (5.40) umgerechnet, und störungstheoretische Ergebnisse der Standard Theorie (gestrichelte Linie) und der tadpole verbesserten Theorie (durchgezogene Linie). Dabei: Geraden =1-Schleifen-Gitter-Störungstheorie (6.31) und (6.32); gekrümmte Kurven = $R_{\mathcal{O}}(\mu,\mu_0)Z(\mu_0)$ mit Startwerten (6.31) und (6.32) bei $\mu_0^2 = 4$ GeV^2 und einem Renormierungsgruppen-Faktor $R_{\mathcal{O}}(\mu,\mu_0)$ hier in 3-Schleifen-Näherung der Kontinuums-Störungstheorie (5.60). Unteres Bild: $Z/R_{\mathcal{O}}(\mu,\mu_0)$ mit $R_{\mathcal{O}}(\mu,\mu_0)$ in 1- bis 3-Schleifen-Näherung (Dreiecke= 1-, schwarze Kreise= 2-, weiße Kreise= 3-Schleifen-Näherung) nach (5.54) ff. (Umrechnung der nicht-störungstheoretischen Z nach $\overline{MS}$ entsprechend 0- bis 2-Schleifen-genähert (5.40), (5.42)).

6.4.3 Operatoren mit Ableitungen

Im folgenden werden Operatoren mit ein bis drei Ableitungen diskutiert, welche einige Momente Hadronischer Strukturfunktionen bestimmen. Wiederum wird ein Fenster gesucht, in dem die Renormierungsskalen μ^2 einerseits groß genug sind, daß die nicht-störungstheoretisch berechneten Renormierungskonstanten im $\overline{MS}$-Schema (6.30) störungstheoretisches Verhalten zeigen, aber μ^2 zum anderen auch klein genug ist, damit Gitter-Diskretisierungsfehler gering sind. Der schon behandelte Operator $\mathcal{O}_{v2b}$ (Abb. 6.10) erfüllt diese Erwartungen. Bei den anderen Operatoren muß man allerdings feststellen, daß störungstheoretisches Verhalten in der Regel erst ab $\mu^2 = 10 GeV^2$ einsetzt, wo Gitter-Diskretisierungsfehler wahrscheinlich nicht mehr zu vernachlässigen sind.

Es werden wiederum für jeden Operator zwei Darstellungen der Renormierungskonstanten gegeben. Zum einen werden die nicht-störungstheoretischen Daten im $\overline{MS}$-Schema den verschiedenen Lösungen der Störungstheorie (Gitter-Störungstheorie, tadpole verbesserte Störungstheorie, jeweils mit und ohne Renormierungsgruppen-Verbesserung) direkt gegenübergestellt. Zum anderen werden die nicht-störungstheoretischen Renormierungskonstanten im $\overline{MS}$-Schema, geteilt durch den Renormierungsgruppen-Faktor $R_{\mathcal{O}}(\mu, \mu_0)$ (5.56), dargestellt, wobei $\mu_0^2 = 4$ GeV^2 ist. Bei letzterem erwartet man einen μ^2-Bereich, wo sich ein Plateau ausbildet.

Generell läßt sich sagen, daß die Ergebnisse ähnlich sind für Operatoren mit gleicher Anzahl der Ableitungen und ansteigen mit der Anzahl der Ableitungen. Dies wird qualitativ, wenn auch nicht quantitativ, von der Gitter-Störungstheorie (und meistens noch besser bei tadpole-Verbesserung) reproduziert.

In Abb. 6.13 und 6.14 werden Operatoren mit einer Ableitung dargestellt. Wie schon erwähnt, zeigen die Operatoren mit Ableitungen in der Regel erst ab $\mu^2 = 10 GeV^2$ störungstheoretisches Verhalten, wo es unwahrscheinlich ist, daß Gitter-Diskretisierungsfehler vernachlässigbar sind. Nur bei $\mathcal{O}_{v2b}$ und $\mathcal{O}_{r2b}$ beginnt eine störungstheoretische μ^2-Abhängigkeit bei etwa 4 oder $5 GeV^2$. Bei einem Vergleich der Operatoren, ist es interessant anzumerken, daß die Operator-Paare $\mathcal{O}_{v2a}$, $\mathcal{O}_{v2b}$ und $\mathcal{O}_{r2a}$, $\mathcal{O}_{r2b}$ jeweils die Eigenschaft haben, zur selben $O(4)$ Darstellung im Kontinuum zu gehören, sich aber unterschiedlich unter $H(4)$ auf dem Gitter zu transformieren. Dadurch sind die Renormierungskonstanten im Kontinuum jeweils gleich, auf dem Gitter können sie aber verschieden sein. Die nicht-störungstheoretisch berechneten Renormierungskonstanten für $\mathcal{O}_{v2a}$ liegen nun systematisch über denen von $\mathcal{O}_{v2b}$, während bei $\mathcal{O}_{r2a}$ und $\mathcal{O}_{r2b}$ kein wesentlicher Unterschied festzustellen ist. Die Störungstheorie (Tabelle 6.2, S. 95) sagt dies tatsächlich ebenfalls voraus, wobei sie jedoch einen geringeren Unterschied zwischen $\mathcal{O}_{v2a}$ und $\mathcal{O}_{v2b}$ liefert.

In Abb. 6.15 und 6.16 werden Operatoren mit zwei und einer mit drei Ableitungen ($\mathcal{O}_{v4}$) dargestellt. Die Renormierungskonstanten sind hier größer als bei Operatoren mit einer Ableitung und sie erstrecken sich auch über einen größeren Zahlenbereich. Wiederum zeigt sich störungstheoretisches Verhalten im allgemeinen erst ab $\mu^2 = 10 GeV^2$. Die tadpole Verbesserung der Störungstheorie bringt hier eine deutliche Annäherung der Standard Störungstheorie an die nicht-störungstheoretischen Daten. Bei einer Analyse der Ergebnisse der Operatoren $\mathcal{O}_{r3}$, $\mathcal{O}_{v3}$ und $\mathcal{O}_{v4}$ sollte man zusätzlich bedenken, daß hier die Mischung mit anderen Operatoren unter Renormierung nicht berücksichtigt worden ist. Vermutlich ist dies neben dem Umstand, daß $\mathcal{O}_{v4}$ aufgrund seiner drei Ableitungen ein sehr ausgedehnter Operator auf dem Gitter ist, der Grund dafür, daß man bei diesem Operator genau genommen überhaupt kein störungstheoretisches Fenster findet.

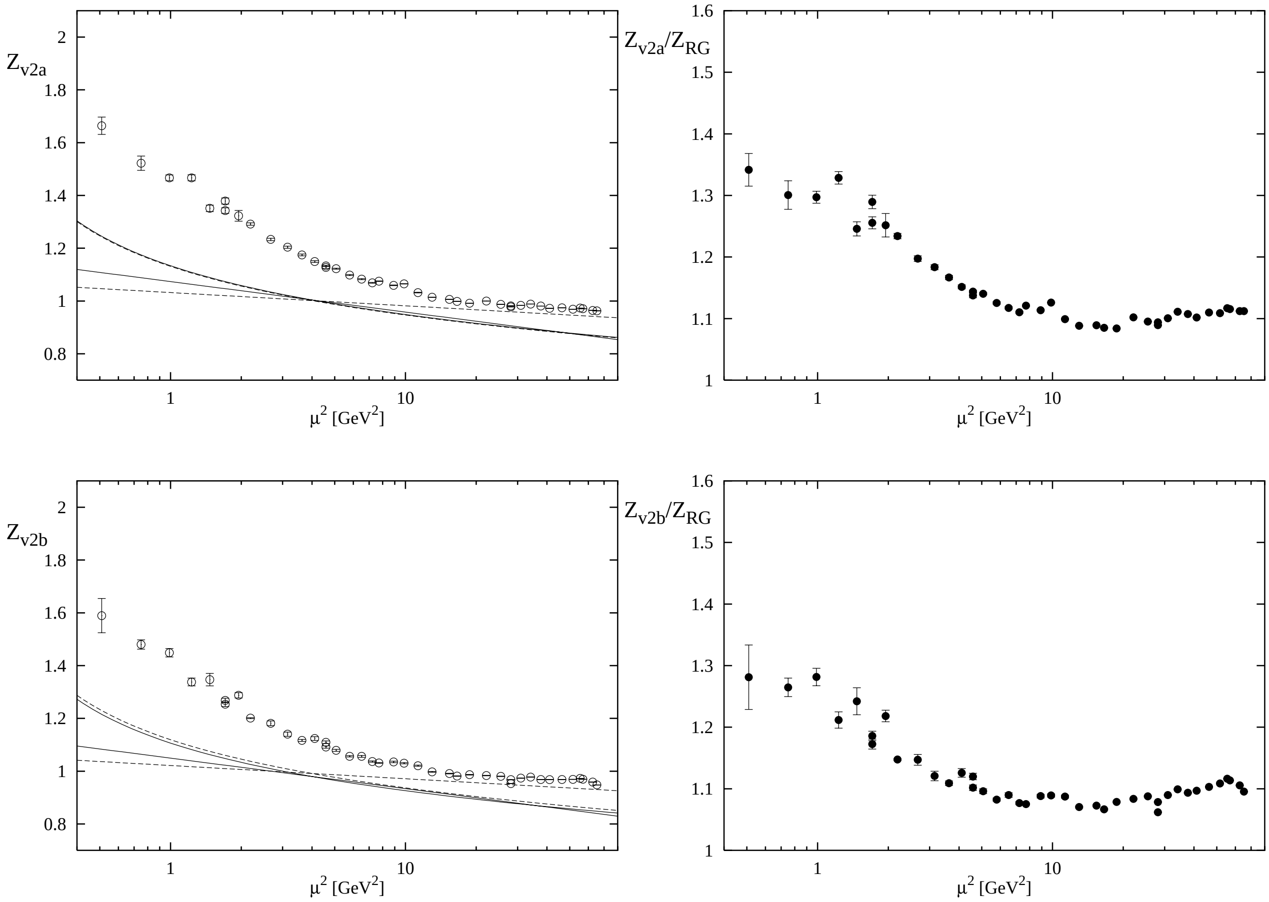

Abbildung 6.13: Z für $\mathcal{O}_{v2b}$ und $\mathcal{O}_{v2a}$ bei $\beta = 6.20$. Bilder links: nicht-störungstheoretische Daten im $\overline{MS}$-Schema, nach (5.45) umgerechnet, und störungstheoretische Ergebnisse der Standard Theorie (gestrichelte Linie) und der tadpole verbesserten Theorie (durchgezogene Linie). Dabei: Geraden =1-Schleifen-Gitter-Störungstheorie (6.31) und (6.32); gekrümmte Kurven = $R_{\mathcal{O}}(\mu, \mu_0)Z(\mu_0)$ mit Startwerten (6.31) und (6.32) bei $\mu_0^2 = 4$ GeV^2 und einem Renormierungsgruppen-Faktor $R_{\mathcal{O}}(\mu, \mu_0)$ hier in 2-Schleifen-Näherung der Kontinuums-Störungstheorie (5.56). Bilder rechts: $Z/R_{\mathcal{O}}(\mu, \mu_0)$ mit $R_{\mathcal{O}}(\mu, \mu_0)$ in 2-Schleifen-Näherung nach (5.54) ff. (Umrechnung der nicht-störungstheoretischen Z nach $\overline{MS}$ 1-Schleifen-genähert (5.45)).

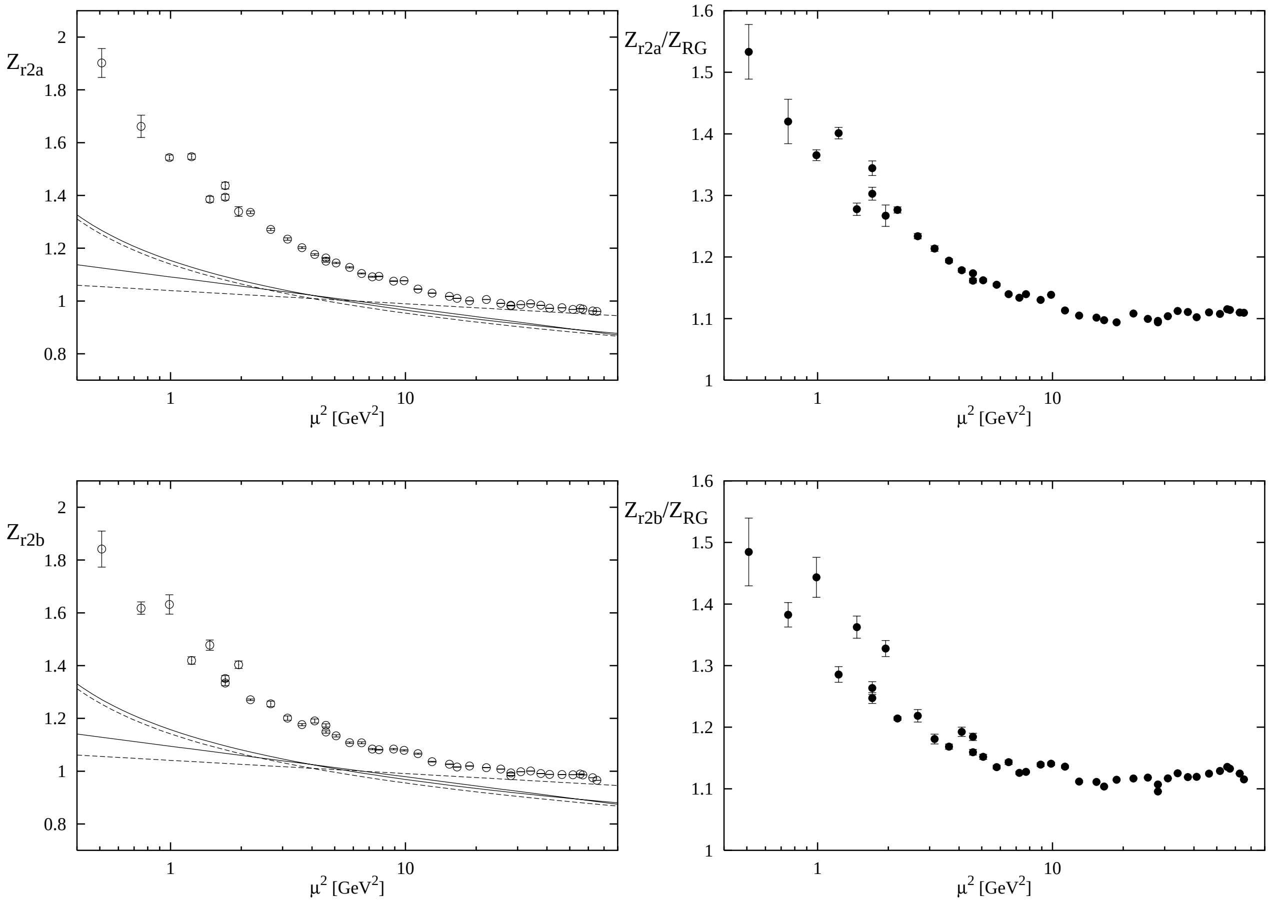

Abbildung 6.14: Z für $\mathcal{O}_{r2a}$ und $\mathcal{O}_{r2b}$ bei $\beta = 6.20$. Bilder links: nicht-störungstheoretische Daten im $\overline{MS}$-Schema, nach (5.45) umgerechnet, und störungstheoretische Ergebnisse der Standard Theorie (gestrichelte Linie) und der tadpole verbesserten Theorie (durchgezogene Linie). Dabei: Geraden =1-Schleifen-Gitter-Störungstheorie (6.31) und (6.32); gekrümmte Kurven = $R_{\mathcal{O}}(\mu, \mu_0)Z(\mu_0)$ mit Startwerten (6.31) und (6.32) bei $\mu_0^2 = 4$ GeV^2 und einem Renormierungsgruppen-Faktor $R_{\mathcal{O}}(\mu, \mu_0)$ hier in 2-Schleifen-Näherung der Kontinuums-Störungstheorie (5.56). Bilder rechts: $Z/R_{\mathcal{O}}(\mu, \mu_0)$ mit $R_{\mathcal{O}}(\mu, \mu_0)$ in 2-Schleifen-Näherung nach (5.54) ff. (Umrechnung der nicht-störungstheoretischen Z nach $\overline{MS}$ 1-Schleifen-genähert (5.45)).

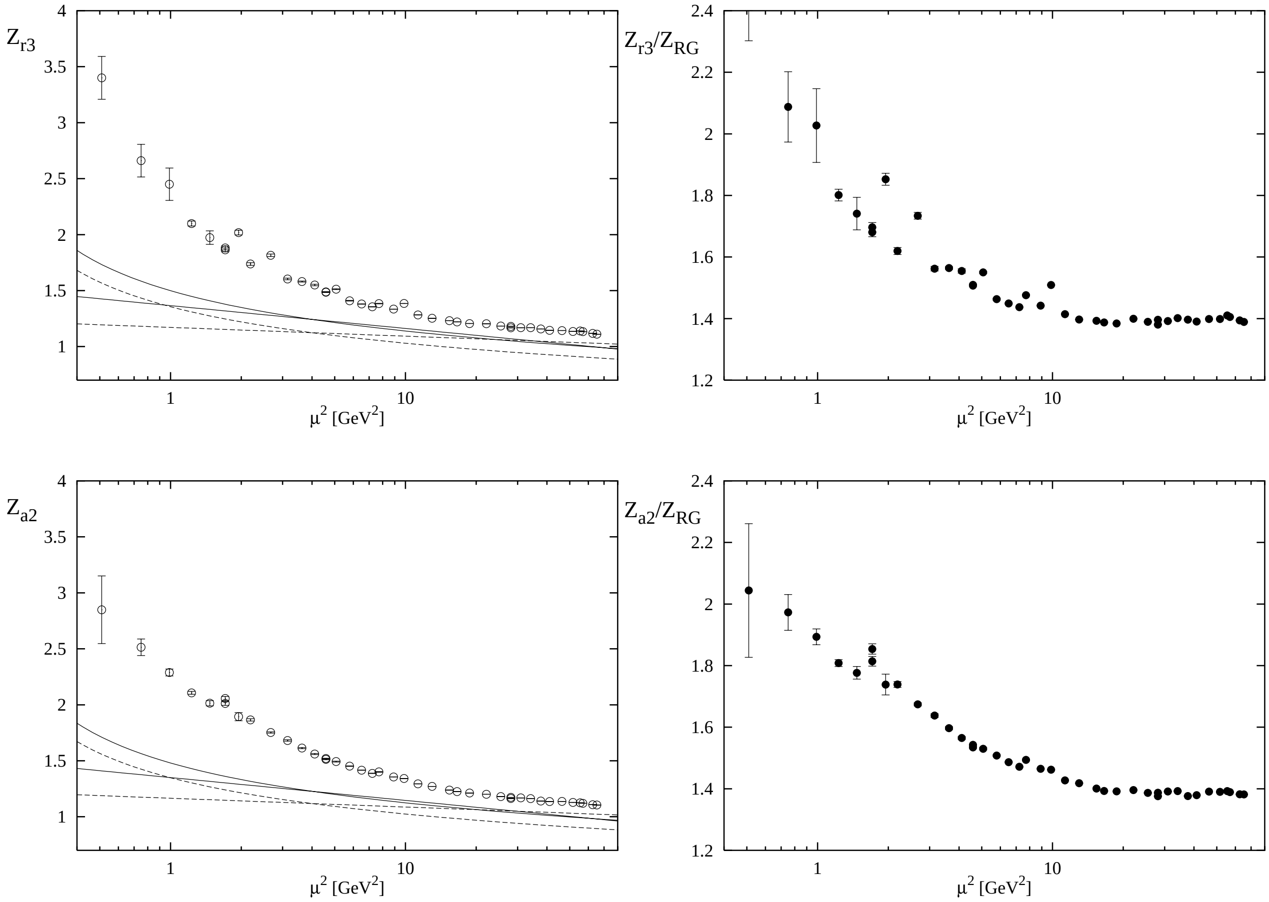

Abbildung 6.15: Z für $\mathcal{O}_{r3}$ und $\mathcal{O}_{a2}$bei $\beta = 6.20$. Bilder links: nicht-störungstheoretische Daten im $\overline{MS}$-Schema, nach (5.45) umgerechnet, und störungstheoretische Ergebnisse der Standard Theorie (gestrichelte Linie) und der tadpole verbesserten Theorie (durchgezogene Linie). Dabei: Geraden =1-Schleifen-Gitter-Störungstheorie (6.31) und (6.32); gekrümmte Kurven = $R_{\mathcal{O}}(\mu, \mu_0)Z(\mu_0)$ mit Startwerten (6.31) und (6.32) bei $\mu_0^2 = 4$ GeV^2 und einem Renormierungsgruppen-Faktor $R_{\mathcal{O}}(\mu, \mu_0)$ hier in 2-Schleifen-Näherung der Kontinuums-Störungstheorie (5.56). Bilder rechts: $Z/R_{\mathcal{O}}(\mu, \mu_0)$ mit $R_{\mathcal{O}}(\mu, \mu_0)$ in 1- bis 2-Schleifen-Näherung nach (5.54) ff. (Umrechnung der nicht-störungstheoretischen Z nach $\overline{MS}$ entsprechend 1-Schleifen-genähert (5.45)).

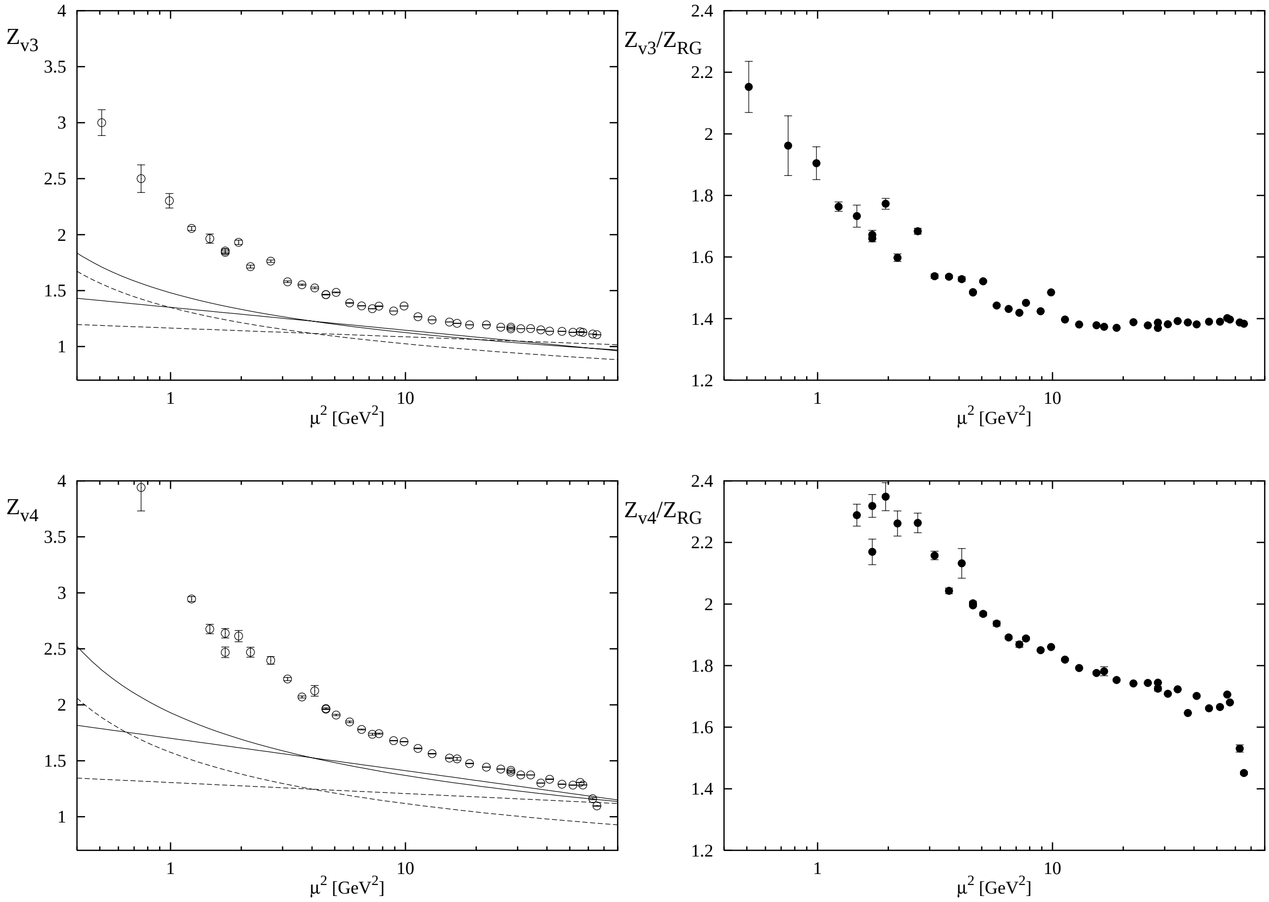

Abbildung 6.16: Z für $\mathcal{O}_{v3}$ und $\mathcal{O}_{v4}$ bei $\beta = 6.20$. Bilder links: nicht-störungstheoretische Daten im $\overline{MS}$-Schema, nach (5.45) umgerechnet, und störungstheoretische Ergebnisse der Standard Theorie (gestrichelte Linie) und der tadpole verbesserten Theorie (durchgezogene Linie). Dabei: Geraden =1-Schleifen-Gitter-Störungstheorie (6.31) und (6.32); gekrümmte Kurven = $R_{\mathcal{O}}(\mu,\mu_0)Z(\mu_0)$ mit Startwerten (6.31) und (6.32) bei $\mu_0^2 = 4$ GeV^2 und einem Renormierungsgruppen-Faktor $R_{\mathcal{O}}(\mu,\mu_0)$ hier in 2-Schleifen-Näherung der Kontinuums-Störungstheorie (5.56). Bilder rechts: $Z/R_{\mathcal{O}}(\mu,\mu_0)$ mit $R_{\mathcal{O}}(\mu,\mu_0)$ in 1- bis 2-Schleifen-Näherung (Dreiecke= 1-, schwarze Kreise= 2-Schleifen-Näherung) nach (5.54) ff. (Umrechnung der nicht-störungstheoretischen Z nach $\overline{MS}$ entsprechend 1-Schleifen-genähert (5.45)).

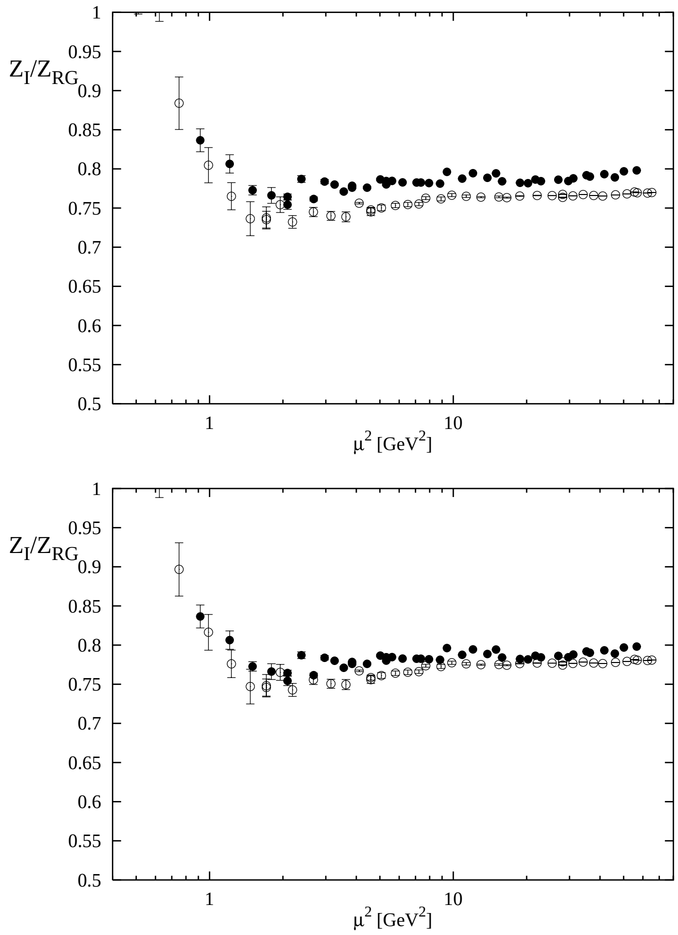

Abbildung 6.17: Oberes Bild: $Z/R_{\mathcal{O}}(\mu,\mu_0)$ für den skalaren Operator bei $\beta = 6.00$ (schwarze Datenpunkte) und $\beta = 6.20$ (weiße Datenpunkte) mit dem Renormierungsgruppen-Faktor $R_{\mathcal{O}}(\mu,\mu_0)$ bei $\mu_0^2 = 4GeV^2$ in 3-Schleifen-Näherung der Kontinuums-Störungstheorie (5.60) (Umrechnung der nichtstörungstheoretischen Z ins $\overline{MS}$-Schema nach (5.42)). Unteres Bild: dasselbe, wobei die $\beta = 6.20$-Daten nach der Renormierungsgruppe (6.39) (im Raum der nackten Parameter) auf $\beta = 6.00$ reskaliert sind.

6.5 Skalenverhalten der Renormierungskonstanten?

In der Einleitung wurde Renormierung in einem größeren Zusammenhang beschrieben (1.1 C und 1.2); dabei wurde betont, daß ein Kontinuumslimes ein fester Bestandteil aller Rechnungen auf dem Gitter ist. Im allgemeinen benötigt man dazu numerische Daten an mehreren Punkten im Phasenraum der nackten Parameter (g_0, m_0) bei möglichst verschiedenen, kleinen physikalischen Gitterpunktabständen a (und gleichbleibender Größe des simulierten physikalischen Raum-Zeit-Volumens auf dem Gitter). Physikalische Größen und in einem MOM- oder $\overline{MS}$-Schema renormierte Größen werden dann linear in a über die verschiedenen Datensätze zum Kontinuumslimes $(g_0, m_0) = (0, 0)$ bei $a = 0$ extrapoliert. Sehr weit sollte man dabei nicht von diesem Limes entfernt sein, da sonst große

Diskretisierungsfehler auftreten und die Festlegung von a in physikalischen Einheiten durch andere physikalische Größen aufgrund von Diskretisierungsfehlern sehr fehlerhaft und willkürlich ist. Ist man sehr nahe am Kontinuumslimes, im sogenannten Bereich mit Skalen-Verhalten, was von der Gitter-Formulierung der Theorie und den betrachteten Größen abhängt und zu untersuchen ist, werden physikalische und μ-renormierte Größen näherungsweise unabhängig von a und es gelten funktionelle Zusammenhänge der nackten Parameter $g_0(a)$, $m_0(a)$ und der Renormierungskonstanten $Z(a)$ vom Gitterpunktabstand a (Renormierungsgruppengleichungen).

Die Herleitung der Renormierungsgruppengleichungen erfolgt analog zu Abschnitt 5.4, nur daß hier die Renormierungsskala μ und die renormierten Größen festgehalten werden und der Gitterabstand a und die nackten Parameter variiert werden. Analog zu (5.50) erhält man für die Operator-Renormierungskonstanten zweier verschiedener Gitterpunktabstände a oder aufgrund des eindeutigen Zusammenhanges $g(a)$ gleichbedeutend zweier verschiedener nackter Kopplungen g:

$$\frac{Z_{\mathcal{O}}}{Z'_{\mathcal{O}}} = \exp\left\{\int_{g'}^{g} \mathrm{dg}_0 \frac{\hat{\gamma}(\mathrm{g}_0)}{\hat{\beta}(\mathrm{g}_0)}\right\} . \tag{6.38}$$

mit einer anomalen Dimension $\hat{\gamma}(g)$ und einer β-Funktion $\hat{\beta}(g)$ auf dem Gitter, wobei hier nach der Gitterkonstanten a differenziert wird. In der 2-Schleifen-Näherung erhält man

$$\frac{Z_{\mathcal{O}}}{Z'_{\mathcal{O}}} = \left(\frac{g^2}{g'^2}\right)^{-\frac{\gamma_0}{2\beta_0}} \left(\frac{1+\frac{\beta_1}{\beta_0}\frac{g^2}{16\pi^2}}{1+\frac{\beta_1}{\beta_0}\frac{g'^2}{16\pi^2}}\right)^{-\frac{1}{2}((\hat{\gamma}_1/\beta_1)-(\gamma_0/\beta_0))} . \tag{6.39}$$

Dabei kann man die Tatsache ausnutzen, daß β_0, β_1, und γ_0 universell sind, so daß $\hat{\beta}_0 = \beta_0$, $\hat{\beta}_1 = \beta_1$ und $\hat{\gamma}_0 = \gamma_0$ ist (siehe Abschnitt 5.4). Die anomale Dimension in 1-Schleifen-Näherung $\hat{\gamma}_1$ dagegen unterscheidet sich von γ_1; man findet (siehe [44])

$$\hat{\gamma}_1 = \gamma_1 + 2\beta_0 C_F \Delta_{\mathcal{O}} - 32\pi^2\gamma_0\left(-0.234101 + n_f \cdot 0.0034435\right) \tag{6.40}$$

für die Eichgruppe SU(3). Die Größen $\Delta_{\mathcal{O}}$ sind in Tabelle 6.1 gegeben; der Koeffizient von γ_0 stammt von dem Verhältnis der Λ-Parameter auf dem Gitter und im $\overline{\mathrm{MS}}$-Schema (siehe z.B. [17]).

Dieser Arbeit zugrunde liegen Daten zur Berechnung von Renormierungskonstanten bei zwei verschiedenen nackten Kopplungen g ($g = \sqrt{6/\beta}$ mit $\beta = 6.00, 6.20$), so daß man die Gültigkeit von (6.39) hier untersuchen kann. Da die beiden nackten Kopplungen sich nicht wesentlich unterscheiden und (6.39) im allgemeinen nicht sehr von 1 verschieden ist, kann dieser Test allerdings nicht sehr genau sein. Dennoch ist eine Wirkung von (6.39) zu erkennen. In Abb. 6.17 kann man am Beispiel des skalaren Operators einen deutlich sichtbaren Effekt einer Reskalierung der $\beta = 6.20$-Daten auf $\beta = 6.00$ feststellen.

In Abb. 6.18 bis 6.20 wird die Reskalierung der $\beta = 6.20$-Daten auf 6.00 für lokale Operatoren und Operatoren der OPE gezeigt. Die Renormierungskonstanten werden, durch den Renormierungsgruppen-Faktor $R_{\mathcal{O}}(\mu, \mu_0)$, (5.54) ff., geteilt, dargestellt.[4]

Generell kann man sagen, daß die Reskalierung in die richtige Richtung wirkt und z.T. eine gute Übereinstimmung der Daten bewirkt, daß Gitterfehler aber klar zu erkennen sind.

Bei den lokalen Operatoren zeigt der lokale Vektor-Strom sehr starke Gitter-Artefakte in Form einer funktionellen Abhängigkeit der Renormierungskonstanten von der Renormierungsskala; hier kann und sollte keine Übereinstimmung der Daten durch (6.39) erreicht werden, da die Gitter-Fehler bei den näher am Kontinuum liegenden $\beta = 6.20$-Daten geringer sein sollten. Der Axialvektor-Strom zeigt denselben Effekt wesentlich geringer; bei diesem und dem skalaren Operator kann man näherungsweise Skalen-Verhalten erkennen. Der skalare Operator weist Gitterfehler durch eine größere Streuung der Datenpunkte auf. Allen lokalen Operatoren gemeinsam ist das Ansteigen der Diskrepanz zwischen den reskalierten $\beta = 6.20$-Daten und den Daten bei $\beta = 6.00$ auf großen Renormierungsskalen μ^2. Aufgrund der dort ansteigenden Diskretisierungsfehler ist dies zu erwarten.

Die Operatoren der OPE weisen eine sehr viel stärkere Streuung der Datenpunkte auf, scheinen aber im Rahmen dieser Genauigkeit durch die Reskalierung der $\beta = 6.20$-Daten zur Deckung gebracht werden zu können, also Skalen-Verhalten zu zeigen. Dies gilt auch für einen μ^2-Bereich, der störungstheoretisch nicht zu beschreiben ist und deutet darauf hin, daß diese nicht-störungstheoretischen Resultate möglicherweise physikalisch sind.

[4]Beim Vektor- und Axialvektor-Strom ist diese Größe identisch mit der Renormierungskonstanten allein, da hier $R_{\mathcal{O}}(\mu, \mu_0) = 1$ ist.

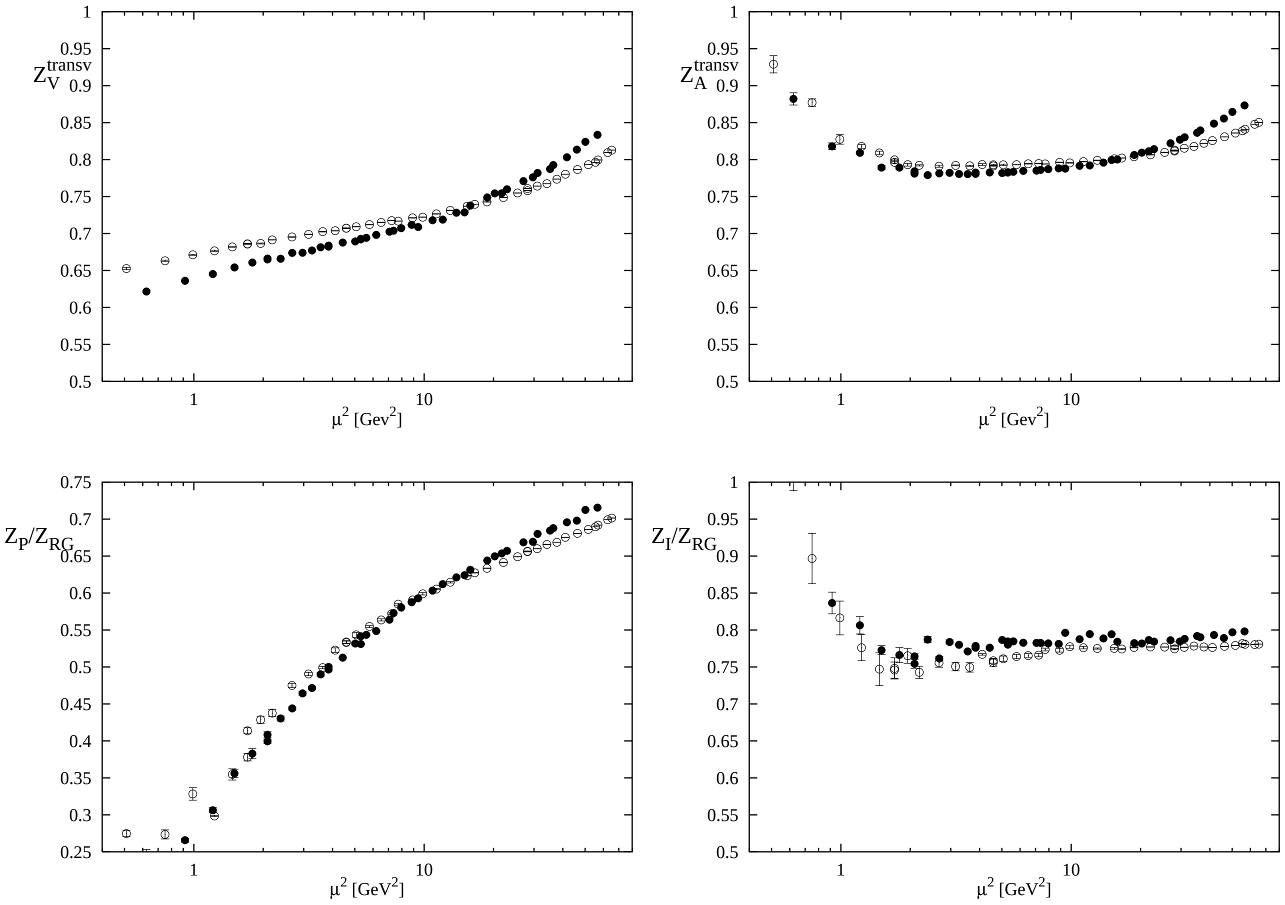

Abbildung 6.18: $Z/R_{\mathcal{O}}(\mu, \mu_0)$ für den Vektor-Strom und den Axialvektor-Strom (transversale Komponente nach (6.15) berechnet) und den pseudoskalaren und skalaren Operator bei $\beta = 6.00$ (schwarze Datenpunkte) und $\beta = 6.20$ (weiße Datenpunkte), wobei die $\beta = 6.20$-Daten nach der Renormierungsgruppe (6.39) (im Raum der nackten Parameter) auf $\beta = 6.00$ reskaliert sind. Für den Vektor-Strom und den Axialvektor-Strom ist der Renormierungsgruppen-Faktor $R_{\mathcal{O}}(\mu, \mu_0) = 1$; für den pseudoskalaren und skalaren Operator ist $R_{\mathcal{O}}(\mu, \mu_0)$ bei $\mu_0^2 = 4GeV^2$ in 3-Schleifen-Näherung der Kontinuums-Störungstheorie nach (5.60) (Umrechnung der nicht-störungstheoretischen Z ins $\overline{MS}$-Schema nach (5.42)).

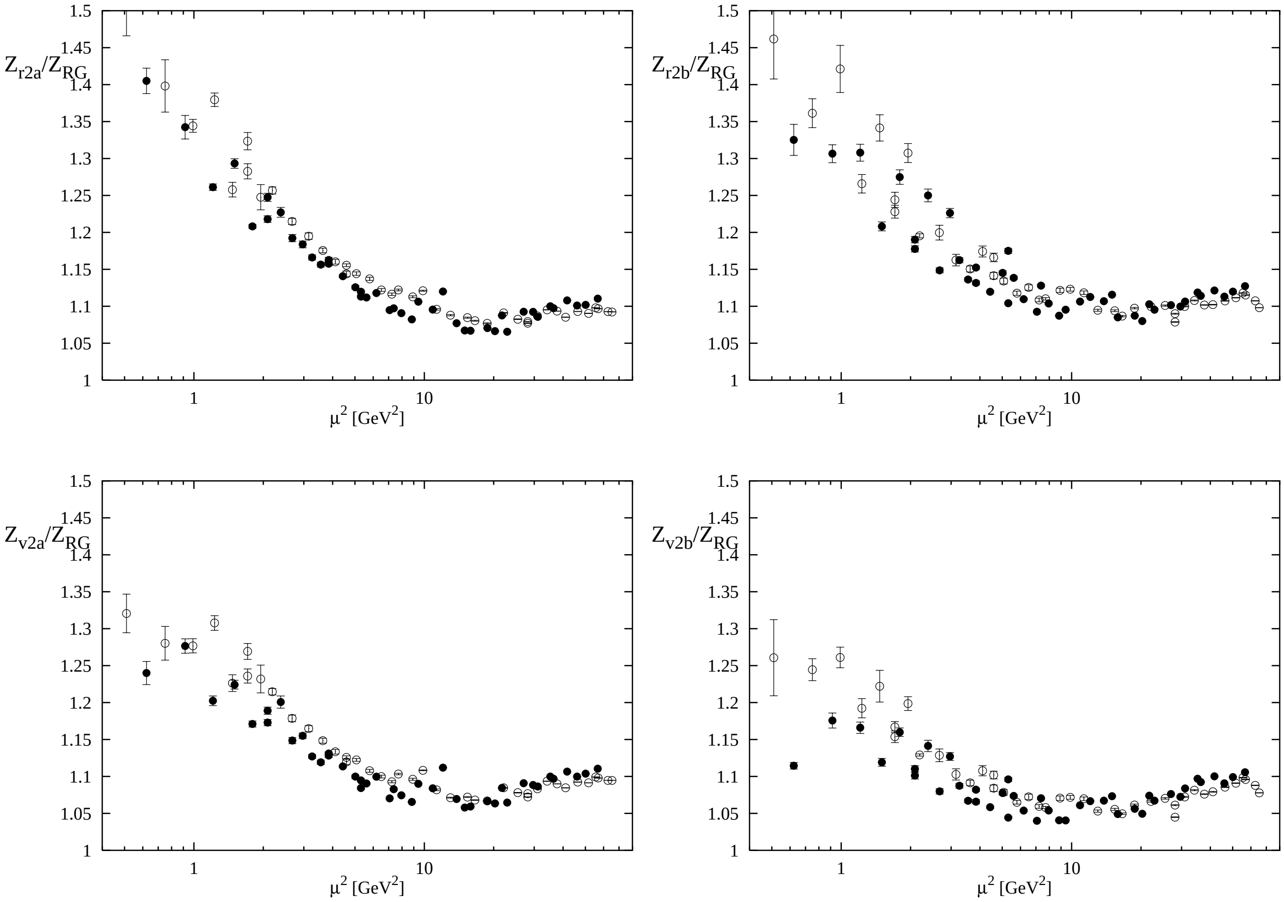

Abbildung 6.19: $Z/R_{\mathcal{O}}(\mu, \mu_0)$ für $\mathcal{O}_{r2a}$, $\mathcal{O}_{r2b}$, $\mathcal{O}_{v2a}$ und $\mathcal{O}_{v2b}$ bei $\beta = 6.00$ (schwarze Datenpunkte) und $\beta = 6.20$ (weiße Datenpunkte), wobei die $\beta = 6.20$-Daten nach der Renormierungsgruppe (6.39) (im Raum der nackten Parameter) auf $\beta = 6.00$ reskaliert sind. Der Renormierungsgruppen-Faktor $R_{\mathcal{O}}(\mu, \mu_0)$ bei $\mu_0^2 = 4GeV^2$ ist in 2-Schleifen-Näherung der Kontinuums-Störungstheorie nach (5.56) (Umrechnung der nicht-störungstheoretischen Z ins $\overline{MS}$-Schema nach (5.45)).

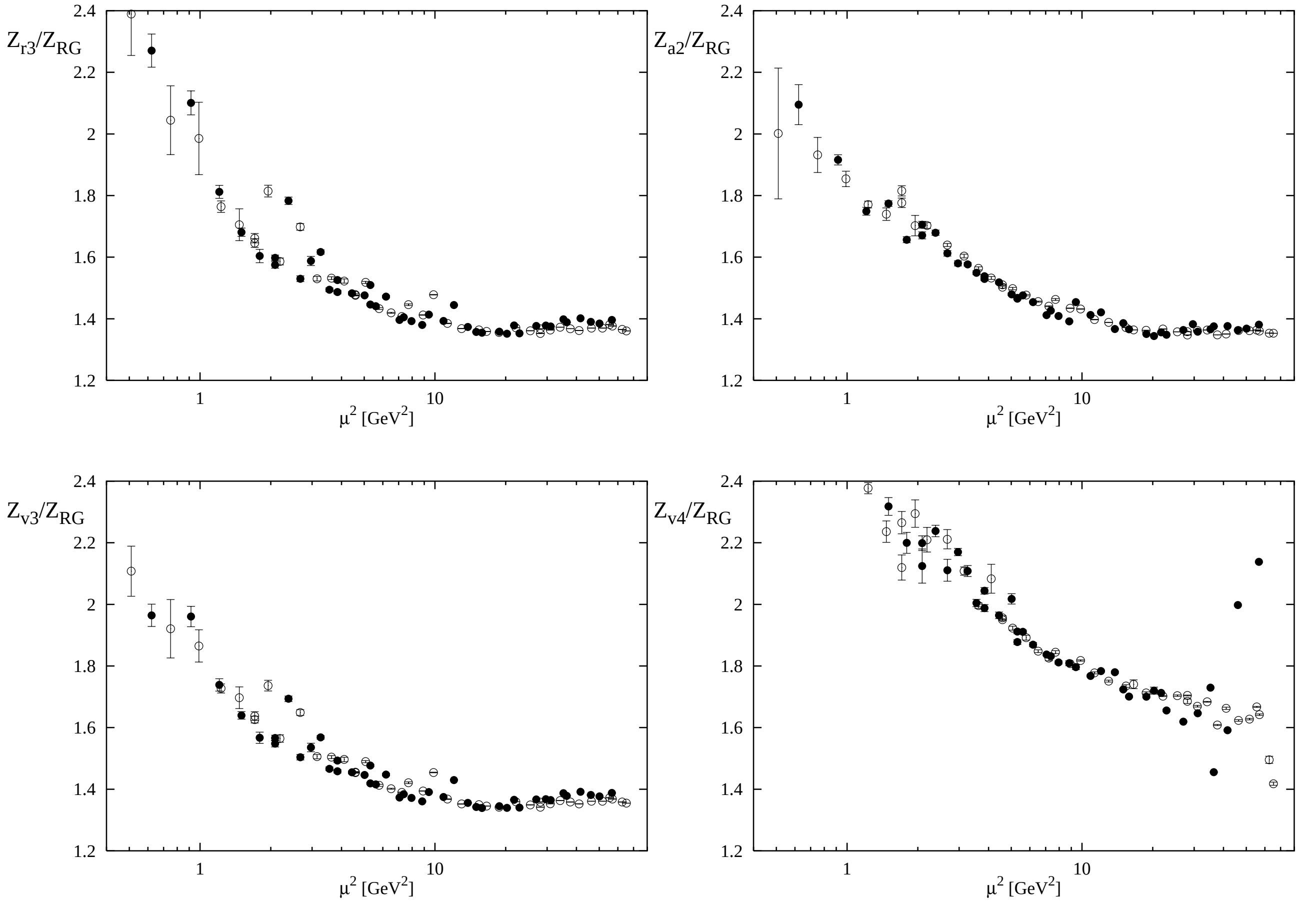

Abbildung 6.20: $Z/R_{\mathcal{O}}(\mu,\mu_0)$ für $\mathcal{O}_{r3}$, $\mathcal{O}_{a2}$, $\mathcal{O}_{v3}$ und $\mathcal{O}_{v4}$ bei $\beta = 6.00$ (schwarze Datenpunkte) und $\beta = 6.20$ (weiße Datenpunkte), wobei die $\beta = 6.20$-Daten nach der Renormierungsgruppe (6.39) (im Raum der nackten Parameter) auf $\beta = 6.00$ reskaliert sind. Der Renormierungsgruppen-Faktor $R_{\mathcal{O}}(\mu,\mu_0)$ bei $\mu_0^2 = 4GeV^2$ ist in 2-Schleifen-Näherung der Kontinuums-Störungstheorie nach (5.56) (Umrechnung der nicht-störungstheoretischen Z ins $\overline{MS}$-Schema nach (5.45)).

6.6 Berechnung der Non-Singlet-Momente der Strukturfunktionen F_1,F_2 des Nukleons

Im tief inelastischen Limes ($Q^2 \to \infty$, x fest, siehe (3.2)) gilt in führender Ordnung der Operator-Produkt-Entwicklung für die Momente der unpolarisierten Strukturfunktionen F_1, F_2 im Fall der Elektron-Proton-Streuung:

$$2\int_0^1 dx\ x^{n-1} F_1(x,Q^2) \;=\; \sum_{f=u,d,G} c_{1,n}^{(f)}(Q^2/\mu^2, g^2(\mu))\ v_n^{(f)}(\mu) + O(1/Q^2), \quad (6.41)$$

$$\int_0^1 dx\ x^{n-2} F_2(x,Q^2) \;=\; \sum_{f=u,d,G} c_{2,n}^{(f)}(Q^2/\mu^2, g^2(\mu))\ v_n^{(f)}(\mu) + O(1/Q^2) \quad (6.42)$$

Es ist $n = 2,4,6,...$; $f = u,d$ indiziert Beiträge von u- bzw. d-Quark-Operatoren ($f = G$ von Gluonen-Operatoren); μ stellt die Skala des Renormierungsschemas, hier das $\overline{MS}$-Schema, dar, auf der sowohl die reduzierten Proton Matrixelemente $v_n^{(f)}$ (genauer: die Operatoren darin) als auch die Wilson-Koeffizienten $c_{i,n}^{(f)}$ berechnet werden. Mit der Abkürzung für die Momente

$$M_{1,n}(Q^2) = \int_0^1 dx\ x^{n-1} F_1(x,Q^2), \quad M_{2,n}(Q^2) = \int_0^1 dx\ x^{n-2} F_2(x,Q^2) \quad (6.43)$$

gilt für den Non-Singlet-Anteil (experimentell z.B. die Differenz von F_2 bei Elektron-Proton- und Elektron-Neutron-Streuung: $F_2^{ep} - F_2^{en}$) dann näherungsweise:

$$2M_{1,n}^{NS}(Q^2) \;\approx\; c_{1,n}^{NS}(1, g^2(Q)) \cdot R_n^{NS}(g^2(Q), Q, \mu) \cdot v_n^{NS}(\mu) \quad (6.44)$$

$$M_{2,n}^{NS}(Q^2) \;\approx\; c_{2,n}^{NS}(1, g^2(Q)) \cdot R_n^{NS}(g^2(Q), Q, \mu) \cdot v_n^{NS}(\mu), \quad (6.45)$$

wobei für das reduzierte Matrixelement v_n^{NS} (siehe (3.31) ff., hier mit $J = n$, und siehe (4.3)) gilt:

$$\langle p \mid \mathcal{O}_{\{\mu_1 \ldots \mu_J\}}^{(u,d;NS,j)}(\mu) - \text{Spuren} \mid p \rangle \;=\; 2 v_n^{NS}(\mu) \Big(p_{\mu_1} \ldots p_{\mu_n} - \text{Spuren} \Big). \quad (6.46)$$

Mit einem auf dem Gitter multiplikativ renormierbar angenommenen v_n^{NS} bzw. Operator $\mathcal{O}_{\{\mu_1 \ldots \mu_J\}}^{(u,d;NS,j)}$ ist dabei:

$$v_n^{NS}(\mu) \;=\; Z_{n,\mathcal{O}}^{NS}(\mu, a) \cdot v_{n,\mathcal{O}}^{NS}(a) \quad (6.47)$$

$$\mathcal{O}_{\{\mu_1 \ldots \mu_J\}}^{(u,d;NS,j)}(\mu) \;=\; Z_{n,\mathcal{O}}^{NS}(\mu, a) \cdot \mathcal{O}_{\{\mu_1 \ldots \mu_J\}}^{(u,d;NS,j)}(a)$$

$$\mathcal{O}_{\mu_1 \ldots \mu_n}^{(u,d;NS,j)}(a) \;=\; \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \bar{\psi}_{f_1} \tau_{f_1,f_2}^{(j)} \gamma_{\mu_1} \overleftrightarrow{D}_{\mu_2} \ldots \overleftrightarrow{D}_{\mu_n} \psi_{f_2}. \quad (6.48)$$

$j = 1,2,3$ zählt die Pauli-Matrizen durch, für $j = 3$ ist der Operator $\mathcal{O}_{\mu_1 \ldots \mu_n}^{(u,d;NS,j)}(a)$ z.B.:

$$\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \left\{\bar{\psi}_u \gamma_{\mu_1} \overset{\leftrightarrow}{D}_{\mu_2} \dots \overset{\leftrightarrow}{D}_{\mu_n} \psi_u - \bar{\psi}_d \gamma_{\mu_1} \overset{\leftrightarrow}{D}_{\mu_2} \dots \overset{\leftrightarrow}{D}_{\mu_n} \psi_d\right\}. \tag{6.49}$$

Des weiteren gilt für die Wilson-Koeffizienten in 2. Ordnung Kontinuumsstörungstheorie für beliebiges n (siehe [23], die Ladungsfaktoren $Q^{(f)2}$ für $f = u(d)$-Quarks seien hier und im folgenden gleich 1 gesetzt):

$$c_{1,n}^{NS}(1, g^2(Q)) = \left(1 + \frac{g^2(Q)}{16\pi^2}[B_{2,n}^{NS} - B_{L,n}^{NS}]\right) \tag{6.50}$$

$$c_{2,n}^{NS}(1, g^2(Q)) = \left(1 + \frac{g^2(Q)}{16\pi^2} B_{2,n}^{NS}\right) \tag{6.51}$$

mit

$$\begin{aligned} B_{2,n}^{NS} &= \frac{4}{3}\{3\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} - 4\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2} - \frac{2}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} + \\ &\quad 4\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{j} + \frac{3}{n} + \frac{4}{(n+1)} + \frac{2}{n^2} - 9\} \end{aligned} \tag{6.52}$$

$$B_{L,n}^{NS} = \frac{16}{3}[1/(n+1)]. \tag{6.53}$$

Der Umrechnungsfaktor R_n^{NS} auf die Renormierungsskala μ des reduzierten Matrixelementes v_n^{NS} ist nach (5.56)

$$R_n^{NS}(g^2(Q), Q, \mu) = \left(\frac{g^2(Q)}{g^2(\mu)}\right)^{\frac{\gamma_0}{2\beta_0}} \left(\frac{1 + \frac{\beta_1}{\beta_0}\frac{g^2(Q)}{16\pi^2}}{1 + \frac{\beta_1}{\beta_0}\frac{g^2(\mu)}{16\pi^2}}\right)^{\frac{1}{2}((\gamma_1/\beta_1) - (\gamma_0/\beta_0))} \tag{6.54}$$

Die laufende Kopplungskonstante $g(t)$ ist nach (5.57)

$$\frac{g^2(t)}{16\pi^2} = \frac{1}{\beta_0 \ln(t^2/\Lambda^2)} - \frac{\beta_1}{\beta_0^3}\frac{\ln\ln(t^2/\Lambda^2)}{\ln^2(t^2/\Lambda^2)} + \cdots. \tag{6.55}$$

mit $\Lambda = \Lambda_{\overline{\mathrm{MS}}} = 230$ MeV (siehe (6.35) folgendes).

Konkret kann man beispielsweise für die zweiten Momente ($n = 2$) die Operatoren (4.35) oder (4.38)

$$\mathcal{O}_{v_{2,a}} = \overline{\psi}\tfrac{1}{2}\left(\gamma_1 \overset{\leftrightarrow}{D}_4 + \gamma_4 \overset{\leftrightarrow}{D}_1\right)\psi, \tag{6.56}$$

$$\mathcal{O}_{v_{2,b}} = \overline{\psi}\left(\gamma_4 \overset{\leftrightarrow}{D}_4 - \tfrac{1}{3}\gamma_1 \overset{\leftrightarrow}{D}_1 - \tfrac{1}{3}\gamma_2 \overset{\leftrightarrow}{D}_2 - \tfrac{1}{3}\gamma_3 \overset{\leftrightarrow}{D}_3\right)\psi, \tag{6.57}$$

auf dem Gitter wählen und einerseits für u- und andererseits für d- Quarkfelder reduzierte Matrixelemente $v_{2,\mathcal{O}}(a)$ über (4.9) bzw. (4.10) ausrechnen. Aus der Differenz der beiden erhält man gemäß (6.49) ein reduziertes Non-Singlett Matrixelement $v_{2,\mathcal{O}}^{NS}(a)$.

Die $\overline{MS}$-Renormierungskonstanten $Z^{NS}_{2,\mathcal{O}}(\mu,a)$ kann man störungstheoretisch aus (6.31) und nicht-störungstheoretisch aus den über (6.30) nach $\overline{MS}$ umgewandelten *MOM*-Schema-Daten (siehe Abb.6.2-6.5 und Tabellen in Anhang A.) entnehmen.

Auf einem 16^3x32-Gitter ($a^{-1} = 1.95 GeV$, $\beta = 6.0$, quenched Daten extrapoliert zum chiralen Limes) kann man z.B. bei Verwendung der Operatoren $\mathcal{O}_{v_{2,a}}$ und $\mathcal{O}_{v_{2,b}}$ für das zweite Moment $M^{NS}_{2,2}(Q^2)$ (entsprechend $M^{NS}_{1,2}(Q^2)$) folgende numerischen Ergebnisse bekommen (siehe z.B. [45], rekonstruktiere unrenormierte reduzierte Matrixelemente aus dort angegebenen $\overline{MS}$-Eregbnissen mit Hilfe der störungstheoretischen $\overline{MS}$-Renormierungskonstanten aus Tabelle 6.2):

$$\begin{aligned} v^{(u)}_{2,a}(a) = 0.373(26), \quad v^{(d)}_{2,a}(a) = 0.171(13), \quad v^{NS}_{2,a}(a) = 0.202(39),\\ v^{(u)}_{2,b}(a) = 0.450(23), \quad v^{(d)}_{2,b}(a) = 0.191(10), \quad v^{NS}_{2,b}(a) = 0.259(33). \end{aligned} \tag{6.58}$$

Die Renormierungskonstanten auf der Skala $\mu^2 = 4GeV^2$ im $\overline{MS}$-Schema, nicht-störungstheoretisch [störungstheoretisch] ermittelt, sind:

$$\begin{aligned} Z^{NS}_{2,v2a}(\mu,a) &= 1.1231(28), \quad [0.9880]\\ Z^{NS}_{2,v2b}(\mu,a) &= 1.0651(24), \quad [0.9772]. \end{aligned} \tag{6.59}$$

Damit sind die renormierten reduzierten Matrixelemente auf der Skala $\mu^2 = 4GeV^2$ im $\overline{MS}$-Schema (gemittelt über die beiden Operatoren), nicht-störungstheoretisch [störungstheoretisch] berechnet:

$$v^{NS}_2(\mu) = 0.25(4), \quad [0.23(4)]. \tag{6.60}$$

Mit dem Wilson-Koeffizienten $c^{NS}_{2,2}(1,g^2(Q)) = 1 + \frac{g^2(Q)}{16\pi^2}\cdot\frac{4}{9}$ erhält man schließlich bei $Q^2 = \mu^2 = 4GeV^2$ (dabei $R^{NS}_n(g^2(Q),Q,\mu) = 1$) praktisch unverändert (bei Verwendung nicht-störungstheoretischer [störungstheoretischer] Renormierungskonstanten):

$$M^{NS}_{2,2}(Q^2) = 0.25(4), \quad [0.23(4)]. \tag{6.61}$$

Dies ist zu vergleichen mit den phänomenologischen (experimentellen) Resultaten [46]. Dort hat man durch Messung der Strukturfunktion $F_2(x,Q^2)$ bei $Q^2 = 4GeV^2$ eine Parametrisierung gemäß dem Parton-Modell mit Quark- und Gluon-Verteilungen (MRS-Parametrisierung) durchgeführt. Das zweite Non-Singlet Moment $M^{NS}_{2,2}(Q^2)$ ergibt sich danach mit den Valenzquark-Verteilungen u_v und d_v (Callan-Gross Relation, siehe (3.22)) zu

$$M^{NS}_{2,2}(Q^2) = \int_0^1 dx(xu_v) - \int_0^1 dx(xd_v) = 0.282 - 0.109 = 0.17 \quad (\text{Fit } D_-). \tag{6.62}$$

Diese Ergebnisse lassen sich folgendermaßen bewerten:

Die mit den Renormierungskonstanten (6.59) renormierten reduzierten Matrixelemente v_{2a} und v_{2b} (6.58) zeigen näherungsweise konsistente Zahlenwerte. (Dies gilt bei Verwendung von nicht-störungstheoretischen und störungstheoretischen Renormierungskonstanten.) Die Unterschiede weisen allerdings auf Diskretisierungsfehler auf dem Gitter hin.

Aufgrund der Verwendung der quenched Näherung, also dem Weglassen von Quarkschleifen-Beiträgen, d.h. Seequark-Beiträgen, ist zu erwarten, daß Größen, die vorwiegend Valenzquark-Verteilungen beschreiben, physikalischere Resultate liefern als Größen, die im gleichen Maße Seequark-Anteile enthalten. Und genau dies ist zu sehen - vergleicht man die auf dem Gitter gewonnenen Non-Singlet-Ergebnisse (6.58), renormiert mit (6.59), mit dem experimentellen Wert (6.62), so erkennt man hier eine bessere Übereinstimmung als für die darin enthaltenen einzelnen u- und d-Quark-Verteilungen.

Andererseits ist ein Unterschied zwischen quenched Gitter-Resultaten und experimentellen Daten prinzipiell nicht überraschend. Für das reale Proton müssen sich die mittleren Impulsbeiträge der Valenzquarks (6.62), der Seequarks und der Gluonen zu 1 aufaddieren. Daß das quenched Ergebnis für die Valenzquarks (6.62) größer als der experimentelle Meßwert ist, kann danach als Kompensierung des fehlenden Seequark-Anteils gesehen werden.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

Die Berechnung der Strukturfunktionen des Protons (allgemeiner Nukleons), welche quantitative Aussagen über den Aufbau eines Protons aus Quarks und Gluonen zulassen, ist ein außerordentlich komplexes Problem. Über die Methode der Wilson Operator-Produkt-Entwicklung (OPE) kann das Problem faktorisiert werden. Die störungstheoretisch berechenbaren Wilson-Koeffizienten beschreiben die funktionelle Abhängigkeit vom Energie-Impuls-Transfer Q^2 bei tief-inelastischer Elektron-Proton-Streuung; die nur nicht-störungstheoretisch berechenbaren reduzierten Matrixelemente die Bindung der Quarks und Gluonen im Proton. Das QCDSF-Projekt bei DESY verfolgt zur Zeit unter anderem das Ziel, mit Hilfe sehr leistungsfähiger Parallel-Großrechner letztere Größen über die Funktionalintegral-Formulierung der QCD *ab initio* numerisch zu berechnen. Dazu müssen hadronische Matrixelemente $\langle p, \vec{s}|\mathcal{O}^{(f)}_{\{\mu_1 \cdots \mu_n\}} - \text{Spuren}|p, \vec{s}\rangle$ auf einem Raum-Zeit-Gitter endlicher Ausdehnung numerisch berechnet und renormiert werden. Letzteres ist Hauptgegenstand dieser Arbeit.

Es wurde ausführlich nicht-störungstheoretische Renormierung ähnlich zur Vorgehensweise im Kontinuum für verschiedene bilineare Quark-Operatoren im Rahmen der Gitter-QCD studiert. D.h. die etwas symbolische (störungstheoretische) Renormierungsbedingung für amputierte Quark Vertexfunktionen bei $p^2 = \mu^2$,

$$\Gamma_R(p) \equiv \Gamma_{Born}(p)\Big|_{p^2=\mu^2}, \tag{7.1}$$

wurde auf dem Gitter mit Hilfe numerischer Simulationen nachgeahmt. (Γ_{Born} ist die nullte Ordnung der Störungstheorie auf dem Gitter.)

Insbesondere twist-2 Operatoren in der unpolarisierten (polarisierten) tief-inelastischen Streuung wurden für Spins ≤ 4 (≤ 3) untersucht. Dabei wurden Standard Wilson Fermionen in der quenched Approximation bei zwei verschiedenen Gitterpunkt-Abständen auf den Gittern 16^3x32 ($a^{-1} = 1.95 GeV$, $\beta = 6.0$) und 24^3x48 ($a^{-1} = 2.65 GeV$, $\beta = 6.2$) mit den räumlichen Ausdehnungen 1.6 fm bzw. 1.8 fm verwendet.

Neben einer theoretischen Beschreibung, wie Proton Greensfunktionen und Quark-Greensfunktionen über Dirac-Gleichungen auf dem Gitter zu berechnen sind, wurden technische Einzelheiten der Eichfixierung auf dem Gitter und einer effektiven Impuls-Quellen-Methode zur Berechnung von Quark-Greensfunktionen dargestellt. Durch den Einsatz von Impuls-Quellen konnte eine hohe, sonst nur bei Verwendung einer hohen Statistik erreichbare Genauigkeit erzielt werden, so daß systematische Fehler (insbesondere cut-off Effekte) klar erkennbar waren.

Um einen Kontakt der nicht-störungstheoretisch berechneten Renormierungskonstanten zur Störungstheorie zu bekommen (die Renormierungskonstanten sind mit den Wilson-Koeffizienten zu multiplizieren) würde man gern ein Fenster sehen, wo die Renormierungsskala μ groß genug ist, so daß man der Störungstheorie trauen kann, aber auch klein genug ist, so daß cut-off Effekte zu vernachlässigen sind. Zu einer solchen Analyse mußten die in einem MOM-Schema auf dem Gitter berechneten Renormierungskonstanten mit Hilfe der Kontinuums-Störungstheorie ins $\overline{MS}$-Schema umgerechnet werden.

Während der axiale Vektorstrom und die skalare Dichte das erwartete (störungstheoretische) Verhalten zeigen, konnte ein solches Fenster bei dem lokalen Vektorstrom und der pseudoskalaren Dichte nicht gefunden werden. Der lokale Vektorstrom weist auf dem Gitter ganz deutlich Diskretisierungsfehler in Form einer funktionellen Abhängigkeit der Renormierungskonstanten von der Renormierungsskala auf (im Kontinuum liegt aufgrund der verschwindenden anomalen Dimension Unabhängigkeit von der Renormierungsskala vor), bei der pseudoskalaren Dichte konnte für kleine Renormierungsskalen μ gezeigt werden, daß eine Renormierung bei Impulsübertrag $q = 0$ (auf den Operator) nicht wohldefiniert ist.

Bei den Operatoren der OPE mit einer oder mehreren kovarianten Ableitungen scheint störungstheoretisches Verhalten erst bei sehr großen Renormierungsskalen ab $\mu^2 \approx 10\mathrm{GeV}^2$ einzusetzen, wo Diskretisierungsfehler einen großen Einfluß haben könnten. Allerdings gehorchen die Renormierungskonstanten bei kleineren Skalen μ annähernd der Renormierungsgruppe des nackten Parameters β; dies kann einerseits nur ein Artefakt aufgrund der sich nicht stark unterscheidenden β-Werte sein oder andererseits auf Skalen- oder Kontinuumsverhalten hindeuten und damit zeigen, daß die Renormierungskonstanten physikalische Bedeutung haben. Dann könnten entweder fehlende höhere Ordnungen der Störungstheorie nur scheinbar den Eindruck nicht störungstheoretischen Verhaltens erwecken oder im Bereich unter $\mu^2 \approx 10\mathrm{GeV}^2$ dominieren nicht-störungstheoretische Effekte wie Renormalons. Diskretisierungsfehler in Form starker Streuung der Daten sind allerdings erkennbar. Bis auf Ausnahmen ist es zur Zeit so nicht sinnvoll, die Renormierungskonstanten der Operatoren der OPE bei z.B. $\mu^2 = 4\mathrm{GeV}^2$ mit den dazugehörigen Wilson-Koeffizienten zu multiplizieren.

Diskretisierungsfehler zeigen sich bei allen Renormierungskonstanten mehr oder weniger deutlich, was einfach daran liegt, daß der prinzipiell wichtige Kontinuums-Limes in dieser Arbeit nicht durchgeführt wurde. Es scheint daher sinnvoll zu sein, in Zukunft sowohl hadronische Matrixelemente als auch Renormierungskonstanten bei mehreren kleineren Gitterpunkt-Abständen, d.h. höheren $\beta > 6.2$, für einen Kontinuums-Limes zu berechnen. Das ist numerisch teuer; die Rechner werden jedoch auch immer leistungsfähiger.

Von großem Interesse wäre die Entwicklung einer verbesserten Formulierung der QCD auf dem Gitter; für off-shell Größen wie Quark-Greensfunktionen ist dies allerdings sehr kompliziert (siehe [47, 48]).

Weitere Verbesserung sollte von der Kontinuums-Störungstheorie kommen. Ein Vergleich verschieden hoher Ordnungen beim skalaren Operator (0 bis 2-Schleifen-Näherungen für den Schemen-Umrechnungsfaktor und jeweils 1 bis 3-Schleifen-Näherungen für die anomale Dimension) zeigt deutliche Effekte. Solche Ergebnisse in der hier verwendeten Landau-Eichung wären auch für die Operatoren der OPE von großem Interesse.

Anhang A

A.1 Notationen und Konventionen

A.1.1 γ-Matrizen

Es werden die folgenden euklidischen γ-Matrizen verwendet (es gilt allgemein: $\gamma_4^{\text{euklid.}} = \gamma_0^{\text{Minkowski}}, \gamma_j^{\text{euklid.}} = i\gamma_j^{\text{Minkowski}} = -i\gamma^{j,\text{Minkowski}} (j = 1, 2, 3)$):

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{05} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_{15} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_{25} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{35} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

A.2 Quark-Propagatoren (Kontinuums-Störungstheorie)

Nach (5.11) gilt für den Quark-Propagator im Fourierraum in 1-Schleifen-Näherung:

$$\langle\psi_{\alpha i}(p)\overline{\psi}_{\beta j}(p)\rangle \;=\; \delta_{ij}\Big\{\tilde{S}_{\alpha\beta}(p) - \Big(\tilde{S}(p)\sum(p)\tilde{S}(p)\Big)_{\alpha\beta}\Big\} + \ldots \tag{A.1}$$

Dimensionale Regularisierung ($D = 4 - \varepsilon, g^2 \to g^2\mu^\varepsilon$) für die masselose QCD ($m = 0$, siehe (5.5), (5.6)) ergibt für die Selbstenergie:

$$\begin{aligned}
\sum(p) &= g^2\mu^\varepsilon C_2(R)\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\tilde{G}_{\mu\nu}(q)\gamma_\mu\tilde{S}(p-q)\gamma_\nu + \ldots\\
&= g^2\mu^\varepsilon C_2(R)\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\frac{1}{q^2}\Big(\delta_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\Big)\gamma_\mu(-i)\frac{\not{p} - \not{q}}{(p-q)^2}\gamma_\nu + \ldots\\
&= g^2\mu^\varepsilon C_2(R)(-i)\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\Big\{\frac{\gamma_\mu(\not{p} - \not{q})\gamma_\mu}{q^2(p-q)^2} - (1-\xi)\frac{\not{q}(\not{p} - \not{q})\not{q}}{(q^2)^2(p-q)^2}\Big\} + \ldots
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Mit[1]

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu(\not{p} - \not{q})\gamma_\mu &= (2-D)(\not{p} - \not{q}) &\text{(A.3)}\\
\not{q}(\not{p} - \not{q})\not{q} &= -q^2\not{p} + 2pq\not{q} - q^2\not{q} &\text{(A.4)}
\end{aligned}$$

folgt:

$$\begin{aligned}
\sum(p) &= g^2\mu^\varepsilon C_2(R)(-i)\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\cdot\\
&\Big\{(2-D)\frac{(\not{p} - \not{q})}{q^2(p-q)^2} - (1-\xi)\frac{2pq\not{q}}{(q^2)^2(p-q)^2}\Big\} + (1-\xi)\frac{\not{p} + \not{q}}{q^2(p-q)^2}\Big\} + \ldots
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Mit der Feynman-Parametrisierung

$$\frac{1}{(q^2)^2(p-q)^2} \;=\; 2\int_0^1 dx\frac{x}{[(q-(1-x)p)^2 + p^2x(1-x)]^3} \tag{A.6}$$

folgt für den mittleren Summanden von (A.5):

[1] (A.4) wegen

$$\begin{aligned}
\not{q}\not{p}\not{q} &= q_\mu p_\nu q_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda = q_\mu p_\nu q_\lambda\gamma_\mu(-\gamma_\lambda\gamma_\nu + 2\delta_{\nu\lambda})\\
&= -\not{q}\not{q}\not{p} + 2p\cdot q\not{q} = -q^2\not{p} + 2p\cdot q\not{q}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mu^\varepsilon \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{2pq\not{q}}{(q^2)^2(p-q)^2} &= 2\int_0^1 dx x \mu^\varepsilon \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{pq\not{q}}{[(q-(1-x)p)^2 + p^2 x(1-x)]^3} \\
&= 2\int_0^1 dx x \mu^\varepsilon \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{p(q+(1-x)p)(\not{q}+(1-x)\not{p})}{(q^2+p^2x(1-x))^3} \\
&= 2\int_0^1 dx x \mu^\varepsilon \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \cdot \\
&\quad \cdot \frac{pq\not{q} + (1-x)pq\not{p} + (1-x)p^2\not{q} + (1-x)^2 p^2 \not{p}}{(q^2+p^2x(1-x))^3} \qquad \text{(A.7)}
\end{aligned}
$$

Mit

$$
\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(q^2)^n}{(q^2+M^2)^N} = \frac{(M^2)^{n-N+D/2}}{(4\pi)^{D/2}\Gamma(D/2)} \frac{\Gamma(N-n-D/2)\Gamma(n+D/2)}{\Gamma(N)} \qquad \text{(A.8)}
$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q_{\mu_1}\cdots q_{\mu_n}}{(q^2+M^2)^N} &= \frac{2^{-n}(4\pi)^{-D/2}}{(n/2)!} \frac{\Gamma(N-n/2-D/2)}{\Gamma(N)} (M^2)^{D/2+n/2-N} \\
&\quad \sum_{\pi\in\mathcal{S}_n} \delta_{\mu_{\pi(1)},\mu_{\pi(2)}} \cdots \delta_{\mu_{\pi(n-1)},\mu_{\pi(n)}} \qquad \text{(A.9)}
\end{aligned}
$$

folgt, wobei Γ die Euler-Gamma-Funktion mit $\Gamma(1+A) = \Gamma(A)\cdot A$ und π eine Permutation ist:

$$
\begin{aligned}
\mu^\varepsilon \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{2pq\not{q}}{(q^2)^2(p-q)^2} &= \\
= \quad & 2\int_0^1 dx x\mu^\varepsilon \quad \Bigg\{ p_\mu \gamma_\nu \frac{\Gamma(2-D/2)}{4(4\pi)^{D/2}} (p^2 x(1-x))^{-2+D/2} \delta_{\mu\nu} + \\
& \qquad + (1-x)^2 p^2 \not{p} \frac{\Gamma(3-D/2)}{2(4\pi)^{D/2}} (p^2 x(1-x))^{-3+D/2} \Bigg\} \\
= \quad & 2\mu^\varepsilon (4\pi)^{-D/2} \not{p} \Bigg\{ \frac{1}{4}\Gamma(2-D/2)(p^2)^{(-2+D/2)} B(D/2,-1+D/2) + \\
& \qquad + \frac{1}{2}\Gamma(3-D/2)(p^2)^{(-2+D/2)} B(-1+D/2, D/2) \Bigg\} \\
= \quad & \mu^\varepsilon (4\pi)^{-D/2} \not{p} (p^2)^{-2+D/2} \Gamma(2-D/2) \cdot B(D/2,-1+D/2) \cdot (1/2+2-D/2), \qquad \text{(A.10)}
\end{aligned}
$$

mit der Euler-Beta-Funktion $B(\alpha,\beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)$.

Es ergibt sich mit $D = 4 - \varepsilon$ und

$$\Gamma(N - \varepsilon/2) = \Gamma(N)(1 - \varepsilon/2\psi(N) + O(\varepsilon^2), \tag{A.11}$$

wobei

$$\begin{aligned} \psi(N) &= S_{N-1} - \gamma_E \\ S_N &= \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} \end{aligned}$$

mit der Euler-Mascheroni Konstanten $\gamma_E = 0.5772$ ist, also konkret mit:

$$\Gamma(\varepsilon/2) = \varepsilon/2 - \gamma_E + O(\varepsilon) \tag{A.12}$$

$$B(N - \varepsilon/2, 1 - \varepsilon/2) = \frac{1}{N}\Big[1 + \varepsilon S_N - \frac{\varepsilon}{2} S_{N-1}\Big] + O(\varepsilon^2) \tag{A.13}$$

$$B(N - \varepsilon/2, 2 - \varepsilon/2) = \frac{1}{N(N+1)}\Big[1 + \frac{\varepsilon}{2} S_{N-1} - \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon S_{N+1}\Big] + O(\varepsilon^2) \tag{A.14}$$

und mit der folgenden Näherung für eine reelle Zahl R:

$$(R^2)^{\varepsilon/2} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} ln(R^2) + O(\varepsilon^2) \tag{A.15}$$

$$\begin{aligned}
\mu^\varepsilon \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{2pq\not{q}}{(q^2)^2 (p-q)^2} &= \\
&= \mu^\varepsilon (4\pi)^{-2+\varepsilon/2} \not{p} (p^2)^{-\varepsilon/2} \Gamma(\varepsilon/2) \cdot B(2 - \varepsilon/2, 1 - \varepsilon/2) \cdot (1/2 + \varepsilon/2) \\
&= \frac{1}{16\pi^2} \Big(\frac{p^2}{4\pi\mu^2}\Big)^{-\varepsilon/2} \not{p} (\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + O(\varepsilon)) \cdot \frac{1}{2}(1 + \varepsilon S_2 - \frac{\varepsilon}{2} S_1 + O(\varepsilon^2)) \cdot \frac{1}{2}(1+\varepsilon) \\
&= \frac{1}{16\pi^2} \not{p} \Big(\frac{p^2}{4\pi\mu^2}\Big)^{-\varepsilon/2} \frac{1}{4} (\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + O(\varepsilon)) \cdot (1 + \varepsilon + O(\varepsilon^2)) \cdot (1+\varepsilon) \\
&= \frac{1}{4} \frac{1}{16\pi^2} \not{p} (1 - \frac{\varepsilon}{2} ln \frac{p^2}{4\pi\mu^2} + O(\varepsilon^2)) \cdot (\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + 4 + O(\varepsilon)) \\
&= \frac{1}{4} \frac{1}{16\pi^2} \not{p} (\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E - ln \frac{p^2}{4\pi\mu^2} + 4 + O(\varepsilon))
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Für den ersten und letzten Term in (A.5) ist folgendes Integral über die Feynman-Parametrisierung

$$\frac{1}{q^2 (p-q)^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xq^2 + (1-x)(p-q)^2]^2} \tag{A.17}$$

auszurechnen:

$$\begin{aligned}
\mu^\varepsilon \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^2(p-q)^2} &= \int_0^1 dx \mu^\varepsilon \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{[xq^2 + (1-x)(p-q)^2]^2} \\
&= \int_0^1 dx \mu^\varepsilon \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(q-(1-x)p)^2 + p^2 x(1-x)]^2} \\
&= \int_0^1 dx \mu^\varepsilon \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{(q^2 + p^2 x(1-x))^2} \qquad \text{(A.18)}
\end{aligned}$$

Mit (A.8) für $N = 2$, $n = 0$ und einer weiteren Auswertung nach (A.11)– (A.15) folgt daraus:

$$\begin{aligned}
\mu^\varepsilon \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^2(p-q)^2} &= \\
&= \int_0^1 dx \mu^\varepsilon (4\pi)^{-D/2} \cdot \frac{\Gamma(2-D/2)}{\Gamma(2)} \cdot (p^2 x(1-x))^{-2+D/2} \\
&= \mu^\varepsilon (4\pi)^{-D/2} (p^2)^{-2+D/2} \cdot B(-1+D/2, -1+D/2) \\
&= \mu^\varepsilon (4\pi)^{-2+\varepsilon/2} (p^2)^{-\varepsilon/2} \Gamma(\varepsilon/2) \cdot B(1-\varepsilon/2, 1-\varepsilon/2) \\
&= \frac{1}{16\pi^2} \Big(\frac{p^2}{4\pi\mu^2}\Big)^{-\varepsilon/2} (\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + O(\varepsilon)) \cdot (1 + \varepsilon S_1 - \frac{\varepsilon}{2} S_0 + O(\varepsilon^2)) \\
&= \frac{1}{16\pi^2} \Big(\frac{p^2}{4\pi\mu^2}\Big)^{-\varepsilon/2} (\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + O(\varepsilon)) \cdot (1 + \varepsilon + O(\varepsilon^2)) \\
&= \frac{1}{16\pi^2} (1 - \frac{\varepsilon}{2} ln \frac{p^2}{4\pi\mu^2} + O(\varepsilon^2)) \cdot (\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + 2 + O(\varepsilon)) \\
&= \frac{1}{16\pi^2} (\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E - ln \frac{p^2}{4\pi\mu^2} + 2 + O(\varepsilon)) \qquad \text{(A.19)}
\end{aligned}$$

Für den ersten und letzten Term in (A.5) ist außerdem folgendes Integral über die Feynman-Parametrisierung

$$\frac{1}{q^2(p-q)^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xq^2 + (1-x)(p-q)^2]^2} \qquad \text{(A.20)}$$

auszurechnen:

$$\begin{aligned}
\mu^\varepsilon \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\not{q}}{q^2(p-q)^2} &= \gamma_\lambda \mu^\varepsilon \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q_\lambda}{q^2(p-q)^2} \\
&= \gamma_\lambda \int_0^1 dx \mu^\varepsilon \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q_\lambda}{[xq^2 + (1-x)(p-q)^2]^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \gamma_\lambda \int_0^1 dx \mu^\varepsilon \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q_\lambda}{[(q-(1-x)p)^2 + p^2 x(1-x)]^2} \\
&= \gamma_\lambda \int_0^1 dx \mu^\varepsilon \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q_\lambda + (1-x)p_\lambda}{(q^2 + p^2 x(1-x))^2} \qquad \text{(A.21)}
\end{aligned}
$$

Mit (A.9) für $N = 2$, $n = 0, 1$ und einer weiteren Auswertung nach (A.11)– (A.15) folgt daraus:

$$
\begin{aligned}
\mu^\varepsilon \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\not{q}}{q^2 (p-q)^2} \quad &= \\
&= \gamma_\lambda \int_0^1 dx \mu^\varepsilon (1-x) p_\lambda (4\pi)^{-D/2} \cdot \frac{\Gamma(2-D/2)}{\Gamma(2)} \cdot (p^2 x(1-x))^{-2+D/2} \\
&= \gamma_\lambda \mu^\varepsilon (4\pi)^{-D/2} \Gamma(2-D/2) p_\lambda (p^2)^{-2+D/2} \cdot B(-1+D/2, D/2) \\
&= \mu^\varepsilon (4\pi)^{-2+\varepsilon/2} \not{p} (p^2)^{-\varepsilon/2} \Gamma(\varepsilon/2) \cdot B(1-\varepsilon/2, 2-\varepsilon/2) \\
&= \frac{1}{16\pi^2} \Big(\frac{p^2}{4\pi\mu^2}\Big)^{-\varepsilon/2} \not{p} (\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + O(\varepsilon)) \cdot \frac{1}{2}(1 + \varepsilon S_2 - \frac{\varepsilon}{2} S_1 + O(\varepsilon^2)) \\
&= \frac{1}{16\pi^2} \not{p} \Big(\frac{p^2}{4\pi\mu^2}\Big)^{-\varepsilon/2} \frac{1}{2} (\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + O(\varepsilon)) \cdot (1 + \varepsilon + O(\varepsilon^2)) \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{16\pi^2} \not{p} (1 - \frac{\varepsilon}{2} ln \frac{p^2}{4\pi\mu^2} + O(\varepsilon^2)) \cdot (\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + 2 + O(\varepsilon)) \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{16\pi^2} \not{p} (\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E - ln \frac{p^2}{4\pi\mu^2} + 2 + O(\varepsilon)) \qquad \text{(A.22)}
\end{aligned}
$$

Setzt man nun die Zwischenergebnisse (A.16), (A.19) und (A.22) in (A.5) ein, erhält man schließlich für die Selbstenergie des Quark-Propagators in 1-Schleifen-Näherung das Ergebnis (5.12):

$$
\sum(p) \;=\; -i \frac{g^2}{16\pi^2} C_2(R) \not{p} (-\xi) \Big(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E - ln \frac{p^2}{4\pi\mu^2} + 1 + O(\varepsilon)\Big) + \ldots \qquad \text{(A.23)}
$$

Für den Quark-Propagator im Fourierraum (A.1) ergibt sich damit (5.13):

$$
\begin{aligned}
\langle \psi_{\alpha i}(p) \overline{\psi}_{\beta j}(p) \rangle &= \delta_{ij} \Big\{ \tilde{S}_{\alpha\beta}(p) - \Big(\tilde{S}(p) \sum(p) \tilde{S}(p) \Big)_{\alpha\beta} \Big\} + \ldots \\
&= \delta_{ij} \Big\{ (-i) \frac{\not{p}}{p^2} - (-i) \frac{\not{p}}{p^2} \sum(p) (-i) \frac{\not{p}}{p^2} \Big\} + \ldots
\end{aligned}
$$

$$= \quad -i\delta_{ij}\frac{\not p}{p^2}\Big[1-\frac{g^2}{16\pi^2}C_2(R)\xi\Big(\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E-ln\frac{p^2}{4\pi\mu^2}+1+O(\varepsilon)\Big)\Big]+\dots \tag{A.24}$$

Am Beispiel der Selbstenergie des Quark-Propagators wurde ausführlich die Vorgehensweise zur Berechnung von Quark-Greensfunktionen der Quantenchromodynamik in der Kontinuums-Störungstheorie (Dimensionale Regularisierung) erläutert. Entsprechend werden 3-pt Quark-Greensfunktionen mit Operator berechnet. Die Rechnungen sind umfangreich und sollen hier nicht dargestellt werden; Hinweise findet man in [23].

A.3 Fehlerrechnung: Jackknife-Verfahren

Der Jackknife-Algorithmus stellt ein einfaches Verfahren dar, statistische Fehler von Erwartungswerten unter Berücksichtigung von Korrelationen zu bestimmen. Der Fehler ergibt sich für ein Ensemble aus N Konfigurationen aus:

$$\sigma_n^2 \quad = \quad \frac{N-n}{N}\sum_{i=0}^{N/n-1}(\langle X_{i*n}\rangle-\overline{X})^2 \tag{A.25}$$

Die Größe $\langle X_{i*n}\rangle$ ist das Mittel über $(N-n)$ Konfigurationen; dabei werden gerade n Konfigurationen ab Nummer $i*n$ $(i=0,1,\dots,N/n-1)$ weggelassen. Korrelationen werden berücksichtigt, wenn man $n>1$ wählt. Ist die Korrelation nicht allzu groß, strebt σ_n mit zunehmendem n (hier: $n=2$ gesetzt) gegen einen konstanten Wert. Dieser ist ein Schätzwert für den Statistischen Fehler vom Mittelwert $\overline{X}$ aus N Konfigurationen.

A.4 Tabellen: Renormierungskonstanten im MOM-Schema

In den folgenden Tabellen werden Renormierungskonstanten an ausgewählten Gitter-Renormierungsskalen μ^2a^2 gegeben, die im MOM-Schema (6.8) bzw. (6.15) (im Falle des Vektor- und Axialvektor-Stromes) berechnet wurden. Die Ergebnisse beruhen auf Rechnungen mit Standard Wilson Fermionen ($r=1$) in der quenched Approximation auf den Gittern 16^3x32 ($a^{-2}=3.8GeV^2$, $\beta=6.0$) und 24^3x48 ($a^{-2}=7.0GeV^2$, $\beta=6.2$) mit den räumlichen Ausdehnungen 1.6 fm bzw. 1.8 fm; dabei werden bei $\beta=6.00$ (Tabellen A.1–A.12) hopping Parameter $\kappa_3=0.1550$, $\kappa_2=0.1530$, $\kappa_1=0.1515$, $\kappa_c=0.157211$ und bei $\beta=6.20$ (Tabellen A.13–A.24) $\kappa_3=0.1520$, $\kappa_2=0.1507$, $\kappa_1=0.1489$, $\kappa_c=0.153374$ verwendet [33].

$\mu^2 a^2$	$Z_P(\kappa_1)$	$Z_P(\kappa_2)$	$Z_P(\kappa_3)$	$Z_P(\kappa_c)$
0.1639	0.3583(11)	0.3152(17)	0.2267(22)	0.1569(34)
0.2410	0.3849(28)	0.3464(16)	0.2653(8)	0.1869(19)
0.3181	0.4029(12)	0.3673(13)	0.2901(17)	0.2287(26)
0.3952	0.4263(10)	0.3946(19)	0.3244(32)	0.2769(44)
0.4723	0.4402(3)	0.4106(22)	0.3446(46)	0.3066(55)
0.5494	0.4568(7)	0.4299(13)	0.3699(28)	0.3348(34)
0.5494	0.4623(15)	0.4359(11)	0.3768(14)	0.3276(24)
0.6265	0.4858(17)	0.4610(9)	0.4045(17)	0.3596(28)
0.7036	0.4857(8)	0.4627(5)	0.4111(13)	0.3769(18)
0.7807	0.5043(11)	0.4829(6)	0.4337(15)	0.3997(23)
0.8578	0.5136(10)	0.4934(8)	0.4474(11)	0.4107(18)
0.9349	0.5197(8)	0.5009(7)	0.4591(15)	0.4314(21)
1.0120	0.5284(9)	0.5108(5)	0.4712(10)	0.4413(16)
1.0120	0.5303(11)	0.5126(7)	0.4732(15)	0.4443(22)
1.1662	0.5431(4)	0.5270(3)	0.4916(5)	0.4629(8)
1.3204	0.5590(7)	0.5443(3)	0.5120(7)	0.4868(12)
1.3976	0.5629(7)	0.5488(4)	0.5184(12)	0.4989(17)
1.3976	0.5632(6)	0.5488(3)	0.5171(4)	0.4892(8)
1.4747	0.5684(4)	0.5547(5)	0.5246(8)	0.5033(12)
1.6289	0.5781(5)	0.5655(2)	0.5384(3)	0.5133(5)
1.8602	0.5916(5)	0.5802(3)	0.5561(4)	0.5347(7)
1.9373	0.5956(4)	0.5843(2)	0.5605(7)	0.5453(9)
2.0915	0.6028(4)	0.5922(2)	0.5699(8)	0.5563(10)
2.3228	0.6134(4)	0.6036(2)	0.5835(5)	0.5687(8)
2.4770	0.6247(4)	0.6150(2)	0.5951(3)	0.5772(5)
2.8626	0.6359(3)	0.6272(2)	0.6094(3)	0.5948(5)
3.1710	0.6485(3)	0.6402(2)	0.6237(2)	0.6088(4)
3.6336	0.6607(3)	0.6533(2)	0.6386(2)	0.6248(4)
3.9421	0.6670(3)	0.6597(2)	0.6457(1)	0.6320(2)
4.1734	0.6741(2)	0.6674(1)	0.6543(2)	0.6422(3)
4.9444	0.6919(3)	0.6859(1)	0.6744(1)	0.6635(3)
5.3300	0.7001(2)	0.6944(1)	0.6836(1)	0.6731(2)
5.7155	0.7060(3)	0.7005(2)	0.6901(2)	0.6807(4)
6.0239	0.7116(2)	0.7063(2)	0.6964(2)	0.6870(3)
7.1034	0.7293(2)	0.7246(1)	0.7158(1)	0.7073(2)
7.7974	0.7339(2)	0.7293(1)	0.7209(1)	0.7127(2)
8.1829	0.7455(2)	0.7412(1)	0.7335(2)	0.7264(3)
9.2624	0.7555(2)	0.7516(1)	0.7444(1)	0.7373(2)
9.5708	0.7595(2)	0.7557(1)	0.7489(2)	0.7425(3)
10.9587	0.7732(2)	0.7698(1)	0.7637(1)	0.7576(2)
12.1153	0.7794(2)	0.7763(1)	0.7706(0)	0.7649(1)
13.1948	0.7972(2)	0.7944(1)	0.7896(1)	0.7849(2)
14.8912	0.8057(2)	0.8032(1)	0.7988(1)	0.7943(1)

Tabelle A.1: Z im MOM-Schema (6.8) für die Pseudoskalare Dichte $\mathcal{O}_P$ bei $\beta = 6.00$.

$\mu^2 a^2$	$Z_I(\kappa_1)$	$Z_I(\kappa_2)$	$Z_I(\kappa_3)$	$Z_I(\kappa_c)$
0.1639	0.7885(58)	0.7492(33)	0.6967(145)	0.6420(161)
0.2410	0.7392(17)	0.7002(37)	0.6416(89)	0.5885(103)
0.3181	0.7173(21)	0.6858(36)	0.6463(65)	0.6022(88)
0.3952	0.7094(18)	0.6806(12)	0.6410(36)	0.6008(46)
0.4723	0.7043(22)	0.6798(25)	0.6482(69)	0.6137(80)
0.5494	0.7049(14)	0.6822(14)	0.6497(43)	0.6185(49)
0.5494	0.7124(12)	0.6899(9)	0.6583(22)	0.6266(30)
0.6265	0.7366(18)	0.7162(9)	0.6869(23)	0.6577(35)
0.7036	0.7137(9)	0.6961(4)	0.6709(17)	0.6466(22)
0.7807	0.7329(15)	0.7169(5)	0.6968(14)	0.6747(24)
0.8578	0.7344(7)	0.7200(1)	0.7001(7)	0.6795(11)
0.9349	0.7301(8)	0.7169(5)	0.6979(9)	0.6787(14)
1.0120	0.7349(6)	0.7228(3)	0.7067(7)	0.6897(11)
1.0120	0.7383(8)	0.7261(3)	0.7095(3)	0.6919(6)
1.1662	0.7407(5)	0.7302(4)	0.7157(9)	0.7009(13)
1.3204	0.7528(4)	0.7440(4)	0.7326(11)	0.7201(13)
1.3976	0.7501(4)	0.7417(4)	0.7303(11)	0.7186(13)
1.3976	0.7533(5)	0.7451(5)	0.7342(9)	0.7226(13)
1.4747	0.7542(3)	0.7466(4)	0.7373(4)	0.7269(7)
1.6289	0.7567(5)	0.7501(1)	0.7417(4)	0.7325(7)
1.8602	0.7630(3)	0.7573(4)	0.7499(8)	0.7419(10)
1.9373	0.7654(3)	0.7600(3)	0.7526(3)	0.7449(5)
2.0915	0.7674(2)	0.7626(2)	0.7563(3)	0.7495(4)
2.3228	0.7715(2)	0.7674(2)	0.7620(4)	0.7562(6)
2.4770	0.7896(2)	0.7857(1)	0.7805(3)	0.7752(4)
2.8626	0.7881(1)	0.7850(1)	0.7809(4)	0.7766(5)
3.1710	0.8007(2)	0.7979(1)	0.7941(4)	0.7903(5)
3.6336	0.8011(2)	0.7989(2)	0.7962(4)	0.7932(6)
3.9421	0.8121(2)	0.8100(1)	0.8072(1)	0.8041(2)
4.1734	0.8036(1)	0.8019(2)	0.7998(2)	0.7974(3)
4.9444	0.8112(1)	0.8098(2)	0.8080(3)	0.8060(4)
5.3300	0.8145(1)	0.8133(1)	0.8117(1)	0.8100(2)
5.7155	0.8231(1)	0.8220(1)	0.8205(2)	0.8190(2)
6.0239	0.8239(1)	0.8229(1)	0.8215(2)	0.8200(3)
7.1034	0.8346(1)	0.8338(1)	0.8328(1)	0.8317(2)
7.7974	0.8381(1)	0.8373(1)	0.8363(1)	0.8352(2)
8.1829	0.8441(1)	0.8435(1)	0.8426(1)	0.8417(2)
9.2624	0.8550(1)	0.8544(1)	0.8537(1)	0.8529(2)
9.5708	0.8548(1)	0.8542(1)	0.8536(1)	0.8529(2)
10.9587	0.8652(1)	0.8648(1)	0.8644(2)	0.8638(2)
12.1153	0.8662(1)	0.8658(1)	0.8653(1)	0.8648(2)
13.1948	0.8787(1)	0.8785(1)	0.8782(1)	0.8779(2)
14.8912	0.8863(1)	0.8862(1)	0.8860(1)	0.8858(2)

Tabelle A.2: Z im MOM-Schema (6.8) für die Skalare Dichte $\mathcal{O}_I$ bei $\beta = 6.00$.

$\mu^2 a^2$	$Z_A(\kappa_1)$	$Z_A(\kappa_2)$	$Z_A(\kappa_3)$	$Z_A(\kappa_c)$
0.1639	0.8784(42)	0.8802(28)	0.8803(52)	0.8821(83)
0.2410	0.8349(19)	0.8316(17)	0.8234(31)	0.8180(46)
0.3181	0.8157(10)	0.8136(10)	0.8117(11)	0.8092(19)
0.3952	0.7992(6)	0.7967(12)	0.7926(22)	0.7891(29)
0.4723	0.7931(2)	0.7919(10)	0.7908(16)	0.7892(21)
0.5494	0.7866(2)	0.7857(5)	0.7852(5)	0.7841(8)
0.5494	0.7844(5)	0.7834(4)	0.7823(5)	0.7810(9)
0.6265	0.7801(4)	0.7796(8)	0.7797(13)	0.7790(18)
0.7036	0.7796(3)	0.7796(5)	0.7810(7)	0.7813(10)
0.7807	0.7780(2)	0.7786(4)	0.7808(5)	0.7820(8)
0.8578	0.7767(3)	0.7773(2)	0.7795(5)	0.7805(7)
0.9349	0.7760(4)	0.7768(5)	0.7788(6)	0.7803(9)
1.0120	0.7766(2)	0.7776(3)	0.7803(3)	0.7824(5)
1.0120	0.7755(1)	0.7765(4)	0.7792(6)	0.7808(8)
1.1662	0.7762(3)	0.7774(2)	0.7802(2)	0.7826(4)
1.3204	0.7755(2)	0.7768(4)	0.7795(5)	0.7816(7)
1.3976	0.7762(3)	0.7775(3)	0.7803(5)	0.7824(7)
1.3976	0.7768(3)	0.7781(2)	0.7806(3)	0.7829(4)
1.4747	0.7771(3)	0.7784(2)	0.7812(3)	0.7835(5)
1.6289	0.7781(2)	0.7795(2)	0.7822(2)	0.7846(4)
1.8602	0.7793(2)	0.7805(2)	0.7829(3)	0.7850(4)
1.9373	0.7801(3)	0.7813(3)	0.7838(3)	0.7860(5)
2.0915	0.7814(2)	0.7827(3)	0.7850(3)	0.7870(5)
2.3228	0.7831(2)	0.7842(3)	0.7863(3)	0.7881(4)
2.4770	0.7830(3)	0.7841(2)	0.7860(3)	0.7878(4)
2.8626	0.7873(2)	0.7882(2)	0.7899(2)	0.7915(4)
3.1710	0.7884(2)	0.7892(2)	0.7907(2)	0.7920(3)
3.6336	0.7928(2)	0.7935(2)	0.7947(2)	0.7958(4)
3.9421	0.7966(2)	0.7972(1)	0.7984(1)	0.7995(2)
4.1734	0.7978(2)	0.7983(1)	0.7992(1)	0.8001(3)
4.9444	0.8045(2)	0.8048(1)	0.8055(2)	0.8062(3)
5.3300	0.8078(2)	0.8081(1)	0.8088(1)	0.8094(2)
5.7155	0.8099(2)	0.8102(2)	0.8107(2)	0.8112(3)
6.0239	0.8130(2)	0.8132(1)	0.8137(1)	0.8142(2)
7.1034	0.8213(2)	0.8214(1)	0.8218(1)	0.8221(2)
7.7974	0.8262(2)	0.8263(1)	0.8266(1)	0.8268(2)
8.1829	0.8294(1)	0.8296(1)	0.8299(1)	0.8301(2)
9.2624	0.8357(1)	0.8358(1)	0.8360(1)	0.8362(1)
9.5708	0.8389(1)	0.8390(1)	0.8392(1)	0.8394(2)
10.9587	0.8481(1)	0.8482(1)	0.8485(1)	0.8486(2)
12.1153	0.8550(1)	0.8551(1)	0.8553(1)	0.8555(1)
13.1948	0.8638(1)	0.8640(1)	0.8642(1)	0.8644(1)
14.8912	0.8726(1)	0.8727(1)	0.8730(1)	0.8733(1)

Tabelle A.3: Z für den Axialvektor-Strom $\mathcal{O}_A$ im MOM-Schema (6.15) bei $\beta = 6.00$.

$\mu^2 a^2$	$Z_V(\kappa_1)$	$Z_V(\kappa_2)$	$Z_V(\kappa_3)$	$Z_V(\kappa_c)$
0.1639	0.6266(9)	0.6246(8)	0.6236(8)	0.6216(14)
0.2410	0.6370(7)	0.6359(7)	0.6365(7)	0.6360(12)
0.3181	0.6456(7)	0.6448(8)	0.6456(10)	0.6452(15)
0.3952	0.6521(8)	0.6518(6)	0.6534(7)	0.6541(12)
0.4723	0.6586(6)	0.6584(5)	0.6600(6)	0.6607(10)
0.5494	0.6633(6)	0.6633(5)	0.6652(6)	0.6661(11)
0.5494	0.6620(7)	0.6620(5)	0.6639(6)	0.6650(10)
0.6265	0.6634(5)	0.6634(3)	0.6648(3)	0.6658(6)
0.7036	0.6710(6)	0.6711(4)	0.6728(5)	0.6738(8)
0.7807	0.6721(5)	0.6720(4)	0.6733(4)	0.6740(7)
0.8578	0.6754(5)	0.6753(5)	0.6764(5)	0.6770(8)
0.9349	0.6796(6)	0.6795(4)	0.6808(5)	0.6814(8)
1.0120	0.6822(4)	0.6822(4)	0.6831(4)	0.6836(6)
1.0120	0.6810(5)	0.6809(4)	0.6818(4)	0.6822(7)
1.1662	0.6870(5)	0.6868(4)	0.6875(4)	0.6877(7)
1.3204	0.6894(4)	0.6891(4)	0.6894(4)	0.6893(7)
1.3976	0.6929(5)	0.6925(3)	0.6928(2)	0.6927(5)
1.3976	0.6923(4)	0.6919(4)	0.6922(4)	0.6921(6)
1.4747	0.6947(4)	0.6942(3)	0.6944(3)	0.6942(6)
1.6289	0.6991(3)	0.6985(3)	0.6985(3)	0.6980(5)
1.8602	0.7042(4)	0.7035(3)	0.7031(3)	0.7024(6)
1.9373	0.7057(4)	0.7049(3)	0.7045(3)	0.7038(5)
2.0915	0.7096(4)	0.7088(2)	0.7082(2)	0.7073(4)
2.3228	0.7145(3)	0.7136(2)	0.7127(2)	0.7117(4)
2.4770	0.7119(4)	0.7108(2)	0.7099(2)	0.7088(5)
2.8626	0.7215(3)	0.7203(2)	0.7192(2)	0.7179(4)
3.1710	0.7228(3)	0.7216(2)	0.7203(2)	0.7187(4)
3.6336	0.7325(3)	0.7312(2)	0.7298(2)	0.7281(3)
3.9421	0.7332(3)	0.7319(2)	0.7303(2)	0.7286(3)
4.1734	0.7424(3)	0.7411(2)	0.7395(1)	0.7378(3)
4.9444	0.7535(2)	0.7522(2)	0.7505(2)	0.7487(3)
5.3300	0.7591(2)	0.7577(1)	0.7561(1)	0.7543(3)
5.7155	0.7593(2)	0.7579(2)	0.7563(2)	0.7544(3)
6.0239	0.7645(2)	0.7632(1)	0.7616(1)	0.7598(3)
7.1034	0.7755(2)	0.7742(2)	0.7726(2)	0.7708(3)
7.7974	0.7806(2)	0.7793(1)	0.7778(1)	0.7761(3)
8.1829	0.7863(2)	0.7851(1)	0.7835(1)	0.7819(2)
9.2624	0.7915(2)	0.7904(1)	0.7889(1)	0.7873(2)
9.5708	0.7966(2)	0.7955(1)	0.7941(1)	0.7926(2)
10.9587	0.8068(2)	0.8058(1)	0.8045(1)	0.8031(2)
12.1153	0.8167(2)	0.8158(1)	0.8147(1)	0.8134(2)
13.1948	0.8270(2)	0.8262(1)	0.8251(1)	0.8240(2)
14.8912	0.8360(1)	0.8353(1)	0.8344(1)	0.8335(2)

Tabelle A.4: Z für den Vektor-Strom $\mathcal{O}_V$ im MOM-Schema (6.15) bei $\beta = 6.00$.

$\mu^2 a^2$	$Z_{r2a}(\kappa_1)$	$Z_{r2a}(\kappa_2)$	$Z_{r2a}(\kappa_3)$	$Z_{r2a}(\kappa_c)$
0.1639	1.6766(92)	1.7391(119)	1.8272(152)	1.9171(234)
0.2410	1.5333(81)	1.5788(105)	1.6395(130)	1.7038(202)
0.3181	1.4320(44)	1.4608(43)	1.4983(29)	1.5387(54)
0.3952	1.4263(47)	1.4564(38)	1.4975(45)	1.5407(77)
0.4723	1.3252(27)	1.3451(15)	1.3735(17)	1.4031(32)
0.5494	1.3190(26)	1.3390(28)	1.3665(32)	1.3952(52)
0.5494	1.3507(26)	1.3725(36)	1.4016(40)	1.4324(63)
0.6265	1.3212(33)	1.3379(38)	1.3590(48)	1.3822(75)
0.7036	1.2727(22)	1.2886(30)	1.3106(35)	1.3334(54)
0.7807	1.2561(26)	1.2691(29)	1.2871(31)	1.3058(50)
0.8578	1.2315(17)	1.2438(22)	1.2607(24)	1.2783(38)
0.9349	1.2160(15)	1.2275(20)	1.2430(23)	1.2593(36)
1.0120	1.2086(18)	1.2193(17)	1.2340(17)	1.2494(29)
1.0120	1.2146(14)	1.2255(22)	1.2407(25)	1.2563(38)
1.1662	1.1829(8)	1.1920(10)	1.2046(11)	1.2176(18)
1.3204	1.1588(10)	1.1667(15)	1.1777(16)	1.1890(25)
1.3976	1.1540(10)	1.1613(12)	1.1712(14)	1.1817(22)
1.3976	1.1405(9)	1.1479(12)	1.1583(13)	1.1689(21)
1.4747	1.1380(8)	1.1449(8)	1.1544(9)	1.1643(15)
1.6289	1.1369(6)	1.1434(5)	1.1525(6)	1.1619(10)
1.8602	1.1103(6)	1.1153(8)	1.1222(9)	1.1294(14)
1.9373	1.1055(6)	1.1107(7)	1.1180(8)	1.1256(12)
2.0915	1.0968(5)	1.1013(6)	1.1076(6)	1.1141(10)
2.3228	1.0838(4)	1.0876(5)	1.0929(5)	1.0984(7)
2.4770	1.0994(4)	1.1038(4)	1.1099(4)	1.1162(7)
2.8626	1.0821(3)	1.0856(4)	1.0903(4)	1.0953(7)
3.1710	1.0976(3)	1.1013(3)	1.1063(3)	1.1117(5)
3.6336	1.0512(3)	1.0536(3)	1.0570(3)	1.0606(5)
3.9421	1.0372(3)	1.0394(2)	1.0425(2)	1.0458(4)
4.1734	1.0369(2)	1.0386(2)	1.0409(2)	1.0433(3)
4.9444	1.0309(2)	1.0323(2)	1.0342(2)	1.0361(3)
5.3300	1.0239(1)	1.0250(1)	1.0266(1)	1.0282(2)
5.7155	1.0380(2)	1.0393(2)	1.0412(2)	1.0432(3)
6.0239	1.0163(1)	1.0172(1)	1.0185(1)	1.0199(2)
7.1034	1.0321(1)	1.0331(1)	1.0345(2)	1.0359(3)
7.7974	1.0275(1)	1.0284(1)	1.0296(2)	1.0308(2)
8.1829	1.0190(1)	1.0197(1)	1.0207(1)	1.0217(2)
9.2624	1.0251(1)	1.0259(1)	1.0269(1)	1.0280(2)
9.5708	1.0218(1)	1.0224(1)	1.0233(1)	1.0242(2)
10.9587	1.0246(1)	1.0252(1)	1.0260(1)	1.0268(2)
12.1153	1.0146(1)	1.0150(1)	1.0156(1)	1.0161(1)
13.1948	1.0116(1)	1.0119(1)	1.0123(0)	1.0128(1)
14.8912	1.0133(1)	1.0136(1)	1.0140(1)	1.0144(1)

Tabelle A.5: Z im MOM-Schema (6.8) für $\mathcal{O}_{r2a}$ bei $\beta = 6.00$.

$\mu^2 a^2$	$Z_{r2b}(\kappa_1)$	$Z_{r2b}(\kappa_2)$	$Z_{r2b}(\kappa_3)$	$Z_{r2b}(\kappa_c)$
0.1639	1.6326(128)	1.6823(134)	1.7438(184)	1.8124(288)
0.2410	1.5254(75)	1.5613(83)	1.6086(95)	1.6591(154)
0.3181	1.4821(78)	1.5150(70)	1.5577(85)	1.6037(141)
0.3952	1.3592(46)	1.3781(33)	1.4045(42)	1.4318(72)
0.4723	1.4003(67)	1.4244(53)	1.4555(68)	1.4891(115)
0.5494	1.2887(24)	1.3034(26)	1.3240(30)	1.3452(49)
0.5494	1.3011(20)	1.3166(28)	1.3380(32)	1.3602(50)
0.6265	1.3518(62)	1.3697(48)	1.3922(57)	1.4169(98)
0.7036	1.2357(14)	1.2471(22)	1.2632(24)	1.2796(38)
0.7807	1.3059(48)	1.3205(36)	1.3400(40)	1.3607(71)
0.8578	1.2341(25)	1.2443(19)	1.2581(21)	1.2727(37)
0.9349	1.1999(11)	1.2091(15)	1.2217(16)	1.2347(26)
1.0120	1.2086(19)	1.2179(15)	1.2307(13)	1.2442(25)
1.0120	1.1880(15)	1.1962(17)	1.2077(17)	1.2195(29)
1.1662	1.1654(10)	1.1725(9)	1.1823(10)	1.1925(17)
1.3204	1.1816(19)	1.1891(17)	1.1996(18)	1.2106(31)
1.3976	1.1369(8)	1.1428(7)	1.1510(9)	1.1595(14)
1.3976	1.2093(24)	1.2177(19)	1.2291(21)	1.2411(36)
1.4747	1.1674(16)	1.1742(13)	1.1837(14)	1.1935(24)
1.6289	1.1310(9)	1.1365(8)	1.1443(8)	1.1523(14)
1.8602	1.1058(6)	1.1103(5)	1.1165(5)	1.1230(9)
1.9373	1.1393(12)	1.1446(10)	1.1520(11)	1.1597(19)
2.0915	1.1093(9)	1.1138(7)	1.1199(8)	1.1263(14)
2.3228	1.0864(6)	1.0901(5)	1.0952(5)	1.1005(8)
2.4770	1.0909(4)	1.0943(3)	1.0991(3)	1.1040(5)
2.8626	1.0933(6)	1.0967(5)	1.1013(5)	1.1062(9)
3.1710	1.0932(5)	1.0964(4)	1.1008(5)	1.1054(8)
3.6336	1.0804(5)	1.0831(4)	1.0869(4)	1.0908(8)
3.9421	1.0840(6)	1.0867(4)	1.0903(5)	1.0942(8)
4.1734	1.0511(3)	1.0530(2)	1.0556(2)	1.0584(4)
4.9444	1.0444(3)	1.0459(2)	1.0481(2)	1.0504(3)
5.3300	1.0338(2)	1.0351(1)	1.0369(1)	1.0387(3)
5.7155	1.0521(3)	1.0537(2)	1.0558(2)	1.0580(4)
6.0239	1.0420(2)	1.0433(2)	1.0450(2)	1.0469(3)
7.1034	1.0396(2)	1.0407(1)	1.0422(1)	1.0437(3)
7.7974	1.0329(2)	1.0338(1)	1.0350(1)	1.0363(2)
8.1829	1.0374(2)	1.0383(1)	1.0395(1)	1.0408(2)
9.2624	1.0434(2)	1.0443(2)	1.0455(2)	1.0468(3)
9.5708	1.0371(2)	1.0379(1)	1.0389(1)	1.0400(2)
10.9587	1.0373(2)	1.0380(1)	1.0389(1)	1.0398(2)
12.1153	1.0243(1)	1.0247(1)	1.0254(1)	1.0261(1)
13.1948	1.0266(1)	1.0270(1)	1.0276(1)	1.0282(1)
14.8912	1.0276(1)	1.0280(1)	1.0286(1)	1.0292(1)

Tabelle A.6: Z im MOM-Schema (6.8) für $\mathcal{O}_{r2b}$ bei $\beta = 6.00$.

$\mu^2 a^2$	$Z_{v2a}(\kappa_1)$	$Z_{v2a}(\kappa_2)$	$Z_{v2a}(\kappa_3)$	$Z_{v2a}(\kappa_c)$
0.1639	1.4433(65)	1.5052(89)	1.6029(153)	1.6919(215)
0.2410	1.4110(68)	1.4622(64)	1.5423(74)	1.6201(124)
0.3181	1.3304(42)	1.3650(43)	1.4158(48)	1.4669(80)
0.3952	1.3195(32)	1.3547(34)	1.4068(45)	1.4584(70)
0.4723	1.2683(27)	1.2918(17)	1.3258(29)	1.3600(48)
0.5494	1.2530(23)	1.2761(24)	1.3098(31)	1.3436(49)
0.5494	1.2632(20)	1.2893(28)	1.3274(37)	1.3653(55)
0.6265	1.2836(21)	1.3026(52)	1.3261(64)	1.3524(93)
0.7036	1.2127(19)	1.2310(24)	1.2578(31)	1.2845(47)
0.7807	1.2225(27)	1.2361(24)	1.2546(24)	1.2742(41)
0.8578	1.1819(12)	1.1958(17)	1.2154(18)	1.2355(28)
0.9349	1.1686(12)	1.1816(17)	1.2000(20)	1.2188(31)
1.0120	1.1786(17)	1.1896(13)	1.2048(13)	1.2208(24)
1.0120	1.1752(10)	1.1867(17)	1.2028(20)	1.2192(31)
1.1662	1.1529(6)	1.1622(8)	1.1752(10)	1.1887(15)
1.3204	1.1318(9)	1.1396(14)	1.1504(16)	1.1615(24)
1.3976	1.1110(7)	1.1196(9)	1.1319(12)	1.1442(18)
1.3976	1.1246(9)	1.1311(9)	1.1401(10)	1.1495(17)
1.4747	1.1166(6)	1.1232(8)	1.1323(9)	1.1417(14)
1.6289	1.1199(5)	1.1259(4)	1.1342(5)	1.1429(8)
1.8602	1.0838(4)	1.0891(6)	1.0966(6)	1.1042(9)
1.9373	1.0935(5)	1.0981(7)	1.1043(8)	1.1108(12)
2.0915	1.0814(4)	1.0856(6)	1.0915(6)	1.0975(10)
2.3228	1.0674(3)	1.0711(4)	1.0762(4)	1.0815(7)
2.4770	1.0858(3)	1.0895(4)	1.0946(5)	1.0999(7)
2.8626	1.0728(3)	1.0757(4)	1.0796(5)	1.0837(8)
3.1710	1.0928(4)	1.0956(3)	1.0995(3)	1.1036(5)
3.6336	1.0458(2)	1.0477(3)	1.0504(3)	1.0532(5)
3.9421	1.0297(2)	1.0315(2)	1.0340(3)	1.0366(4)
4.1734	1.0302(2)	1.0317(2)	1.0338(2)	1.0359(3)
4.9444	1.0281(1)	1.0293(2)	1.0308(2)	1.0324(3)
5.3300	1.0217(1)	1.0227(1)	1.0240(1)	1.0254(2)
5.7155	1.0363(2)	1.0374(2)	1.0388(2)	1.0403(3)
6.0239	1.0160(1)	1.0168(1)	1.0179(1)	1.0191(2)
7.1034	1.0314(1)	1.0321(1)	1.0331(1)	1.0341(2)
7.7974	1.0247(1)	1.0253(1)	1.0262(1)	1.0271(2)
8.1829	1.0202(1)	1.0208(1)	1.0215(1)	1.0223(2)
9.2624	1.0257(1)	1.0262(1)	1.0270(1)	1.0277(2)
9.5708	1.0220(1)	1.0224(1)	1.0231(1)	1.0237(1)
10.9587	1.0242(1)	1.0246(1)	1.0251(1)	1.0257(1)
12.1153	1.0138(1)	1.0141(1)	1.0144(1)	1.0149(1)
13.1948	1.0136(1)	1.0138(0)	1.0141(0)	1.0145(1)
14.8912	1.0138(1)	1.0140(0)	1.0143(0)	1.0146(1)

Tabelle A.7: Z im MOM-Schema (6.8) für $\mathcal{O}_{v2a}$ bei $\beta = 6.00$.

$\mu^2 a^2$	$Z_{v2b}(\kappa_1)$	$Z_{v2b}(\kappa_2)$	$Z_{v2b}(\kappa_3)$	$Z_{v2b}(\kappa_c)$
0.1639	1.3373(56)	1.3842(33)	1.4531(32)	1.5242(61)
0.2410	1.3229(67)	1.3654(64)	1.4297(80)	1.4930(130)
0.3181	1.2842(61)	1.3204(52)	1.3750(54)	1.4297(94)
0.3952	1.2337(38)	1.2574(29)	1.2917(38)	1.3265(63)
0.4723	1.2439(53)	1.2715(38)	1.3128(37)	1.3548(68)
0.5494	1.1904(25)	1.2078(25)	1.2327(34)	1.2579(53)
0.5494	1.1954(20)	1.2143(27)	1.2414(32)	1.2688(51)
0.6265	1.2050(48)	1.2274(43)	1.2606(52)	1.2938(87)
0.7036	1.1528(14)	1.1657(22)	1.1842(26)	1.2029(40)
0.7807	1.1803(35)	1.1981(29)	1.2244(36)	1.2508(60)
0.8578	1.1479(26)	1.1591(19)	1.1745(19)	1.1906(35)
0.9349	1.1205(9)	1.1306(15)	1.1449(17)	1.1596(26)
1.0120	1.1310(18)	1.1406(14)	1.1541(15)	1.1682(26)
1.0120	1.1180(16)	1.1260(17)	1.1371(19)	1.1486(31)
1.1662	1.1019(10)	1.1086(9)	1.1178(9)	1.1274(16)
1.3204	1.1099(17)	1.1174(14)	1.1281(16)	1.1392(27)
1.3976	1.0771(7)	1.0823(8)	1.0893(8)	1.0967(14)
1.3976	1.1204(20)	1.1299(16)	1.1437(16)	1.1578(29)
1.4747	1.1003(15)	1.1068(11)	1.1160(11)	1.1255(20)
1.6289	1.0771(9)	1.0816(7)	1.0878(8)	1.0942(14)
1.8602	1.0563(7)	1.0596(6)	1.0641(6)	1.0689(10)
1.9373	1.0817(11)	1.0865(9)	1.0934(9)	1.1005(16)
2.0915	1.0625(9)	1.0659(7)	1.0706(8)	1.0754(13)
2.3228	1.0441(6)	1.0465(5)	1.0499(5)	1.0534(8)
2.4770	1.0400(3)	1.0423(3)	1.0454(3)	1.0486(5)
2.8626	1.0517(6)	1.0541(4)	1.0574(4)	1.0609(8)
3.1710	1.0511(5)	1.0534(4)	1.0565(5)	1.0597(8)
3.6336	1.0445(5)	1.0464(4)	1.0490(4)	1.0517(8)
3.9421	1.0458(6)	1.0476(4)	1.0501(4)	1.0527(8)
4.1734	1.0199(3)	1.0208(2)	1.0220(2)	1.0234(4)
4.9444	1.0177(3)	1.0184(2)	1.0194(2)	1.0204(3)
5.3300	1.0076(2)	1.0080(1)	1.0087(1)	1.0094(2)
5.7155	1.0271(3)	1.0280(2)	1.0291(2)	1.0303(4)
6.0239	1.0178(3)	1.0183(2)	1.0191(2)	1.0199(3)
7.1034	1.0179(2)	1.0183(2)	1.0190(2)	1.0197(3)
7.7974	1.0096(2)	1.0099(1)	1.0103(1)	1.0107(2)
8.1829	1.0180(2)	1.0184(2)	1.0189(2)	1.0195(3)
9.2624	1.0245(2)	1.0250(2)	1.0257(2)	1.0264(3)
9.5708	1.0184(2)	1.0187(1)	1.0192(1)	1.0196(2)
10.9587	1.0191(2)	1.0194(1)	1.0198(1)	1.0202(2)
12.1153	1.0050(1)	1.0051(1)	1.0052(1)	1.0054(1)
13.1948	1.0088(1)	1.0089(1)	1.0090(1)	1.0091(1)
14.8912	1.0093(1)	1.0094(1)	1.0095(1)	1.0096(1)

Tabelle A.8: Z im MOM-Schema (6.8) für $\mathcal{O}_{v2b}$ bei $\beta = 6.00$.

$\mu^2 a^2$	$Z_{r3}(\kappa_1)$	$Z_{r3}(\kappa_2)$	$Z_{r3}(\kappa_3)$	$Z_{r3}(\kappa_c)$
0.1639	3.0780(266)	3.2710(388)	3.5273(636)	3.7987(898)
0.2410	2.5990(274)	2.7374(288)	2.9500(368)	3.1565(585)
0.3181	2.2764(167)	2.3442(170)	2.4288(175)	2.5220(294)
0.3952	2.0401(92)	2.0920(90)	2.1633(109)	2.2376(178)
0.4723	1.9107(123)	1.9505(159)	2.0044(175)	2.0610(278)
0.5494	1.8428(70)	1.8765(77)	1.9226(79)	1.9709(132)
0.5494	1.8711(73)	1.9058(55)	1.9525(63)	2.0020(110)
0.6265	2.0455(91)	2.0838(74)	2.1330(86)	2.1864(147)
0.7036	1.7451(53)	1.7703(58)	1.8041(69)	1.8398(111)
0.7807	1.7819(97)	1.8077(93)	1.8435(106)	1.8807(176)
0.8578	1.8008(50)	1.8261(45)	1.8598(50)	1.8956(84)
0.9349	1.6538(39)	1.6724(38)	1.6974(42)	1.7238(70)
1.0120	1.6731(43)	1.6918(43)	1.7172(46)	1.7440(77)
1.0120	1.6341(36)	1.6512(35)	1.6743(40)	1.6986(66)
1.1662	1.6062(28)	1.6214(35)	1.6419(38)	1.6636(61)
1.3204	1.5800(22)	1.5929(20)	1.6105(21)	1.6290(36)
1.3976	1.5423(24)	1.5543(20)	1.5706(21)	1.5878(37)
1.3976	1.6023(30)	1.6154(17)	1.6336(19)	1.6527(35)
1.4747	1.5266(20)	1.5374(9)	1.5520(10)	1.5676(20)
1.6289	1.5443(23)	1.5554(26)	1.5705(28)	1.5863(45)
1.8602	1.4485(14)	1.4564(11)	1.4671(12)	1.4784(21)
1.9373	1.4503(14)	1.4581(9)	1.4686(9)	1.4798(17)
2.0915	1.4278(12)	1.4347(9)	1.4442(9)	1.4541(17)
2.3228	1.4021(10)	1.4082(9)	1.4165(9)	1.4252(16)
2.4770	1.4294(12)	1.4360(15)	1.4451(15)	1.4545(25)
2.8626	1.3887(10)	1.3939(7)	1.4008(8)	1.4082(14)
3.1710	1.4275(13)	1.4329(12)	1.4404(12)	1.4482(21)
3.6336	1.3420(7)	1.3456(5)	1.3504(5)	1.3555(9)
3.9421	1.3186(8)	1.3219(6)	1.3263(6)	1.3310(10)
4.1734	1.3087(6)	1.3115(4)	1.3153(4)	1.3193(7)
4.9444	1.2932(5)	1.2954(3)	1.2985(3)	1.3018(6)
5.3300	1.2794(4)	1.2813(3)	1.2840(3)	1.2869(6)
5.7155	1.2966(5)	1.2987(3)	1.3016(3)	1.3046(6)
6.0239	1.2689(4)	1.2706(3)	1.2729(3)	1.2753(5)
7.1034	1.2737(4)	1.2752(3)	1.2773(3)	1.2795(5)
7.7974	1.2658(4)	1.2672(3)	1.2690(3)	1.2710(5)
8.1829	1.2577(4)	1.2588(3)	1.2604(3)	1.2621(5)
9.2624	1.2662(4)	1.2674(3)	1.2690(3)	1.2707(5)
9.5708	1.2548(4)	1.2558(2)	1.2572(2)	1.2587(5)
10.9587	1.2538(4)	1.2548(2)	1.2560(2)	1.2573(4)
12.1153	1.2348(3)	1.2354(2)	1.2363(2)	1.2373(4)
13.1948	1.2220(3)	1.2226(2)	1.2233(2)	1.2240(3)
14.8912	1.2214(3)	1.2218(2)	1.2224(2)	1.2231(3)

Tabelle A.9: Z im MOM-Schema (6.8) für $\mathcal{O}_{r3}$ bei $\beta = 6.00$.

$\mu^2 a^2$	$Z_{a2}(\kappa_1)$	$Z_{a2}(\kappa_2)$	$Z_{a2}(\kappa_3)$	$Z_{a2}(\kappa_c)$
0.1639	2.7825(432)	2.9682(380)	3.2217(743)	3.4839(1079)
0.2410	2.4276(147)	2.5355(165)	2.6872(144)	2.8443(246)
0.3181	2.1849(141)	2.2516(99)	2.3421(98)	2.4378(180)
0.3952	2.1136(136)	2.1767(47)	2.2645(60)	2.3575(120)
0.4723	1.9675(102)	2.0110(62)	2.0698(68)	2.1322(125)
0.5494	1.9415(92)	1.9842(72)	2.0425(84)	2.1037(145)
0.5494	1.9809(87)	2.0266(69)	2.0877(81)	2.1526(139)
0.6265	1.9171(45)	1.9545(68)	2.0039(65)	2.0567(104)
0.7036	1.8302(69)	1.8621(55)	1.9056(62)	1.9514(108)
0.7807	1.7740(56)	1.8000(52)	1.8349(57)	1.8719(97)
0.8578	1.7552(54)	1.7802(33)	1.8135(36)	1.8490(66)
0.9349	1.7125(50)	1.7348(38)	1.7647(42)	1.7964(73)
1.0120	1.6760(40)	1.6961(34)	1.7229(37)	1.7514(63)
1.0120	1.6874(37)	1.7081(40)	1.7357(44)	1.7651(72)
1.1662	1.6411(42)	1.6583(31)	1.6814(32)	1.7059(58)
1.3204	1.5818(31)	1.5962(26)	1.6157(27)	1.6363(48)
1.3976	1.5625(31)	1.5760(17)	1.5942(18)	1.6136(34)
1.3976	1.5538(28)	1.5671(22)	1.5853(24)	1.6045(41)
1.4747	1.5600(32)	1.5729(16)	1.5902(17)	1.6086(33)
1.6289	1.5252(23)	1.5365(18)	1.5516(19)	1.5676(34)
1.8602	1.4706(20)	1.4793(14)	1.4909(15)	1.5032(27)
1.9373	1.4718(20)	1.4808(14)	1.4929(15)	1.5057(27)
2.0915	1.4482(18)	1.4559(12)	1.4662(13)	1.4772(24)
2.3228	1.4192(16)	1.4257(10)	1.4344(11)	1.4437(20)
2.4770	1.4642(20)	1.4720(15)	1.4826(15)	1.4937(28)
2.8626	1.4088(14)	1.4145(9)	1.4223(9)	1.4304(17)
3.1710	1.4018(11)	1.4074(8)	1.4150(8)	1.4230(14)
3.6336	1.3377(9)	1.3415(6)	1.3467(6)	1.3522(11)
3.9421	1.3446(10)	1.3486(6)	1.3540(6)	1.3598(12)
4.1734	1.3232(9)	1.3262(5)	1.3303(5)	1.3346(9)
4.9444	1.2915(6)	1.2936(4)	1.2965(4)	1.2996(7)
5.3300	1.2784(6)	1.2802(3)	1.2826(3)	1.2852(6)
5.7155	1.2794(5)	1.2813(3)	1.2839(3)	1.2867(6)
6.0239	1.2683(5)	1.2699(3)	1.2721(3)	1.2744(6)
7.1034	1.2646(5)	1.2660(3)	1.2679(3)	1.2699(5)
7.7974	1.2720(5)	1.2734(3)	1.2753(3)	1.2773(6)
8.1829	1.2462(4)	1.2472(2)	1.2486(2)	1.2500(5)
9.2624	1.2400(4)	1.2409(3)	1.2422(3)	1.2436(5)
9.5708	1.2458(4)	1.2468(2)	1.2480(2)	1.2494(4)
10.9587	1.2341(4)	1.2349(2)	1.2358(2)	1.2369(4)
12.1153	1.2148(3)	1.2153(2)	1.2159(2)	1.2166(3)
13.1948	1.2115(3)	1.2119(2)	1.2124(2)	1.2129(3)
14.8912	1.2113(3)	1.2117(2)	1.2121(2)	1.2126(3)

Tabelle A.10: Z im MOM-Schema (6.8) für $\mathcal{O}_{a2}$ bei $\beta = 6.00$.

$\mu^2 a^2$	$Z_{v3}(\kappa_1)$	$Z_{v3}(\kappa_2)$	$Z_{v3}(\kappa_3)$	$Z_{v3}(\kappa_c)$
0.1639	2.6043(203)	2.7763(253)	3.0387(424)	3.2865(607)
0.2410	2.3684(211)	2.5100(260)	2.7327(316)	2.9455(495)
0.3181	2.1307(150)	2.2064(164)	2.3110(167)	2.4199(277)
0.3952	1.9676(69)	2.0241(84)	2.1017(104)	2.1825(163)
0.4723	1.8604(91)	1.9015(135)	1.9559(151)	2.0138(236)
0.5494	1.8022(56)	1.8380(75)	1.8865(84)	1.9375(132)
0.5494	1.8192(68)	1.8571(55)	1.9085(66)	1.9626(113)
0.6265	1.9244(77)	1.9644(51)	2.0191(62)	2.0766(109)
0.7036	1.7100(49)	1.7362(56)	1.7713(67)	1.8084(107)
0.7807	1.7143(87)	1.7414(87)	1.7796(99)	1.8188(164)
0.8578	1.7322(38)	1.7601(36)	1.7987(40)	1.8389(67)
0.9349	1.6220(37)	1.6406(37)	1.6653(43)	1.6915(71)
1.0120	1.6343(39)	1.6535(43)	1.6796(46)	1.7069(76)
1.0120	1.6001(33)	1.6176(35)	1.6411(39)	1.6659(64)
1.1662	1.5746(24)	1.5899(33)	1.6105(35)	1.6322(56)
1.3204	1.5480(18)	1.5607(15)	1.5778(16)	1.5960(27)
1.3976	1.5101(21)	1.5226(18)	1.5397(20)	1.5577(34)
1.3976	1.5693(35)	1.5819(20)	1.5990(21)	1.6172(41)
1.4747	1.5014(18)	1.5117(9)	1.5255(9)	1.5403(18)
1.6289	1.5174(21)	1.5287(25)	1.5440(27)	1.5600(43)
1.8602	1.4270(13)	1.4341(11)	1.4437(12)	1.4539(20)
1.9373	1.4321(13)	1.4389(10)	1.4481(11)	1.4578(19)
2.0915	1.4103(12)	1.4163(10)	1.4243(10)	1.4328(18)
2.3228	1.3856(10)	1.3907(9)	1.3976(9)	1.4050(16)
2.4770	1.4067(10)	1.4132(14)	1.4220(14)	1.4312(23)
2.8626	1.3733(9)	1.3776(8)	1.3834(8)	1.3896(14)
3.1710	1.4127(12)	1.4181(12)	1.4256(12)	1.4334(20)
3.6336	1.3271(6)	1.3300(4)	1.3338(4)	1.3379(8)
3.9421	1.3053(7)	1.3083(5)	1.3124(5)	1.3167(9)
4.1734	1.2959(5)	1.2980(4)	1.3009(4)	1.3040(6)
4.9444	1.2828(4)	1.2845(3)	1.2868(3)	1.2892(5)
5.3300	1.2698(4)	1.2712(3)	1.2732(3)	1.2753(5)
5.7155	1.2864(5)	1.2880(3)	1.2902(3)	1.2925(6)
6.0239	1.2589(4)	1.2601(3)	1.2618(3)	1.2635(5)
7.1034	1.2659(4)	1.2671(3)	1.2687(3)	1.2704(5)
7.7974	1.2574(3)	1.2585(2)	1.2599(2)	1.2615(4)
8.1829	1.2493(4)	1.2502(2)	1.2513(2)	1.2526(4)
9.2624	1.2574(4)	1.2583(3)	1.2595(3)	1.2607(5)
9.5708	1.2467(4)	1.2475(2)	1.2485(2)	1.2496(4)
10.9587	1.2459(3)	1.2466(2)	1.2475(2)	1.2485(4)
12.1153	1.2276(3)	1.2281(2)	1.2288(2)	1.2294(3)
13.1948	1.2158(2)	1.2161(1)	1.2166(1)	1.2171(3)
14.8912	1.2149(2)	1.2152(2)	1.2156(2)	1.2160(3)

Tabelle A.11: Z im MOM-Schema (6.8) für $\mathcal{O}_{v3}$ bei $\beta = 6.00$.

$\mu^2 a^2$	$Z_{v4}(\kappa_1)$	$Z_{v4}(\kappa_2)$	$Z_{v4}(\kappa_3)$	$Z_{v4}(\kappa_c)$
0.1639	4.0780(1071)	4.4007(1648)	4.9634(3542)	5.4076(4476)
0.2410	3.7585(424)	4.0200(530)	4.4279(625)	4.8204(985)
0.3181	5.4394(6801)	5.5438(6202)	5.6058(8292)	5.7226(13400)
0.3952	2.9977(250)	3.0999(193)	3.2415(248)	3.3889(419)
0.4723	2.7856(276)	2.8631(209)	2.9652(283)	3.0744(474)
0.5494	2.6463(379)	2.7080(343)	2.7845(463)	2.8694(748)
0.5494	2.7251(164)	2.7901(172)	2.8776(198)	2.9699(322)
0.6265	2.7092(159)	2.7709(136)	2.8535(140)	2.9413(244)
0.7036	2.5098(90)	2.5597(270)	2.6348(311)	2.7079(456)
0.7807	2.5465(142)	2.5943(58)	2.6599(79)	2.7292(151)
0.8578	2.4522(122)	2.4942(115)	2.5508(131)	2.6106(219)
0.9349	2.3161(58)	2.3486(86)	2.3919(92)	2.4379(145)
1.0120	2.2728(87)	2.3027(76)	2.3428(82)	2.3853(140)
1.0120	2.3314(65)	2.3656(72)	2.4118(77)	2.4606(126)
1.1662	2.2040(109)	2.2292(63)	2.2634(68)	2.2996(127)
1.3204	2.2386(97)	2.2590(106)	2.2861(119)	2.3149(194)
1.3976	2.1022(51)	2.1222(42)	2.1493(46)	2.1778(79)
1.3976	2.0724(71)	2.0891(45)	2.1112(46)	2.1347(85)
1.4747	2.0875(53)	2.1069(35)	2.1330(37)	2.1607(68)
1.6289	2.0213(51)	2.0366(42)	2.0572(44)	2.0791(77)
1.8602	1.9579(33)	1.9692(24)	1.9844(25)	2.0005(45)
1.9373	1.9418(35)	1.9527(30)	1.9673(31)	1.9829(54)
2.0915	1.9037(37)	1.9132(31)	1.9260(32)	1.9397(57)
2.3228	1.8768(63)	1.8852(45)	1.8967(46)	1.9089(84)
2.4770	1.8430(72)	1.8525(44)	1.8654(44)	1.8790(84)
2.8626	1.7895(23)	1.7960(18)	1.8048(19)	1.8140(33)
3.1710	1.7868(23)	1.7934(18)	1.8025(19)	1.8121(34)
3.6336	1.7561(15)	1.7603(23)	1.7659(23)	1.7719(36)
3.9421	1.6837(14)	1.6881(19)	1.6943(20)	1.7007(31)
4.1734	1.6549(16)	1.6579(17)	1.6619(17)	1.6661(28)
4.9444	1.6244(18)	1.6264(21)	1.6291(21)	1.6318(35)
5.3300	1.6302(67)	1.6318(63)	1.6341(63)	1.6365(108)
5.7155	1.6116(10)	1.6133(12)	1.6155(12)	1.6179(20)
6.0239	1.5503(14)	1.5514(23)	1.5530(23)	1.5545(36)
7.1034	1.4919(12)	1.4923(9)	1.4929(9)	1.4936(16)
7.7974	0.9158(26)	0.9140(13)	0.9119(12)	0.9095(25)
8.1829	1.4944(11)	1.4945(11)	1.4948(11)	1.4950(19)
9.2624	1.5495(8)	1.5500(11)	1.5507(11)	1.5514(17)
9.5708	1.3038(13)	1.3029(8)	1.3017(8)	1.3005(14)
10.9587	1.4053(13)	1.4048(13)	1.4042(13)	1.4035(21)
12.1153	1.7384(16)	1.7399(17)	1.7419(17)	1.7440(28)
13.1948	4.9475(1008)	5.0180(540)	5.1125(562)	5.2131(1082)
14.8912	1.8217(22)	1.8238(13)	1.8265(13)	1.8295(25)

Tabelle A.12: Z im MOM-Schema (6.8) für $\mathcal{O}_{v4}$ bei $\beta = 6.00$.

$\mu^2 a^2$	$Z_P(\kappa_1)$	$Z_P(\kappa_2)$	$Z_P(\kappa_3)$	$Z_P(\kappa_c)$
0.0728	0.3691(7)	0.2943(12)	0.2000(24)	0.1602(24)
0.1071	0.3919(22)	0.3244(30)	0.2352(31)	0.1808(40)
0.1414	0.4115(21)	0.3508(33)	0.2676(55)	0.2323(60)
0.1756	0.4201(13)	0.3628(14)	0.2828(2)	0.2210(6)
0.2099	0.4379(36)	0.3862(40)	0.3132(44)	0.2715(58)
0.2442	0.4518(24)	0.4042(28)	0.3355(30)	0.2968(40)
0.2442	0.4577(11)	0.4123(17)	0.3482(31)	0.3249(32)
0.2784	0.4733(13)	0.4301(21)	0.3660(37)	0.3437(39)
0.3127	0.4761(13)	0.4356(20)	0.3760(39)	0.3570(39)
0.3812	0.5001(9)	0.4651(12)	0.4127(26)	0.3985(25)
0.4498	0.5148(9)	0.4840(10)	0.4392(17)	0.4204(19)
0.5183	0.5247(9)	0.4970(9)	0.4572(11)	0.4354(14)
0.5869	0.5393(9)	0.5134(14)	0.4748(28)	0.4627(28)
0.6554	0.5472(9)	0.5244(9)	0.4923(14)	0.4777(16)
0.6554	0.5469(5)	0.5233(9)	0.4891(17)	0.4784(17)
0.7239	0.5565(13)	0.5353(17)	0.5056(26)	0.4922(30)
0.8268	0.5693(7)	0.5503(8)	0.5243(9)	0.5095(12)
0.9296	0.5786(9)	0.5611(9)	0.5376(10)	0.5238(14)
1.0324	0.5877(6)	0.5716(5)	0.5504(6)	0.5372(8)
1.1009	0.5967(4)	0.5809(6)	0.5605(13)	0.5526(12)
1.2723	0.6072(7)	0.5930(7)	0.5747(12)	0.5655(14)
1.4093	0.6180(7)	0.6046(8)	0.5872(13)	0.5786(15)
1.6149	0.6284(5)	0.6163(5)	0.6015(6)	0.5919(8)
1.8548	0.6388(3)	0.6277(4)	0.6139(9)	0.6078(9)
2.1975	0.6532(3)	0.6432(2)	0.6311(4)	0.6250(5)
2.3689	0.6595(2)	0.6500(2)	0.6390(3)	0.6328(4)
2.6773	0.6707(2)	0.6619(2)	0.6520(2)	0.6450(3)
3.1571	0.6851(2)	0.6771(2)	0.6680(2)	0.6611(2)
3.6368	0.6976(2)	0.6903(2)	0.6822(1)	0.6759(2)
4.0138	0.7060(1)	0.6992(1)	0.6917(3)	0.6877(3)
4.0138	0.7066(1)	0.6997(1)	0.6922(4)	0.6884(3)
4.4250	0.7147(1)	0.7082(1)	0.7012(2)	0.6966(2)
4.8705	0.7236(1)	0.7175(2)	0.7111(3)	0.7071(3)
5.3846	0.7311(1)	0.7253(1)	0.7191(1)	0.7150(1)
5.8644	0.7408(1)	0.7355(1)	0.7300(2)	0.7262(2)
6.6183	0.7514(1)	0.7465(1)	0.7414(1)	0.7374(1)
7.3722	0.7615(1)	0.7569(1)	0.7522(1)	0.7483(1)
7.9205	0.7685(1)	0.7640(1)	0.7595(0)	0.7556(0)
8.1261	0.7710(1)	0.7667(1)	0.7624(1)	0.7592(1)
8.9486	0.7819(0)	0.7780(0)	0.7741(1)	0.7717(1)
9.3256	0.7862(1)	0.7824(1)	0.7788(1)	0.7760(1)

Tabelle A.13: Z im MOM-Schema (6.8) für die Pseudoskalare Dichte $\mathcal{O}_P$ bei $\beta = 6.20$.

$\mu^2 a^2$	$Z_I(\kappa_1)$	$Z_I(\kappa_2)$	$Z_I(\kappa_3)$	$Z_I(\kappa_c)$
0.0728	0.7997(88)	0.7247(178)	0.6883(414)	0.6252(363)
0.1071	0.7542(63)	0.6847(105)	0.6500(270)	0.5912(224)
0.1414	0.7291(48)	0.6656(83)	0.6244(167)	0.5763(162)
0.1756	0.7106(33)	0.6530(56)	0.6242(202)	0.5733(130)
0.2099	0.7060(60)	0.6514(88)	0.6094(163)	0.5703(169)
0.2442	0.7036(40)	0.6552(56)	0.6220(113)	0.5860(112)
0.2442	0.7060(26)	0.6559(44)	0.6214(86)	0.5843(85)
0.2784	0.7145(23)	0.6715(38)	0.6465(98)	0.6121(81)
0.3127	0.7040(21)	0.6635(32)	0.6339(76)	0.6046(67)
0.3812	0.7142(17)	0.6800(23)	0.6597(61)	0.6324(50)
0.4498	0.7165(15)	0.6859(24)	0.6644(55)	0.6418(49)
0.5183	0.7172(19)	0.6906(27)	0.6716(61)	0.6521(56)
0.5869	0.7287(13)	0.7061(11)	0.6926(5)	0.6772(9)
0.6554	0.7281(19)	0.7070(23)	0.6908(40)	0.6756(44)
0.6554	0.7293(7)	0.7081(14)	0.6937(35)	0.6779(29)
0.7239	0.7332(14)	0.7143(17)	0.7018(32)	0.6876(33)
0.8268	0.7399(10)	0.7235(14)	0.7121(24)	0.7000(26)
0.9296	0.7445(14)	0.7300(16)	0.7201(21)	0.7094(26)
1.0324	0.7492(10)	0.7360(13)	0.7271(17)	0.7174(21)
1.1009	0.7599(6)	0.7474(8)	0.7379(19)	0.7290(18)
1.2723	0.7635(10)	0.7529(14)	0.7457(21)	0.7378(24)
1.4093	0.7727(8)	0.7632(11)	0.7562(18)	0.7493(20)
1.6149	0.7765(7)	0.7685(8)	0.7625(15)	0.7569(16)
1.8548	0.7806(4)	0.7741(5)	0.7693(7)	0.7646(8)
2.1975	0.7879(4)	0.7827(5)	0.7792(11)	0.7753(11)
2.3689	0.7908(3)	0.7860(4)	0.7825(7)	0.7790(7)
2.6773	0.7989(3)	0.7947(3)	0.7915(4)	0.7884(5)
3.1571	0.8072(2)	0.8039(2)	0.8013(3)	0.7989(4)
3.6368	0.8133(2)	0.8106(1)	0.8088(1)	0.8069(2)
4.0138	0.8158(1)	0.8134(2)	0.8117(4)	0.8100(4)
4.0138	0.8198(1)	0.8174(2)	0.8159(3)	0.8142(3)
4.4250	0.8226(1)	0.8205(1)	0.8191(1)	0.8176(2)
4.8705	0.8294(1)	0.8275(1)	0.8260(1)	0.8246(1)
5.3846	0.8327(1)	0.8311(1)	0.8300(2)	0.8289(2)
5.8644	0.8362(1)	0.8348(1)	0.8338(1)	0.8327(1)
6.6183	0.8436(1)	0.8423(1)	0.8416(0)	0.8408(1)
7.3722	0.8503(1)	0.8493(1)	0.8486(1)	0.8478(1)
7.9205	0.8564(1)	0.8555(1)	0.8549(1)	0.8542(2)
8.1261	0.8566(1)	0.8557(1)	0.8551(1)	0.8545(2)
8.9486	0.8608(0)	0.8601(0)	0.8596(0)	0.8590(0)
9.3256	0.8635(1)	0.8628(0)	0.8623(0)	0.8618(1)

Tabelle A.14: Z im MOM-Schema (6.8) für die Skalare Dichte $\mathcal{O}_I$ bei $\beta = 6.20$.

$\mu^2 a^2$	$Z_A(\kappa_1)$	$Z_A(\kappa_2)$	$Z_A(\kappa_3)$	$Z_A(\kappa_c)$
0.0728	0.9304(17)	0.9316(53)	0.9304(172)	0.9327(117)
0.1071	0.8878(26)	0.8844(33)	0.8831(40)	0.8806(51)
0.1414	0.8575(25)	0.8483(41)	0.8371(54)	0.8307(64)
0.1756	0.8449(13)	0.8371(16)	0.8265(21)	0.8211(26)
0.2099	0.8302(9)	0.8229(10)	0.8176(34)	0.8123(24)
0.2442	0.8209(6)	0.8141(7)	0.8077(10)	0.8029(12)
0.2442	0.8183(7)	0.8111(4)	0.8042(10)	0.7995(11)
0.2784	0.8101(7)	0.8046(9)	0.8003(19)	0.7963(18)
0.3127	0.8088(5)	0.8039(7)	0.7993(6)	0.7954(8)
0.3812	0.8010(4)	0.7981(6)	0.7966(15)	0.7943(13)
0.4498	0.7979(4)	0.7965(4)	0.7963(5)	0.7954(6)
0.5183	0.7965(2)	0.7957(3)	0.7959(9)	0.7948(7)
0.5869	0.7945(4)	0.7947(7)	0.7967(11)	0.7965(12)
0.6554	0.7941(1)	0.7942(2)	0.7952(7)	0.7947(5)
0.6554	0.7943(2)	0.7947(4)	0.7962(7)	0.7961(7)
0.7239	0.7940(3)	0.7946(5)	0.7960(9)	0.7961(10)
0.8268	0.7934(1)	0.7944(1)	0.7963(2)	0.7963(2)
0.9296	0.7941(2)	0.7952(2)	0.7969(4)	0.7976(4)
1.0324	0.7944(1)	0.7956(1)	0.7972(2)	0.7979(2)
1.1009	0.7938(1)	0.7950(2)	0.7964(1)	0.7973(2)
1.2723	0.7954(2)	0.7967(3)	0.7983(3)	0.7994(4)
1.4093	0.7951(2)	0.7964(2)	0.7979(3)	0.7988(4)
1.6149	0.7968(2)	0.7981(2)	0.7995(2)	0.8005(3)
1.8548	0.7989(2)	0.8001(3)	0.8013(3)	0.8022(4)
2.1975	0.8013(2)	0.8024(2)	0.8034(1)	0.8043(2)
2.3689	0.8026(1)	0.8035(1)	0.8046(1)	0.8053(2)
2.6773	0.8046(1)	0.8054(1)	0.8063(1)	0.8070(1)
3.1571	0.8079(2)	0.8086(2)	0.8092(2)	0.8097(3)
3.6368	0.8114(1)	0.8120(1)	0.8126(2)	0.8130(2)
4.0138	0.8148(1)	0.8153(1)	0.8158(1)	0.8161(1)
4.0138	0.8136(1)	0.8141(1)	0.8146(1)	0.8149(2)
4.4250	0.8175(1)	0.8179(1)	0.8183(1)	0.8186(1)
4.8705	0.8202(1)	0.8204(1)	0.8208(1)	0.8210(2)
5.3846	0.8247(1)	0.8249(1)	0.8252(1)	0.8254(1)
5.8644	0.8285(1)	0.8286(1)	0.8289(1)	0.8291(1)
6.6183	0.8338(1)	0.8339(1)	0.8341(1)	0.8342(1)
7.3722	0.8390(1)	0.8391(1)	0.8392(0)	0.8393(1)
7.9205	0.8421(1)	0.8422(1)	0.8423(1)	0.8424(1)
8.1261	0.8441(1)	0.8442(1)	0.8443(1)	0.8444(1)
8.9486	0.8509(0)	0.8510(0)	0.8511(0)	0.8512(0)
9.3256	0.8535(1)	0.8536(0)	0.8537(0)	0.8538(1)

Tabelle A.15: Z für den Axialvektor-Strom $\mathcal{O}_A$ im MOM-Schema (6.15) bei $\beta = 6.20$.

$\mu^2 a^2$	$Z_V(\kappa_1)$	$Z_V(\kappa_2)$	$Z_V(\kappa_3)$	$Z_V(\kappa_c)$
0.0728	0.6583(4)	0.6570(8)	0.6577(16)	0.6561(15)
0.1071	0.6658(2)	0.6658(4)	0.6675(8)	0.6667(7)
0.1414	0.6714(2)	0.6723(4)	0.6751(8)	0.6748(7)
0.1756	0.6765(3)	0.6774(5)	0.6799(8)	0.6801(8)
0.2099	0.6805(2)	0.6820(2)	0.6852(4)	0.6855(4)
0.2442	0.6841(1)	0.6857(2)	0.6888(4)	0.6894(4)
0.2442	0.6837(2)	0.6855(3)	0.6888(5)	0.6897(6)
0.2784	0.6846(2)	0.6864(3)	0.6892(5)	0.6901(6)
0.3127	0.6897(1)	0.6915(2)	0.6944(3)	0.6951(3)
0.3812	0.6932(2)	0.6950(3)	0.6976(3)	0.6990(4)
0.4498	0.6975(2)	0.6991(2)	0.7016(3)	0.7026(3)
0.5183	0.7017(2)	0.7032(2)	0.7054(4)	0.7063(4)
0.5869	0.7035(2)	0.7047(2)	0.7064(2)	0.7075(3)
0.6554	0.7073(2)	0.7085(3)	0.7103(4)	0.7111(5)
0.6554	0.7071(1)	0.7082(2)	0.7100(2)	0.7109(3)
0.7239	0.7099(1)	0.7109(1)	0.7124(2)	0.7130(3)
0.8268	0.7132(1)	0.7140(1)	0.7153(2)	0.7158(2)
0.9296	0.7167(2)	0.7173(2)	0.7184(2)	0.7189(3)
1.0324	0.7196(2)	0.7200(2)	0.7209(2)	0.7213(3)
1.1009	0.7193(1)	0.7195(1)	0.7202(1)	0.7205(1)
1.2723	0.7244(2)	0.7244(2)	0.7250(3)	0.7251(3)
1.4093	0.7259(1)	0.7257(2)	0.7261(2)	0.7260(3)
1.6149	0.7309(2)	0.7306(2)	0.7307(3)	0.7304(3)
1.8548	0.7363(1)	0.7357(1)	0.7356(1)	0.7352(2)
2.1975	0.7424(1)	0.7416(1)	0.7413(1)	0.7408(2)
2.3689	0.7454(1)	0.7445(1)	0.7441(1)	0.7435(1)
2.6773	0.7490(1)	0.7479(1)	0.7474(1)	0.7467(1)
3.1571	0.7554(1)	0.7542(1)	0.7535(1)	0.7527(1)
3.6368	0.7618(1)	0.7605(1)	0.7597(1)	0.7588(1)
4.0138	0.7680(1)	0.7667(1)	0.7659(1)	0.7649(1)
4.0138	0.7652(1)	0.7638(1)	0.7630(1)	0.7620(1)
4.4250	0.7713(1)	0.7700(0)	0.7691(0)	0.7681(0)
4.8705	0.7748(1)	0.7734(1)	0.7725(1)	0.7715(1)
5.3846	0.7809(1)	0.7795(1)	0.7786(1)	0.7776(1)
5.8644	0.7876(1)	0.7862(1)	0.7853(1)	0.7843(1)
6.6183	0.7940(1)	0.7927(1)	0.7917(1)	0.7907(1)
7.3722	0.8004(0)	0.7991(0)	0.7982(0)	0.7973(0)
7.9205	0.8036(0)	0.8023(0)	0.8015(0)	0.8005(0)
8.1261	0.8068(0)	0.8056(0)	0.8047(0)	0.8038(1)
8.9486	0.8167(0)	0.8155(0)	0.8147(0)	0.8139(1)
9.3256	0.8198(0)	0.8187(0)	0.8179(1)	0.8171(1)

Tabelle A.16: Z für den Vektor-Strom $\mathcal{O}_V$ im MOM-Schema (6.15) bei $\beta = 6.20$.

$\mu^2 a^2$	$Z_{r2a}(\kappa_1)$	$Z_{r2a}(\kappa_2)$	$Z_{r2a}(\kappa_3)$	$Z_{r2a}(\kappa_c)$
0.0728	1.8276(261)	1.9730(389)	2.0821(535)	2.1885(632)
0.1071	1.6474(193)	1.7368(290)	1.7985(402)	1.8643(473)
0.1414	1.5574(64)	1.6205(64)	1.6680(88)	1.7142(110)
0.1756	1.5493(77)	1.6167(83)	1.6637(83)	1.7131(114)
0.2099	1.4284(68)	1.4661(83)	1.4917(91)	1.5192(120)
0.2442	1.4274(59)	1.4675(74)	1.4965(99)	1.5260(121)
0.2442	1.4671(80)	1.5132(97)	1.5447(106)	1.5785(140)
0.2784	1.4005(125)	1.4275(142)	1.4386(148)	1.4574(199)
0.3127	1.3768(42)	1.4099(44)	1.4324(40)	1.4565(56)
0.3812	1.3190(33)	1.3430(36)	1.3604(34)	1.3782(48)
0.4498	1.2880(29)	1.3074(33)	1.3206(37)	1.3348(49)
0.5183	1.2536(25)	1.2710(26)	1.2834(25)	1.2962(35)
0.5869	1.2269(22)	1.2421(24)	1.2537(25)	1.2650(34)
0.6554	1.2026(25)	1.2158(28)	1.2258(31)	1.2355(41)
0.6554	1.2164(13)	1.2303(14)	1.2404(15)	1.2506(20)
0.7239	1.1952(16)	1.2077(17)	1.2172(19)	1.2265(25)
0.8268	1.1820(15)	1.1930(16)	1.2011(17)	1.2093(23)
0.9296	1.1572(14)	1.1668(14)	1.1739(14)	1.1810(20)
1.0324	1.1456(12)	1.1542(12)	1.1606(12)	1.1670(17)
1.1009	1.1446(10)	1.1531(10)	1.1595(9)	1.1659(13)
1.2723	1.1269(10)	1.1342(10)	1.1396(10)	1.1450(14)
1.4093	1.1271(5)	1.1342(5)	1.1395(5)	1.1447(7)
1.6149	1.0958(8)	1.1015(8)	1.1057(8)	1.1099(11)
1.8548	1.0827(6)	1.0872(6)	1.0905(6)	1.0939(9)
2.1975	1.0694(5)	1.0732(5)	1.0760(6)	1.0788(8)
2.3689	1.0621(4)	1.0654(5)	1.0679(5)	1.0704(6)
2.6773	1.0514(4)	1.0544(5)	1.0566(5)	1.0588(6)
3.1571	1.0553(3)	1.0581(3)	1.0601(3)	1.0622(4)
3.6368	1.0403(3)	1.0424(3)	1.0441(3)	1.0457(4)
4.0138	1.0316(2)	1.0333(2)	1.0345(2)	1.0358(3)
4.0138	1.0319(2)	1.0338(2)	1.0353(2)	1.0368(3)
4.4250	1.0350(2)	1.0367(2)	1.0380(2)	1.0392(3)
4.8705	1.0373(2)	1.0389(2)	1.0402(2)	1.0414(2)
5.3846	1.0317(1)	1.0331(1)	1.0341(1)	1.0351(2)
5.8644	1.0204(2)	1.0215(2)	1.0223(2)	1.0230(2)
6.6183	1.0216(1)	1.0226(1)	1.0233(1)	1.0240(2)
7.3722	1.0144(1)	1.0152(1)	1.0158(1)	1.0163(2)
7.9205	1.0175(1)	1.0183(1)	1.0189(1)	1.0194(2)
8.1261	1.0156(1)	1.0163(1)	1.0168(1)	1.0173(2)
8.9486	1.0087(1)	1.0091(1)	1.0095(1)	1.0098(1)
9.3256	1.0065(1)	1.0069(1)	1.0072(1)	1.0075(1)

Tabelle A.17: Z im MOM-Schema (6.8) für $\mathcal{O}_{r2a}$ bei $\beta = 6.20$.

$\mu^2 a^2$	$Z_{r2b}(\kappa_1)$	$Z_{r2b}(\kappa_2)$	$Z_{r2b}(\kappa_3)$	$Z_{r2b}(\kappa_c)$
0.0728	1.7931(245)	1.9289(430)	2.0245(755)	2.1244(787)
0.1071	1.6439(122)	1.7170(160)	1.7621(217)	1.8162(262)
0.1414	1.6141(217)	1.6960(276)	1.7615(320)	1.8221(410)
0.1756	1.4688(63)	1.5094(93)	1.5328(133)	1.5632(155)
0.2099	1.5061(132)	1.5569(155)	1.5927(161)	1.6299(215)
0.2442	1.3863(60)	1.4157(71)	1.4351(78)	1.4565(103)
0.2442	1.4038(60)	1.4339(79)	1.4543(98)	1.4764(122)
0.2784	1.4457(93)	1.4832(107)	1.5099(113)	1.5375(151)
0.3127	1.3274(23)	1.3495(24)	1.3638(23)	1.3797(32)
0.3812	1.3105(69)	1.3306(76)	1.3445(86)	1.3592(113)
0.4498	1.2584(51)	1.2733(60)	1.2840(67)	1.2950(88)
0.5183	1.2315(27)	1.2454(29)	1.2554(34)	1.2656(44)
0.5869	1.2458(53)	1.2601(58)	1.2707(59)	1.2812(80)
0.6554	1.2295(40)	1.2426(43)	1.2517(47)	1.2613(63)
0.6554	1.2022(30)	1.2140(34)	1.2229(36)	1.2316(48)
0.7239	1.1879(26)	1.1985(29)	1.2065(32)	1.2143(43)
0.8268	1.1621(21)	1.1709(22)	1.1775(22)	1.1840(31)
0.9296	1.1615(26)	1.1702(27)	1.1767(28)	1.1831(39)
1.0324	1.1371(18)	1.1445(18)	1.1500(19)	1.1554(26)
1.1009	1.1348(11)	1.1417(12)	1.1468(12)	1.1519(17)
1.2723	1.1372(20)	1.1441(21)	1.1491(22)	1.1541(30)
1.4093	1.1322(17)	1.1386(18)	1.1433(19)	1.1480(26)
1.6149	1.1195(16)	1.1251(16)	1.1293(17)	1.1334(23)
1.8548	1.0870(10)	1.0913(10)	1.0945(10)	1.0977(14)
2.1975	1.0768(8)	1.0805(8)	1.0832(8)	1.0860(12)
2.3689	1.0656(7)	1.0688(7)	1.0713(7)	1.0737(10)
2.6773	1.0694(7)	1.0726(7)	1.0750(7)	1.0773(10)
3.1571	1.0629(6)	1.0657(6)	1.0677(6)	1.0697(8)
3.6368	1.0572(5)	1.0596(5)	1.0613(5)	1.0631(7)
4.0138	1.0413(4)	1.0432(4)	1.0446(4)	1.0460(6)
4.0138	1.0313(3)	1.0329(3)	1.0341(3)	1.0353(4)
4.4250	1.0459(4)	1.0478(4)	1.0491(4)	1.0505(6)
4.8705	1.0495(4)	1.0513(4)	1.0526(4)	1.0539(6)
5.3846	1.0382(3)	1.0396(3)	1.0407(3)	1.0417(4)
5.8644	1.0347(3)	1.0360(3)	1.0369(3)	1.0379(4)
6.6183	1.0338(2)	1.0350(2)	1.0358(2)	1.0366(3)
7.3722	1.0329(2)	1.0339(2)	1.0347(2)	1.0354(3)
7.9205	1.0361(2)	1.0371(2)	1.0379(2)	1.0386(3)
8.1261	1.0321(2)	1.0330(2)	1.0336(2)	1.0343(3)
8.9486	1.0199(2)	1.0206(2)	1.0210(2)	1.0215(2)
9.3256	1.0097(1)	1.0102(1)	1.0105(1)	1.0109(2)

Tabelle A.18: Z im MOM-Schema (6.8) für $\mathcal{O}_{r2b}$ bei $\beta = 6.20$.

$\mu^2 a^2$	$Z_{v2a}(\kappa_1)$	$Z_{v2a}(\kappa_2)$	$Z_{v2a}(\kappa_3)$	$Z_{v2a}(\kappa_c)$
0.0728	1.5494(119)	1.6931(220)	1.8128(346)	1.9149(379)
0.1071	1.4847(151)	1.5771(207)	1.6397(240)	1.7075(304)
0.1414	1.4225(56)	1.5026(67)	1.5718(108)	1.6286(123)
0.1756	1.4162(59)	1.4990(77)	1.5637(101)	1.6243(124)
0.2099	1.3462(66)	1.3992(86)	1.4426(111)	1.4814(136)
0.2442	1.3408(52)	1.3934(67)	1.4322(97)	1.4707(114)
0.2442	1.3635(67)	1.4237(87)	1.4698(101)	1.5142(129)
0.2784	1.3496(96)	1.3876(119)	1.4108(197)	1.4395(220)
0.3127	1.3007(37)	1.3435(39)	1.3762(35)	1.4082(50)
0.3812	1.2596(36)	1.2906(39)	1.3143(35)	1.3374(50)
0.4498	1.2398(28)	1.2649(32)	1.2831(33)	1.3016(45)
0.5183	1.2130(21)	1.2344(25)	1.2507(29)	1.2665(38)
0.5869	1.1918(23)	1.2096(25)	1.2229(25)	1.2361(34)
0.6554	1.1728(25)	1.1878(27)	1.1988(30)	1.2099(40)
0.6554	1.1761(14)	1.1931(15)	1.2061(16)	1.2187(22)
0.7239	1.1688(14)	1.1827(15)	1.1932(15)	1.2034(21)
0.8268	1.1447(14)	1.1581(15)	1.1683(16)	1.1783(21)
0.9296	1.1321(13)	1.1425(14)	1.1502(15)	1.1579(20)
1.0324	1.1187(10)	1.1283(11)	1.1356(12)	1.1427(16)
1.1009	1.1254(8)	1.1340(8)	1.1403(8)	1.1466(11)
1.2723	1.1104(9)	1.1176(9)	1.1228(10)	1.1281(14)
1.4093	1.1162(5)	1.1226(4)	1.1273(4)	1.1320(6)
1.6149	1.0830(8)	1.0883(9)	1.0921(9)	1.0960(12)
1.8548	1.0661(5)	1.0706(5)	1.0740(5)	1.0774(7)
2.1975	1.0579(4)	1.0614(4)	1.0641(4)	1.0667(6)
2.3689	1.0503(3)	1.0535(3)	1.0560(3)	1.0583(5)
2.6773	1.0425(4)	1.0452(4)	1.0472(4)	1.0493(5)
3.1571	1.0505(3)	1.0528(3)	1.0544(3)	1.0561(4)
3.6368	1.0372(3)	1.0390(3)	1.0403(3)	1.0417(4)
4.0138	1.0277(2)	1.0292(2)	1.0302(2)	1.0313(2)
4.0138	1.0307(2)	1.0323(2)	1.0334(2)	1.0346(3)
4.4250	1.0326(2)	1.0340(2)	1.0350(2)	1.0360(3)
4.8705	1.0370(2)	1.0383(2)	1.0392(2)	1.0402(3)
5.3846	1.0295(1)	1.0306(1)	1.0313(1)	1.0321(2)
5.8644	1.0206(1)	1.0214(1)	1.0221(1)	1.0227(2)
6.6183	1.0220(1)	1.0227(1)	1.0233(1)	1.0238(2)
7.3722	1.0159(1)	1.0165(1)	1.0170(1)	1.0174(2)
7.9205	1.0195(1)	1.0201(1)	1.0205(1)	1.0209(2)
8.1261	1.0174(1)	1.0179(1)	1.0183(1)	1.0187(1)
8.9486	1.0109(1)	1.0113(1)	1.0116(1)	1.0119(1)
9.3256	1.0092(1)	1.0095(1)	1.0098(0)	1.0101(1)

Tabelle A.19: Z im MOM-Schema (6.8) für $\mathcal{O}_{v2a}$ bei $\beta = 6.20$.

$\mu^2 a^2$	$Z_{v2b}(\kappa_1)$	$Z_{v2b}(\kappa_2)$	$Z_{v2b}(\kappa_3)$	$Z_{v2b}(\kappa_c)$
0.0728	1.4844(269)	1.6195(430)	1.7384(676)	1.8334(749)
0.1071	1.4156(87)	1.5098(124)	1.5929(164)	1.6613(198)
0.1414	1.3962(154)	1.4816(168)	1.5519(120)	1.6177(179)
0.1756	1.3271(69)	1.3845(100)	1.4316(135)	1.4734(161)
0.2099	1.3355(103)	1.3960(151)	1.4418(232)	1.4859(262)
0.2442	1.2712(50)	1.3109(60)	1.3400(74)	1.3692(94)
0.2442	1.2809(48)	1.3230(57)	1.3546(71)	1.3856(90)
0.2784	1.2918(57)	1.3395(66)	1.3755(89)	1.4105(109)
0.3127	1.2307(20)	1.2605(15)	1.2819(11)	1.3040(17)
0.3812	1.2162(58)	1.2420(66)	1.2606(74)	1.2795(97)
0.4498	1.1823(46)	1.2013(55)	1.2152(66)	1.2292(85)
0.5183	1.1620(27)	1.1780(28)	1.1895(30)	1.2013(40)
0.5869	1.1659(47)	1.1833(52)	1.1966(55)	1.2096(75)
0.6554	1.1539(38)	1.1696(40)	1.1811(40)	1.1927(56)
0.6554	1.1391(31)	1.1518(33)	1.1611(35)	1.1705(47)
0.7239	1.1277(28)	1.1390(29)	1.1472(31)	1.1555(42)
0.8268	1.1072(19)	1.1160(19)	1.1224(19)	1.1289(27)
0.9296	1.1065(25)	1.1152(27)	1.1216(28)	1.1280(39)
1.0324	1.0882(18)	1.0950(18)	1.1000(19)	1.1050(26)
1.1009	1.0828(11)	1.0891(11)	1.0938(12)	1.0985(16)
1.2723	1.0862(21)	1.0927(22)	1.0975(23)	1.1023(31)
1.4093	1.0814(18)	1.0873(19)	1.0918(19)	1.0962(27)
1.6149	1.0722(16)	1.0773(17)	1.0812(18)	1.0850(24)
1.8548	1.0489(11)	1.0521(11)	1.0544(11)	1.0568(16)
2.1975	1.0422(9)	1.0447(10)	1.0466(10)	1.0485(14)
2.3689	1.0324(8)	1.0345(8)	1.0361(8)	1.0376(11)
2.6773	1.0373(8)	1.0394(8)	1.0410(9)	1.0425(12)
3.1571	1.0335(7)	1.0353(7)	1.0366(7)	1.0379(10)
3.6368	1.0304(6)	1.0319(7)	1.0331(7)	1.0342(9)
4.0138	1.0167(5)	1.0176(5)	1.0183(5)	1.0190(7)
4.0138	1.0019(3)	1.0025(3)	1.0030(3)	1.0035(4)
4.4250	1.0224(5)	1.0235(5)	1.0242(5)	1.0250(7)
4.8705	1.0268(5)	1.0279(5)	1.0287(5)	1.0295(7)
5.3846	1.0164(4)	1.0171(4)	1.0176(4)	1.0181(5)
5.8644	1.0154(4)	1.0160(4)	1.0165(4)	1.0169(5)
6.6183	1.0156(3)	1.0161(3)	1.0165(3)	1.0169(5)
7.3722	1.0158(3)	1.0162(3)	1.0166(3)	1.0169(4)
7.9205	1.0198(3)	1.0203(3)	1.0208(3)	1.0211(4)
8.1261	1.0159(3)	1.0164(3)	1.0167(3)	1.0170(4)
8.9486	1.0038(2)	1.0039(2)	1.0040(2)	1.0041(3)
9.3256	0.9929(2)	0.9928(2)	0.9928(2)	0.9928(2)

Tabelle A.20: Z im MOM-Schema (6.8) für $\mathcal{O}_{v2b}$ bei $\beta = 6.20$.

$\mu^2 a^2$	$Z_{r3}(\kappa_1)$	$Z_{r3}(\kappa_2)$	$Z_{r3}(\kappa_3)$	$Z_{r3}(\kappa_c)$
0.0728	3.3591(866)	3.7996(1481)	4.0661(2174)	4.3959(2469)
0.1071	2.7215(708)	2.9632(1110)	3.1400(1556)	3.3171(1815)
0.1414	2.5373(707)	2.7080(1004)	2.8304(1539)	2.9556(1748)
0.1756	2.2119(137)	2.3254(148)	2.4163(220)	2.4987(263)
0.2099	2.1122(378)	2.1992(439)	2.2598(564)	2.3237(706)
0.2442	1.9994(135)	2.0719(143)	2.1252(135)	2.1788(189)
0.2442	2.0246(143)	2.0973(155)	2.1489(143)	2.2023(200)
0.2784	2.1750(126)	2.2475(157)	2.2957(196)	2.3489(245)
0.3127	1.8800(92)	1.9326(101)	1.9718(104)	2.0108(141)
0.3812	1.9635(87)	2.0174(96)	2.0552(98)	2.0947(133)
0.4498	1.7529(57)	1.7870(61)	1.8106(64)	1.8356(87)
0.5183	1.7249(35)	1.7567(37)	1.7792(38)	1.8026(53)
0.5869	1.6936(51)	1.7207(56)	1.7404(59)	1.7603(80)
0.6554	1.6284(24)	1.6510(23)	1.6674(22)	1.6840(32)
0.6554	1.6255(13)	1.6484(13)	1.6651(13)	1.6820(18)
0.7239	1.6531(26)	1.6770(28)	1.6942(28)	1.7118(39)
0.8268	1.5437(20)	1.5607(22)	1.5731(24)	1.5856(32)
0.9296	1.5112(11)	1.5263(12)	1.5371(13)	1.5482(17)
1.0324	1.4839(10)	1.4973(11)	1.5070(12)	1.5168(16)
1.1009	1.5170(20)	1.5313(21)	1.5417(22)	1.5523(30)
1.2723	1.4604(5)	1.4717(5)	1.4801(6)	1.4884(8)
1.4093	1.5142(7)	1.5265(7)	1.5354(7)	1.5444(10)
1.6149	1.4032(6)	1.4115(6)	1.4175(6)	1.4236(8)
1.8548	1.3699(4)	1.3768(4)	1.3818(4)	1.3869(5)
2.1975	1.3458(3)	1.3515(3)	1.3558(3)	1.3600(5)
2.3689	1.3324(3)	1.3377(3)	1.3416(3)	1.3455(4)
2.6773	1.3169(4)	1.3214(4)	1.3247(4)	1.3280(5)
3.1571	1.3132(3)	1.3173(3)	1.3203(3)	1.3233(4)
3.6368	1.2891(3)	1.2924(3)	1.2948(3)	1.2972(5)
4.0138	1.2711(2)	1.2739(2)	1.2759(2)	1.2780(3)
4.0138	1.2873(2)	1.2905(3)	1.2929(3)	1.2952(4)
4.4250	1.2718(3)	1.2744(3)	1.2764(3)	1.2783(4)
4.8705	1.2714(3)	1.2738(3)	1.2756(3)	1.2774(4)
5.3846	1.2575(2)	1.2596(2)	1.2611(2)	1.2627(3)
5.8644	1.2438(3)	1.2455(3)	1.2468(3)	1.2480(4)
6.6183	1.2400(3)	1.2415(3)	1.2427(3)	1.2438(4)
7.3722	1.2305(3)	1.2318(3)	1.2327(3)	1.2336(4)
7.9205	1.2340(3)	1.2353(3)	1.2362(3)	1.2372(4)
8.1261	1.2277(2)	1.2289(2)	1.2297(2)	1.2306(3)
8.9486	1.2101(2)	1.2110(2)	1.2116(2)	1.2122(2)
9.3256	1.2028(1)	1.2035(1)	1.2041(1)	1.2047(1)

Tabelle A.21: Z im MOM-Schema (6.8) für $\mathcal{O}_{r3}$ bei $\beta = 6.20$.

$\mu^2 a^2$	$Z_{a2}(\kappa_1)$	$Z_{a2}(\kappa_2)$	$Z_{a2}(\kappa_3)$	$Z_{a2}(\kappa_c)$
0.0728	2.8759(1435)	3.1788(2349)	3.4416(3375)	3.6585(3883)
0.1071	2.5846(370)	2.7942(569)	2.9402(767)	3.0944(911)
0.1414	2.4095(199)	2.5581(238)	2.6555(297)	2.7645(374)
0.1756	2.2280(94)	2.3390(68)	2.4247(140)	2.5044(157)
0.2099	2.1496(138)	2.2442(172)	2.3055(223)	2.3751(276)
0.2442	2.1334(121)	2.2290(143)	2.2970(154)	2.3672(204)
0.2442	2.1771(128)	2.2796(150)	2.3507(169)	2.4259(221)
0.2784	2.0449(209)	2.1121(270)	2.1522(345)	2.2016(426)
0.3127	2.0024(83)	2.0730(88)	2.1217(85)	2.1733(118)
0.3812	1.8949(38)	1.9474(44)	1.9844(46)	2.0230(61)
0.4498	1.8287(48)	1.8719(52)	1.9016(53)	1.9332(72)
0.5183	1.7563(41)	1.7919(43)	1.8170(42)	1.8431(58)
0.5869	1.7024(33)	1.7326(37)	1.7540(41)	1.7762(54)
0.6554	1.6595(9)	1.6859(12)	1.7043(17)	1.7237(20)
0.6554	1.6475(22)	1.6732(26)	1.6917(29)	1.7106(38)
0.7239	1.6307(28)	1.6548(30)	1.6721(33)	1.6898(44)
0.8268	1.5932(17)	1.6140(18)	1.6287(20)	1.6439(26)
0.9296	1.5511(12)	1.5688(12)	1.5814(13)	1.5944(18)
1.0324	1.5222(10)	1.5379(11)	1.5491(12)	1.5606(16)
1.1009	1.5293(22)	1.5450(23)	1.5564(24)	1.5680(33)
1.2723	1.4834(5)	1.4963(6)	1.5057(6)	1.5152(8)
1.4093	1.4652(6)	1.4771(7)	1.4857(7)	1.4944(10)
1.6149	1.4165(7)	1.4260(7)	1.4330(7)	1.4400(10)
1.8548	1.3930(3)	1.4009(3)	1.4066(3)	1.4124(5)
2.1975	1.3577(3)	1.3640(3)	1.3685(3)	1.3731(4)
2.3689	1.3428(2)	1.3483(2)	1.3524(2)	1.3564(3)
2.6773	1.3268(3)	1.3317(3)	1.3353(3)	1.3390(5)
3.1571	1.3122(2)	1.3164(2)	1.3195(3)	1.3226(3)
3.6368	1.2894(3)	1.2928(3)	1.2953(3)	1.2978(4)
4.0138	1.2716(2)	1.2743(2)	1.2763(2)	1.2782(3)
4.0138	1.2792(3)	1.2823(3)	1.2846(3)	1.2869(4)
4.4250	1.2744(2)	1.2771(2)	1.2791(2)	1.2810(3)
4.8705	1.2653(2)	1.2678(2)	1.2696(2)	1.2714(3)
5.3846	1.2433(2)	1.2452(2)	1.2465(2)	1.2479(3)
5.8644	1.2380(2)	1.2396(2)	1.2408(2)	1.2420(3)
6.6183	1.2366(2)	1.2380(2)	1.2391(2)	1.2402(2)
7.3722	1.2263(2)	1.2275(2)	1.2284(2)	1.2293(3)
7.9205	1.2212(2)	1.2224(2)	1.2232(2)	1.2241(3)
8.1261	1.2169(2)	1.2179(2)	1.2187(2)	1.2195(3)
8.9486	1.2038(1)	1.2046(1)	1.2051(1)	1.2056(2)
9.3256	1.2003(1)	1.2010(1)	1.2014(1)	1.2019(1)

Tabelle A.22: Z im MOM-Schema (6.8) für $\mathcal{O}_{a2}$ bei $\beta = 6.20$.

$\mu^2 a^2$	$Z_{v3}(\kappa_1)$	$Z_{v3}(\kappa_2)$	$Z_{v3}(\kappa_3)$	$Z_{v3}(\kappa_c)$
0.0728	2.8076(434)	3.2252(821)	3.5917(1448)	3.8789(1497)
0.1071	2.4764(585)	2.7348(937)	2.9284(1328)	3.1170(1540)
0.1414	2.3412(395)	2.5200(522)	2.6458(614)	2.7771(779)
0.1756	2.1180(137)	2.2481(143)	2.3499(157)	2.4467(211)
0.2099	2.0480(255)	2.1535(298)	2.2354(381)	2.3129(478)
0.2442	1.9466(114)	2.0293(112)	2.0914(99)	2.1530(144)
0.2442	1.9627(135)	2.0470(145)	2.1083(133)	2.1706(187)
0.2784	2.0448(103)	2.1270(133)	2.1879(189)	2.2480(224)
0.3127	1.8382(99)	1.8977(108)	1.9402(111)	1.9840(151)
0.3812	1.8795(72)	1.9422(82)	1.9880(84)	2.0342(114)
0.4498	1.7147(53)	1.7528(57)	1.7789(61)	1.8068(82)
0.5183	1.6861(41)	1.7209(42)	1.7449(43)	1.7704(59)
0.5869	1.6576(48)	1.6873(56)	1.7088(64)	1.7306(83)
0.6554	1.5997(18)	1.6235(18)	1.6403(19)	1.6578(26)
0.6554	1.5960(12)	1.6209(12)	1.6389(13)	1.6573(17)
0.7239	1.6157(27)	1.6417(29)	1.6607(30)	1.6799(41)
0.8268	1.5208(22)	1.5383(24)	1.5507(26)	1.5636(35)
0.9296	1.4928(11)	1.5077(11)	1.5182(12)	1.5291(17)
1.0324	1.4661(10)	1.4790(11)	1.4882(12)	1.4977(16)
1.1009	1.4879(20)	1.5034(21)	1.5148(22)	1.5262(31)
1.2723	1.4428(3)	1.4537(4)	1.4616(4)	1.4696(6)
1.4093	1.4881(6)	1.5009(6)	1.5104(7)	1.5198(9)
1.6149	1.3875(6)	1.3951(6)	1.4006(7)	1.4061(9)
1.8548	1.3556(4)	1.3618(4)	1.3663(3)	1.3709(5)
2.1975	1.3337(3)	1.3387(3)	1.3423(3)	1.3460(4)
2.3689	1.3208(3)	1.3253(3)	1.3286(3)	1.3319(4)
2.6773	1.3049(4)	1.3088(4)	1.3116(4)	1.3145(5)
3.1571	1.3039(2)	1.3074(2)	1.3100(2)	1.3126(3)
3.6368	1.2796(4)	1.2822(3)	1.2841(4)	1.2860(5)
4.0138	1.2626(3)	1.2648(3)	1.2664(3)	1.2680(4)
4.0138	1.2795(2)	1.2824(2)	1.2846(2)	1.2867(3)
4.4250	1.2636(3)	1.2656(3)	1.2672(3)	1.2687(4)
4.8705	1.2638(3)	1.2658(3)	1.2673(3)	1.2688(5)
5.3846	1.2502(2)	1.2519(2)	1.2531(2)	1.2543(3)
5.8644	1.2366(3)	1.2380(3)	1.2389(3)	1.2399(4)
6.6183	1.2333(3)	1.2345(3)	1.2353(3)	1.2362(4)
7.3722	1.2236(3)	1.2246(3)	1.2253(3)	1.2260(4)
7.9205	1.2273(3)	1.2282(3)	1.2289(3)	1.2296(5)
8.1261	1.2214(3)	1.2222(3)	1.2229(3)	1.2235(4)
8.9486	1.2049(2)	1.2055(2)	1.2059(2)	1.2064(3)
9.3256	1.1982(1)	1.1987(1)	1.1991(1)	1.1995(1)

Tabelle A.23: Z im MOM-Schema (6.8) für $\mathcal{O}_{v3}$ bei $\beta = 6.20$.

$\mu^2 a^2$	$Z_{v4}(\kappa_1)$	$Z_{v4}(\kappa_2)$	$Z_{v4}(\kappa_3)$	$Z_{v4}(\kappa_c)$
0.0728	5.0789(4269)	6.3813(6573)	8.2069(7995)	9.1627(9853)
0.1071	3.9481(1136)	4.4851(1677)	4.9527(2457)	5.3365(2832)
0.1414	–	–	–	–
0.1756	3.1563(118)	3.3964(110)	3.5995(407)	3.7530(285)
0.2099	2.9706(282)	3.1336(319)	3.2394(420)	3.3593(523)
0.2442	2.7810(262)	2.9010(300)	2.9768(546)	3.0673(588)
0.2442	2.9459(314)	3.0876(357)	3.1752(396)	3.2781(523)
0.2784	2.8941(244)	3.0316(374)	3.1207(540)	3.2227(624)
0.3127	2.7630(298)	2.8734(347)	2.9429(429)	3.0238(544)
0.3812	2.6745(250)	2.7708(276)	2.8412(311)	2.9121(411)
0.4498	2.5070(110)	2.5828(122)	2.6372(130)	2.6930(174)
0.5183	2.3475(56)	2.4003(66)	2.4364(90)	2.4752(110)
0.5869	2.4080(416)	2.4579(408)	2.4918(407)	2.5282(570)
0.6554	2.2301(44)	2.2742(51)	2.3057(59)	2.3381(77)
0.6554	2.2246(26)	2.2672(28)	2.2976(26)	2.3290(37)
0.7239	2.1680(45)	2.2049(50)	2.2309(56)	2.2579(74)
0.8268	2.1014(58)	2.1304(63)	2.1510(68)	2.1723(91)
0.9296	2.0251(35)	2.0493(36)	2.0667(37)	2.0845(51)
1.0324	1.9775(65)	1.9983(68)	2.0129(73)	2.0281(99)
1.1009	1.9769(35)	1.9987(35)	2.0145(37)	2.0305(51)
1.2723	1.9088(20)	1.9255(21)	1.9375(22)	1.9498(30)
1.4093	1.8971(15)	1.9147(16)	1.9274(17)	1.9404(23)
1.6149	1.8297(25)	1.8411(25)	1.8494(26)	1.8578(36)
1.8548	1.7743(23)	1.7843(24)	1.7916(24)	1.7990(33)
2.1975	1.7267(29)	1.7342(29)	1.7396(30)	1.7451(41)
2.3689	1.7185(100)	1.7252(102)	1.7299(104)	1.7349(143)
2.6773	1.6691(23)	1.6750(23)	1.6793(23)	1.6836(32)
3.1571	1.6312(11)	1.6358(11)	1.6391(11)	1.6425(15)
3.6368	1.6090(15)	1.6125(15)	1.6150(15)	1.6176(20)
4.0138	1.5767(49)	1.5794(49)	1.5814(49)	1.5834(69)
4.0138	1.5942(7)	1.5973(7)	1.5995(8)	1.6017(11)
4.4250	1.5465(17)	1.5488(17)	1.5505(17)	1.5522(24)
4.8705	1.5454(8)	1.5475(8)	1.5490(8)	1.5506(12)
5.3846	1.4627(11)	1.4640(11)	1.4649(11)	1.4658(15)
5.8644	1.4994(23)	1.5005(23)	1.5014(23)	1.5022(32)
6.6183	1.4478(17)	1.4483(17)	1.4488(17)	1.4492(23)
7.3722	1.4376(16)	1.4379(16)	1.4381(16)	1.4383(23)
7.9205	1.4619(10)	1.4623(10)	1.4626(10)	1.4629(14)
8.1261	1.4369(15)	1.4370(15)	1.4372(15)	1.4373(21)
8.9486	1.2999(72)	1.2989(72)	1.2982(72)	1.2975(101)
9.3256	1.2285(31)	1.2272(31)	1.2263(31)	1.2254(44)

Tabelle A.24: Z im MOM-Schema (6.8) für $\mathcal{O}_{v4}$ bei $\beta = 6.20$.

Literaturverzeichnis

[1] J. Collins, Renormalization (Cambridge University Press, Cambridge (UK), 1984).

[2] T. Reisz, Commun. Math. Phys. 116 (1988) 81, 573; *ibid.* 117 (1988) 79, 639; Nucl. Phys. B318 (1989) 417.

[3] J. C. Collins and R. J. Scalise, Phys. Rev. D50 (1994) 4117; R. Hamberg and W. L. van Neerven, Nucl. Phys. B379 (1992) 143.

[4] M. Lüscher, 18th International Symposium on Lepton-Photon Interactions, Hamburg, 28 July - 1 August 1997 (hep-ph/9711205).

[5] M. Lüscher, Les Houches Summer School: Probing the Standard Model of Particle Interactions, 28 July - 5 September 1997 (hep-lat/9802029).

[6] M. Göckeler, R. Horsley, H. Oelrich, H. Perlt, D. Petters P. E. L. Rakow, A. Schäfer, G. Schierholz and A. Schiller, Nucl. Phys. B544 (1999) 699.

[7] F. J. Yndurain, The Theory of Quark and Gluon Interactions (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1992).

[8] K. G. Wilson, Phys. Rev. D10 (1974) 2445; Phys. Rev. B4 (1971) 3174 und 3184.

[9] J. Kogut und L. Susskind, Phys. Rev. D11 (1975) 395.

[10] L. H. Karsten und J. Smit, Nucl. Phys. B183 (1981) 103.

[11] A. V. Manohar, Lectures presented at Lake Louise Winter Institute 1992 (hep-ph/9204208); R. L. Jaffe, Lectures presented at Erice 1995 (hep-ph/9602236).

[12] P. Becher, M. Böhm, H. J. Joos, Eichtheorien der starken und elektroschwachen Wechselwirkung, B. G. Teubner Stuttgart 1981.

[13] L. D. Landau, E. M. Lifschitz, Lehrbuch der Theoretischen Physik, Bd. IV, Quantenelektrodynamik, Akademie-Verlag Berlin 1989.

[14] M. Göckeler, R. Horsley, E.-M. Ilgenfritz, H. Perlt, P. Rakow, G. Schierholz and A. Schiller, Phys. Rev. D54 (1996) 5705.

[15] M. Göckeler, R. Horsley, E.-M. Ilgenfritz, H. Perlt, P. Rakow, G. Schierholz and A. Schiller, Nucl. Phys. B472 (1996) 309.

[16] M. Göckeler, R. Horsley, E.-M. Ilgenfritz, H. Perlt, P. Rakow, G. Schierholz and A. Schiller, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 42 (1995) 337.

[17] I. Montvay and G. Münster, Quantum Fields on a Lattice (Cambridge University Press, Cambridge (UK), 1994).

[18] M. Creutz, Phys. Rev. D36 (1996) 516.

[19] J.E. Mandula and M. Ogilvie, Phys. Lett. B185 (1987) 127.

[20] M.L. Paciello, C. Parrinello, S. Petrarca, B. Taglienti and A. Vladikas, Phys. Lett. B276 (1992) 163.

[21] M.L. Paciello, S. Petrarca, B. Taglienti and A. Vladikas, Phys. Lett. B341 (1994) 187.

[22] M. Göckeler, R. Horsley, H. Oelrich, H. Perlt, P. Rakow, G. Schierholz and A. Schiller, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 63 (1998) 868.

[23] Andrzej J. Buras, Rev. of Mod. Phys. D52 (1980) 199.

[24] E. Franco and V. Lubicz, Nucl. Phys. B531 (1998) 641.

[25] E.G. Floratos, D.A. Ross and C.T. Sachrajda, Nucl. Phys. B129 (1977) 66; *ibid.* 139 (1978) 545 (E).

[26] D.V. Nanopoulos and D.A. Ross, Nucl. Phys. B157 (1979) 273; R. Tarrach, Nucl. Phys. B183 (1981) 384.

[27] T. van Ritbergen, J.A.M. Vermaseren and S.A. Larin, Phys. Lett. B400 (1997) 379.

[28] J.A.M. Vermaseren, S.A. Larin and T. van Ritbergen, Phys. Lett. B405 (1997) 327.

[29] K.G. Chetyrkin, Phys. Lett. B404 (1997) 161.

[30] S.A. Larin, T. van Ritbergen, J.A.M. Vermaseren, Nucl. Phys. B427 (1994) 41

[31] Y. Matiounine, J. Smith and W.L. van Neerven, Phys. Rev. D57 (1998) 6701; Phys. Rev. D58 (1998) 076002.

[32] G. Martinelli, C. Pittori, C.T. Sachrajda, M. Testa and A. Vladikas, Nucl. Phys. B445 (1995) 81.

[33] M. Göckeler, R. Horsley, H. Perlt, P. Rakow, G. Schierholz, P. Stephenson, Phys. Rev. D57 (1998) 5562.

[34] V. Giménez, L. Giusti, F. Rapuano and M. Talevi, Nucl. Phys. B531 (1998) 429.

[35] C.T. Sachrajda, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 9 (1989) 121.

[36] L. Maiani and G. Martinelli, Phys. Lett. B178 (1986) 265.

[37] S. Aoki, M. Fukugita, S. Hashimoto, N. Ishizuka, Y. Iwasaki, K. Kanaya, Y. Kuramashi, H. Mino, M. Okawa, A. Ukawa and T. Yoshié, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 53 (1997) 209.

[38] S. Capitani, M. Göckeler, R. Horsley, B. Klaus, H. Oelrich, H. Perlt, D. Petters, D. Pleiter, P. Rakow, G. Schierholz, A. Schiller and P. Stephenson, *in* Proceedings of the 31st International Symposium, Ahrenshoop, September 2-6 1997, Buckow, Germany, eds. H. Dorn, D. Lüst, G. Weigt (Wiley-VCH, 1998) p. 277 (hep-lat/9801034).

[39] M. Bochicchio, L. Maiani, G.Martinelli, G. Rossi and M. Testa, Nucl. Phys. B262 (1985) 331.

[40] M. Göckeler, R. Horsley, E.-M. Ilgenfritz, H. Oelrich, H. Perlt, P. Rakow, G. Schierholz and A. Schiller, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 47 (1996) 493.

[41] G.P. Lepage and P.B. Mackenzie, Phys. Rev. D48 (1993) 2250.

[42] S. Capitani, M. Guagnelli, M. Lüscher, S. Sint, R. Sommer, P.Weisz, H. Wittig, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 63 (1998) 153.

[43] H. Pagels, Phys. Rev. D19 (1979) 3080.

[44] B. Alles and E. Vicari, Phys. Lett. B268 (1991) 241.

[45] M. Göckeler, R. Horsley, E.-M. Ilgenfritz, H. Perlt, P. Rakow, G. Schierholz and A. Schiller, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 53 (1997) 81.

[46] A. D. Martin, W. J. Stirling, R. G. Roberts, Phys. Rev. D47 (1993) 867.

[47] B. Sheikholeslami and R. Wohlert, Nucl. Phys. B259 (1985) 572.

[48] S. Capitani, M. Göckeler, R. Horsley, H. Oelrich, H. Perlt, D. Pleiter P. E. L. Rakow, G. Schierholz and A. Schiller and P. W. Stephenson, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 63 (1998) 871; C. Dawson, G. Martinelli, G.C. Rossi, C.T. Sachrajda, S. Sharpe, M. Talevi, M. Testa, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 63 (1998) 877.

Lebenslauf

Zur Person

Name:	Harald Oelrich
Adresse:	Schillerpromenade 10, 12049 Berlin
Geburtstag:	16.02.1968
Geburtsort:	24837 Schleswig
Eltern:	Dipl.-Ingenieur Wolfgang Oelrich, Waltraud Oelrich, geb. Korschewski

Schulausbildung

1974 – 1978	Grundschule Dannewerkschule
1978 – 1987	Gymnasium Domschule Schleswig

Studium

1987 – 1994	Grund- und Hauptstudium der Physik (Diplom) an der Christian-Albrechts-Universität (CAU) zu Kiel
1992	Sommerstudentenpraktikum am Deutschen Elektronen Synchrotron (DESY)
1992 – 1994	Diplomarbeit am Institut für Reine und Angewandte Kernphysik und Mathematische Physik der CAU Kiel bei Prof. Dr. K. O. Thielheim. Thema: Quantenelektrodynamische Herleitung einer klassischen Bewegungsgleichung für ein Elektron in einem äußeren elektromagnetischen Feld

Wissenschaftliche Tätigkeit

1994 – 1998	Wissenschaftlicher Mitarbeiter zur Promotion bei DESY bei Prof. G. Schierholz, Arbeit am Höchstleistungsrechenzentrum (HLRZ) der Forschungsanlage Jülich und am DESY Institut für Hochenergiephysik Zeuthen (DESY-IfH Zeuthen)
seit 1998	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Klinische Psychologie der Humboldt-Universität und der Charite zu Berlin bei Frau Prof. Dr. H. Flor Thema: Erforschung und Therapie von Tinnitus und Untersuchung des menschlichen Gehirns mittels Elektroenzephalographie (EEG), Magnetoenzephalographie (MEG) und funktioneller Magnetresonanztomographie (fMRI).