Kapitel 2

Grundlagen

2.1 Phasendiagramm eines Supraleiters

Ginsburg und Landau entwickelten eine phänomenologische Theorie des thermodynamischen Zustandes eines Supraleiters unterhalb der Molekularfeld-Temperatur T_{c0}. Dabei berücksichtigten sie insbesondere die Wechselwirkung des Supraleiters mit einem externen elektromagnetischen Feld. Aufbauend auf der Landau'schen Theorie der Phasenübergänge zweiter Ordnung untersuchten diese den Phasenübergang in den supraleitenden Zustand. Die Entwicklung der freien Energiedichte f eines isotropen Supraleiters in einem externen Magnetfeld $B = \mu_0 H$ lautet [12]

$$f = f_n - a(T)|\psi|^2 + \frac{b}{2}\,|\psi|^4 + \frac{1}{2m}\,|(-i\hbar\vec{\nabla} + 2e\vec{A})\psi|^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2\,, \tag{2.1}$$

wobei $2m$ die effektive Masse eines Cooper-Paars ist, welches durch die Paarung zweier Elektronen entsteht. Die freie Energiedichte des normalleitenden Zustandes wird durch f_n berücksichtigt. Der komplexe Ordnungsparameter $\psi = |\psi|e^{i\phi}$ besitzt ausschließlich unterhalb von T_{c0} einen endlichen Wert und verschwindet bei T_{c0}. Der Ordnungsparameter ist ein Maß für die superfluide Dichte $n_s = 2|\psi|^2$, d.i. die Dichte der supraleitenden Elektronen. Deshalb wird ψ auch als Kondensatwellenfunktion der supraleitenden Phase bezeichnet.

Durch Variation von Gl. (2.1) nach ψ erhält man die Ginsburg-Landau-Gleichung [12]

$$\left[\frac{1}{2m}(-i\hbar\vec{\nabla} + 2e\vec{A})^2 - a + b|\psi|^2\right]\psi = 0\,,$$

welche zwei Längen definiert: Die Kohärenzlänge ξ der Variation des Ordnungsparameters

$$\xi(T) = \frac{\hbar}{\sqrt{2ma(T)}}\,.$$

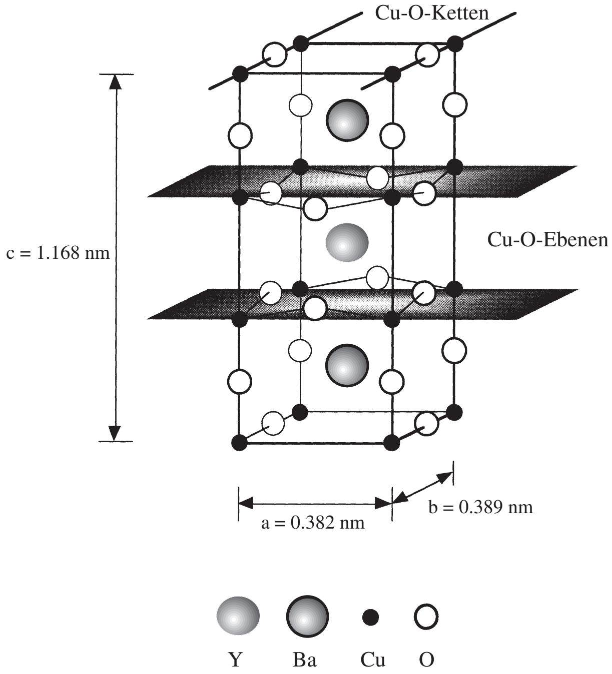

Abb. 2.1: *Einheitszelle von $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ nach Ref. [13].*

Diese beschreibt den räumlichen Abstand der beiden Elektronen eines Cooper-Paares. Die zweite Länge ist die Eindringtiefe λ der Variation des Magnetfeldes im Supraleiter

$$\lambda(T) = \sqrt{\frac{mb}{e^2\mu_0 a(T)}}.$$

Das Verhältnis beider Längen definiert den Ginsburg-Landau-Parameter

$$\kappa = \frac{\lambda}{\xi} = \frac{m}{\hbar e}\sqrt{\frac{2b}{\mu_0}}.$$

Ist $\kappa < 1/\sqrt{2}$, so ist der Aufbau normalleitender-supraleitender Grenzschichten energetisch ungünstig. Der Supraleiter verdrängt ein äußeres Magnetfeld bis zu dem Wert des thermodynamischen kritischen Feldes B_c. Magnetfelder größer als B_c können in den Supraleiter eindringen und zerstören die Supraleitung vollständig. In diesem Fall liegt ein Supraleiter erster Art vor. Ist $\kappa > 1/\sqrt{2}$, so liegt ein Supraleiter zweiter Art vor. Das Verhalten von Supraleitern zweiter Art in einem Magnetfeld wird im folgenden im Detail vorgestellt.

Der Hochtemperatursupraleiter $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ mit $0 < \delta < 0.05$, im weiteren YBCO genannt, besitzt eine orthorombische Kristallstruktur. Die Einheitszelle von YBCO ist in Abb. 2.1 abgebildet. Die Differenz der a- und b-Achsen ist sehr gering, $b - a \approx 0.007$ nm. Die Einheitszelle ist entlang der c-Achse gestreckt, $c \approx 3 \cdot a$. Die kristallographische

Tab. 2.1: *Materialparameter für* $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$.

a (nm)	b (nm)	c (nm)	λ_L (nm)	ξ_0 (nm)	κ	$B_{c1}(0)$	$B_{c2}(0)$	γ
0.382	0.389	1.168	140	1.3	100	80 mT	200 T	5 – 7

Anisotropie spiegelt sich auch in den elektrischen und magnetischen Eigenschaften von YBCO wider. Die Anisotropie wird ausgedrückt durch den Parameter

$$\gamma = \sqrt{\frac{m_c}{m_{ab}}} = \frac{\lambda_c}{\lambda_{ab}} = \frac{\xi_{ab}}{\xi_c} > 1\,.$$

Dieser beschreibt z.B. das Verhältnis der Eindringtiefe entlang der c-Achse zu der Eindringtiefe parallel zu den CuO_2-Ebenen, d.h senkrecht zur c-Achse. Für YBCO ist $\gamma \simeq 6.0$ [14]. Dies bedeutet z.B., daß die Korrelationslänge ξ über die CuO_2-Ebenen nur 1/6 der Korrelationslänge in den CuO_2-Ebenen beträgt. Grundlegende Parameter von YBCO sind in der Tab. 2.1 zusammengefaßt.

Für YBCO hat der Ginsburg-Landau-Parameter den Wert $\kappa \approx 100$. YBCO ist folglich ein extremer Supraleiter zweiter Art. Die Eindringtiefe von YBCO ist viel größer als die Kohärenzlänge, $\lambda(T) \approx 100 \cdot \xi(T)$. Die London'sche Eindringtiefe ist $\lambda_L = \sqrt{m/\mu_0 n_s e^2} \approx 1.41 \cdot \lambda_0 \approx 140$ nm, mit $\lambda_0 = \lambda(T=0)$. Die Kohärenzlänge beträgt $\xi_0 = \xi(T=0) \approx 1.3$ nm [5]. Das Magnetfeld-Temperatur-Phasendiagramm eines Supraleiters zweiter Art zeigt drei thermodynamische Phasen, die in Abb. 2.2 wiedergegeben sind:

- $B < B_{c1}(T)$: Meißner-Phase – das äußere Magnetfeld wird vollständig verdrängt.
- $B_{c1}(T) < B < B_{c2}(T)$: Vortexzustand – Vortizes mit dem Flußquant $\Phi_0 = h/2e \approx 2.07 \cdot 10^{-15}$ Tm^2 dringen in den Supraleiter ein. Diese bilden ein Dreiecksgitter mit der Seitenlänge $(2/\sqrt{3})^{1/2}(\Phi_0/B)^{1/2}$, das Abrikosov-Gitter [15].
- $B > B_{c2}(T)$: Normalleitender Zustand – das Magnetfeld durchdringt homogen den Supraleiter.

Das untere kritische Feld von YBCO ist sehr klein, $B_{c1}(0) = \Phi_0 \ln\kappa/(4\pi\lambda_0^2) \approx 80$ mT, während das obere kritische Feld einen extrem großen Wert, $B_{c2}(0) = \Phi_0/(2\pi\xi_0^2) \approx 200$ T, annimmt. Dies bedeutet, daß der Vortexzustand einen sehr großen Bereich des Phasendiagramms von YBCO umfaßt.

In der Beschreibung des thermodynamischen Phasendiagramms wurde der Effekt thermischer Fluktuationen des Ordnungsparameters bisher nicht berücksichtigt. Ein Maß für thermische Fluktuationen ist die Ginsburgzahl Gi. Diese gibt den Wert der reduzierten Temperatur T^* an, $\mathrm{Gi} = 1 - T^*/T_c$, bei welcher die Fluktuationen des

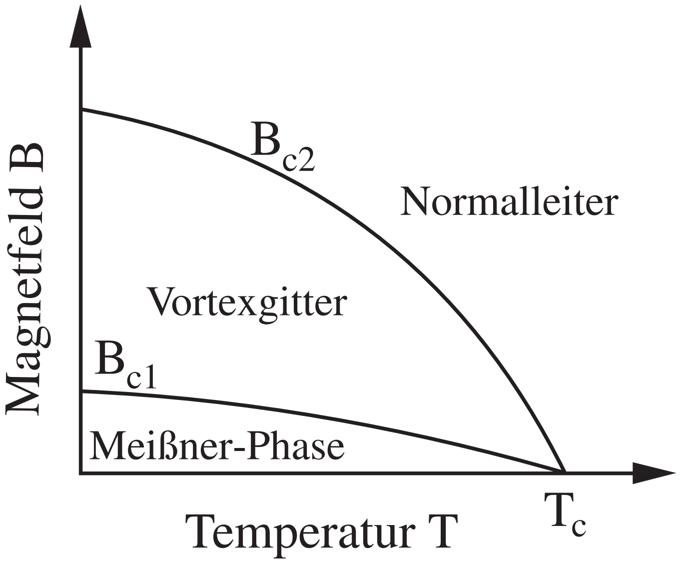

Abb. 2.2: *Phasendiagramm eines herkömmlichen Tieftemperatur-Supraleiters zweiter Art.*

Ordnungsparameters $|\delta\psi|$ gleich seinem Betrag $|\psi|$ sind. Der Wert der Ginsburgzahl ist gegeben durch [5, 16]

$$\mathrm{Gi} = \frac{1}{2}\left[\frac{k_B T_c \gamma \mu_0}{4\pi\xi_0^3 B_c^2(0)}\right]^2 \approx 10^{-13} \cdot \gamma^2 \kappa^3 T_c^2(\mathrm{K})$$

mit dem thermodynamischen kritischen Feld $B_c = B_{c2}/(\sqrt{2}\kappa)$. In Tieftemperatursupraleitern ist Gi sehr klein, ungefähr von der Größenordnung 10^{-7}. Dies bedeutet, daß der Bereich, in dem Fluktuationen entscheidend sind, meist ununterscheidbar nahe bei T_c liegt. Deshalb können Fluktuationen des Ordnungsparameters für Tieftemperatursupraleiter praktisch immer vernachlässigt werden. Dies gilt nicht mehr für die Hochtemperatursupraleiter. Auf Grund des großen Wertes des Ginsburg-Landau-Parameters $\kappa \approx 100$, der hohen kritischen Temperatur $T_c \approx 90$ K und nicht zuletzt auf Grund der Anisotropie $\gamma \simeq 6$, nimmt die Ginsburgzahl in YBCO Größenordnungen höhere Werte an, Gi $\approx 10^{-2}$ [5]. Diese starken thermischen Fluktuationen haben sowohl im magnetischen Nullfeld wie in hohen Magnetfeldern große Bedeutung.

2.2 Phasenübergang im Nullfeld

Bei Abwesenheit eines externen Magnetfeldes erfolgt der Phasenübergang von der normalleitenden Phase in die Meißner-Phase. Die Meißner-Phase zeichnet sich dadurch aus, daß keine Verluste existieren, die proportional zur Stromdichte j sind, $\rho(j \to 0) \to 0$. Innerhalb der Molekularfeld-Näherung existieren keine Verluste bis zur kritischen Stromdichte j_c, bei der das System normalleitend wird. Thermische Fluktuationen verändern dieses Bild auf Grund von Verlusten durch schrittweises Wachstum von Vortexringen. Die freie Energie F eines Vortexrings mit Radius R ist gegeben durch [17]

$$F \approx 2\pi R\varepsilon_0 - j\Phi_0\pi R^2 ,$$

mit der Linienspannung des Vortex $\varepsilon_0 = \Phi_0^2/(4\pi\mu_0\lambda^2)$. Der kritische Vortexradius, bei dem F ein Maximum hat, beträgt $R_c \approx \varepsilon_0/J\Phi_0$ mit der resultierenden Energiebarriere $\pi\varepsilon_0^2/j\Phi_0$. Der durch Vortexringe induzierte Widerstand ist [17]

$$\rho = \frac{E}{j} \sim e^{-j_T/j} ,$$

mit der Stromskala auf Grund thermischer Fluktuationen $j_T = \pi\varepsilon_0^2/\Phi_0 T$. Die Fluktuationen des Ordnungsparameters in der unmittelbaren Nähe des Phasenübergangs in die Meißner-Phase sind im wesentlichen die des XY-Modells. In diesem Regime gilt für die Kohärenzlänge

$$\xi(T) = \xi(0)\left|1 - \frac{T}{T_c}\right|^{-\nu_0} , \tag{2.2}$$

mit dem kritischen Exponenten des Nullfeldes in $D = 3$ Dimensionen [17], $\nu_0 \approx 2/3$. Nahe T_c gilt für die Eindringtiefe im XY-Modell

$$\lambda(T) = \lambda(0)\left|1 - \frac{T}{T_c}\right|^{-\nu_0/2} . \tag{2.3}$$

Die Temperaturabhängigkeit ist verschieden zu der in dem Molekularfeld-Regime, weiter entfernt von T_c, in welchem

$$\xi(T) = \xi(0)\left|1 - \frac{T}{T_c}\right|^{-1/2} ,$$

und

$$\lambda(T) = \lambda(0)\left|1 - \frac{T}{T_c}\right|^{-1/2}$$

gilt. Der Übergang zwischen den Regimes wird für YBCO erwartet für $10^{-2} \leq |1 - T/T_c| \leq 10^{-1}$ [17].

2.3 Schmelzen des Vortexgitters

In einem endlichen Magnetfeld ist der Supraleiter zwischen $B_{c1}(T)$ und $B_{c2}(T)$ im Vortexzustand. Thermische Fluktuationen können bei hohen Temperaturen so groß werden, daß das Vortexgitter deutlich unterhalb des oberen kritischen Feldes $B_{c2}(T)$ schmilzt. Nach dem Lindemannkriterium setzt das Schmelzen eines festen Körpers dann ein, wenn die mittlere quadratische Auslenkung $\langle u^2 \rangle$ der Elemente des Festkörpers einen bestimmten Bruchteil der Gitterkonstanten erreicht. Für einen Supraleiter ist das Abrikosov-Gitter der Festkörper und die Vortizes sind dessen Bausteine. Das Lindemannkriterium lautet in diesem Fall

$$\sqrt{\langle u^2(T_m) \rangle} = c_L \cdot a_0 \,, \tag{2.4}$$

wobei $a_0 = \sqrt{\Phi_0/B}$ die Gitterkonstante des Abrikosov-Gitters und $c_L \approx 0.1 - 0.2$ die Lindemannzahl ist [18]. Aus dem Lindemannkriterium kann die thermodynamische Schmelzlinie des Vortexgitters bestimmt werden [5]:

$$B_m(T) \approx 5 c_L^4 \frac{B_{c2}(0)}{\mathrm{Gi}} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^2 \approx 50 \text{ T} \cdot \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^2 .$$

Diese Linie trennt die flüssige Phase des Vortexliquids oberhalb T_m von der festen Phase des Vortexgitters bei tiefen Temperaturen. Liegt $B_m(T)$ nahe bei $B_{c2}(T)$, so werden Abweichungen von diesem Ergebnis auf Grund der Reduktion des lokalen Ordnungsparameters durch den Überlapp der Vortexkerne erwartet. In diesem Bereich sollte das $3D$-XY-Modell gültig und $B_m \sim \xi^{-2}$ sein [17], woraus die modifizierte Schmelzlinie

$$B_m(T) \sim \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{2\nu_0} \tag{2.5}$$

mit $\nu_0 \approx 2/3$ folgt.

Analog zu dem Schmelzen gewöhnlicher Festkörper erwartet man hier einen Phasenübergang erster Ordnung. Simulationsrechnungen bestätigen diese Annahme und zeigen einen diskontinuierlichen Übergang in die Vortexflüssigkeit [19]. In der flüssigen Vortexphase liegt keine echte Supraleitung vor, obwohl ein endlicher Ordnungsparameter und eine endliche superfluide Dichte n_s existiert. Ursache sind die normalleitenden Kerne der sich bewegenden Vortizes, die einen Ohm'schen Widerstand induzieren. Auch das feste Vortexgitter hat unter der Wirkung eines Transportstroms einen endlichen linearen Widerstand $\rho(j \to 0) > 0$ auf Grund der Bewegung des Gitters durch die Wirkung der Lorentzkraft.

An sehr reinen und unverzwillingten YBCO Kristallen wird in Messungen des statischen Widerstandes $\rho(T, B)$ in Magnetfeldern $\vec{B} \parallel \vec{c}$ die quasi-universelle Schmelzlinie

$$\hat{B}_m(T) \approx 100\text{T} \cdot \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{1.33} \tag{2.6}$$

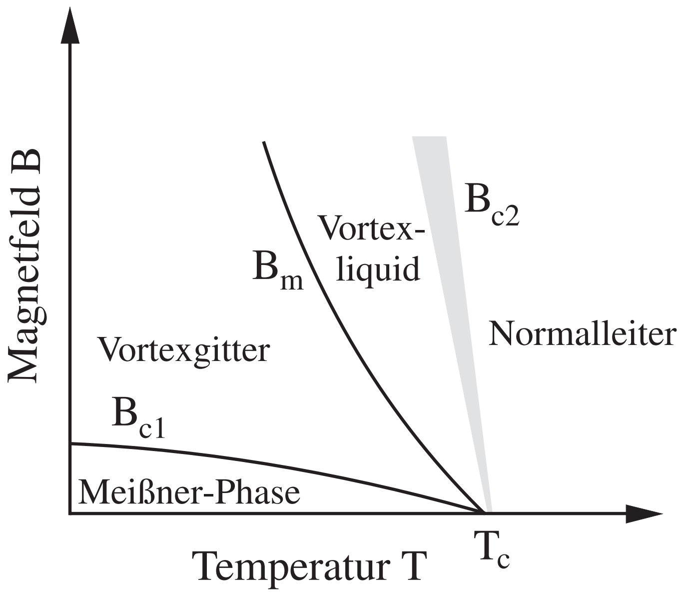

Abb. 2.3: *Phasendiagramm von sehr reinem YBCO mit der Schmelzlinie* $B_m(T)$.

gefunden. Bei T_m fällt der Widerstand innerhalb eines sehr schmalen Temperaturbereichs von 10 mK stark ab [4, 6]. Für Magnetfelder entlang der CuO_2-Ebenen, d.h. $\vec{B} \perp \vec{c}$, ist die Schmelzlinie um den Wert der Anistropie $\gamma \simeq 6$ erhöht. Diese Erhöhung befindet sich in Übereinstimmung mit den Skalierungsregeln für $T_m(\vec{B})$ in anisotropen Supraleitern [4, 6]. Der Sprung des Widerstandes wird begleitet von einer Hysterese bei schrittweiser Reduktion der Temperatur bzw. des Magnetfeldes und anschließender Erhöhung. Diese Hysterese erweist sich dabei sowohl unter Variation des Feldes wie der Temperatur als sehr schmal (± 10 mT bzw. ± 10 mK) [20].

Ein weiterer Hinweis auf den Schmelzübergang wird in hochpräzisen Messungen der Magnetisierung gefunden. So zeigt sich, daß die Magnetisierung hochreiner unverzwillingter Kristalle einen Sprung um $\Delta M > 0$ genau bei den aus Widerstandsmessungen ermittelten Schmelztemperaturen $T_m(B)$ macht [21]. Es zeigt sich, daß die Vortexdichte der flüssigen Phase größer ist als die des Vortexgitters. Bei hohen Magnetfeldern ist die flüssige Vortexphase thermodynamisch günstiger als das feste Vortexgitter. Diese Beobachtung ist in Übereinstimmung mit der in Abb. 2.3 gezeigten Reduktion von B_m mit abnehmender Temperatur. In kalorimetrischen Untersuchungen wurde die latente Wärme L des Schmelzübergangs gemessen. Aus $L = T\Delta S$ konnte die Entropieänderung pro Vortex und supraleitender Schicht zu $\Delta S \approx 0.45 k_B$ [22] bestimmt werden. Der Wert der latenten Wärme ist in Übereinstimmung mit der Höhe des Sprungs der Magnetisierung ΔM gemäß der Clausius-Clapeyron-Gleichung $L = -T\Delta M \mu_0 dB_m/dT$.

2.4 Glas-Übergänge

Diese experimentellen Befunde bestätigen das Bild eines diskontinuierlichen Schmelz-Phasenübergangs in sehr reinen und unverzwillingten YBCO Kristallen. Zudem ist seit langem bekannt, daß Defekte im Supraleiter einen entscheidenden Einfluß auf die statischen und dynamischen Eigenschaften des Vortexzustandes haben. Defekte verankern Vortizes gegen die angreifende Lorentzkraft. Dies führt zu einem unbeobachtbar kleinen Spannungsabfall bei kleinen Strömen, d.h. zu einem thermodynamischen Zustand wahrer Supraleitung, $\rho(j \to 0) \to 0$. Ein weiterer Effekt von Unordnung besteht darin, daß die langreichweitige Translationsordnung des Abrikosov-Gitters zerstört wird. Nur noch innerhalb der Larkin-Länge L_c haften Vortexsegmente kohärent [23].

So wurde beobachtet, daß der scharfe Widerstandsabfall in reinen YBCO Kristallen nach Bestrahlung mit Elektronen oder Protonen hoher Fluenz $n_\phi \approx 10^{19}$ cm^{-2} deutlich verbreitert wird [24]. Ursache hierfür sind die in sehr hoher Dichte bei der Bestrahlung entstehenden Punktdefekte. M.P.A. Fisher [25] formulierte das Bild des kontinuierlichen Vortexglas-Phasenübergangs, induziert durch das kollektive Haften der Vortizes an Dichtefluktuationen von Punktdefekten, siehe Abb. 2.4(a). Jeder einzelne, schwach haftende Punktdefekt ist mikroskopisch klein (z.B. eine Sauerstoff-Fehlstelle) und kann allein einen Vortex nicht festhalten. Erst die kollektive Wirkung der unkorrelierten Defekte soll nach dieser Hypothese einen thermodynamischen Phasenübergang hervorrufen. Ich werde dieses Modell im folgenden Abschnitt 2.4.1 vorstellen.

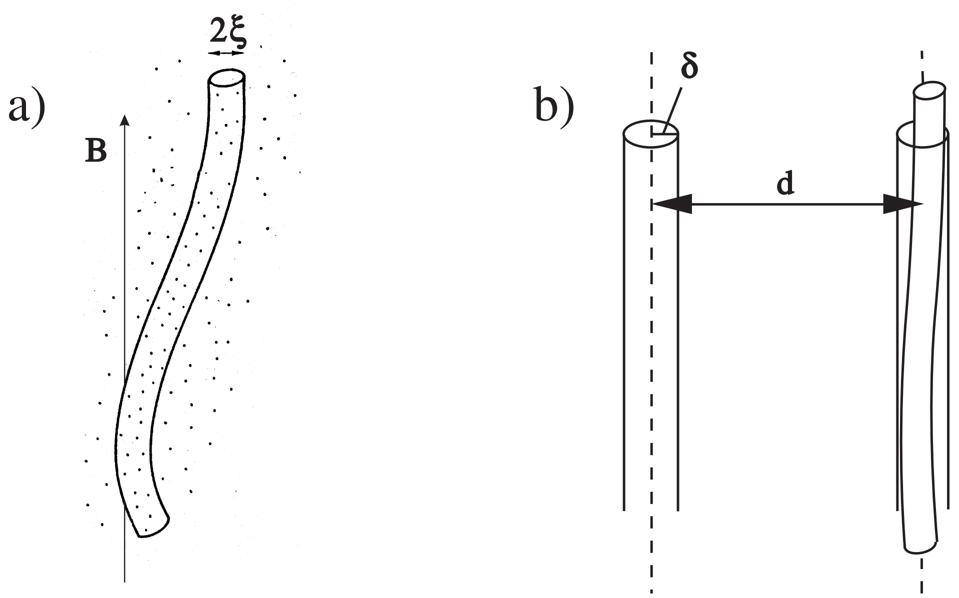

Abb. 2.4: *Schematische Darstellung eines Vortizes, verankert an (a) Dichtefluktuationen von Punktdefekten und (b) einem kolumnaren Defekt. Ersteres ist die Grundlage des Vortexglas-Modells, letzteres die Motivation für das Boseglas-Modell.*

Ebenfalls durch die Existenz einiger weniger Zwillingsgrenzen wird der Widerstandsabfall bei T_m deutlich verbreitert [4, 24]. Dies wurde als Unterdrückung des diskontinuierlichen Schmelzübergangs durch die starke Haftkraft der Zwillingsgrenzen interpretiert [4]. Zwillingsgrenzen stellen eine Realisation von korrelierten Haftzentren dar. Dies sind mesoskopische Defekte, die so stark sind, daß sie individuell Vortizes verankern. Für kolumnare (Linien-) Defekte wurde von Nelson und Vinokur [10] das Boseglas-Modell eingeführt, welches einen thermodynamischen Phasenübergang und wahre Supraleitung voraussagt. Solche kolumnaren Defekte, schematisch für einen Radius δ und einen mittleren Abstand d in Abb. 2.4(b) gezeigt, sind ideal der Form der Vortizes angepaßt und sollten deshalb sehr effektiv als Haftzentren wirken. Das Boseglas-Modell werde ich im Abschnitt 2.4.2 präsentieren. Ein bedeutender Unterschied zwischen dem Haften im Vortexglas und im Boseglas besteht darin, daß die unkorrelierten Defekte des Vortexglases Vortexexkursionen stimulieren, während die starken Defekte im Boseglas stabilisierend gegen Vortexwanderungen wirken.

2.4.1 Vortexglas

M.P.A. Fisher [25] vermutete, daß in dreidimensionalen ($3D$) ungeordneten Supraleitern, aber nicht in dünnen $2D$-Filmen, eine scharfe Phasengrenze existiert, unterhalb derer eine neue thermodynamische Phase, das Vortexglas, liegt, welche durch einen verschwindenden linearen Widerstand ausgezeichnet ist. Das Vortexglas wird charakterisiert durch einen endlichen Wert des Edwards-Anderson-Ordnungsparameters [5, 17],

$$q_{EA} = \frac{1}{V} \int |\tilde{\psi}(\vec{r})|^2 d\vec{r}\,, \tag{2.7}$$

mit dem eichinvarianten Ordnungsparameter

$$\tilde{\psi}(\vec{r}) = \psi(\vec{r}) \exp[i(2\pi/\Phi_0) \int_0^r \vec{A} \cdot d\vec{l}\,]\,.$$

An die Stelle der Schmelztemperatur $T_m(B)$ tritt hier die Vortexglas-Temperatur $T_{vg}(B)$. Das Lindemannkriterium (2.4) zeigt, daß die Amplitude der Vortexfluktuationen bestimmend für die Lage der kritischen Temperatur ist. Das Haften an Punktdefekten im Vortexglas zwingt die Vortizes zu Abweichungen von der idealen geraden Form. Diese defektinduzierten Fluktuationen addieren sich zu den thermisch induzierten Fluktuationen. Deshalb wird bei einem gegebenen Magnetfeld das Schmelzen des Vortexfestkörpers bei einer tieferen Temperatur stattfinden, verglichen mit der Schmelztemperatur in Abwesenheit von Punktdefekten, $B_{vg}(T) < B_m(T)$. Das Phasendiagramm von YBCO bei Anwesenheit einer hohen Dichte von Punktdefekten ist schematisch in Abb. 2.5 dargestellt. Die Absenkung der Schmelzlinie kann auch folgendermaßen verstanden werden: Die Amplitude der Vortexfluktuationen

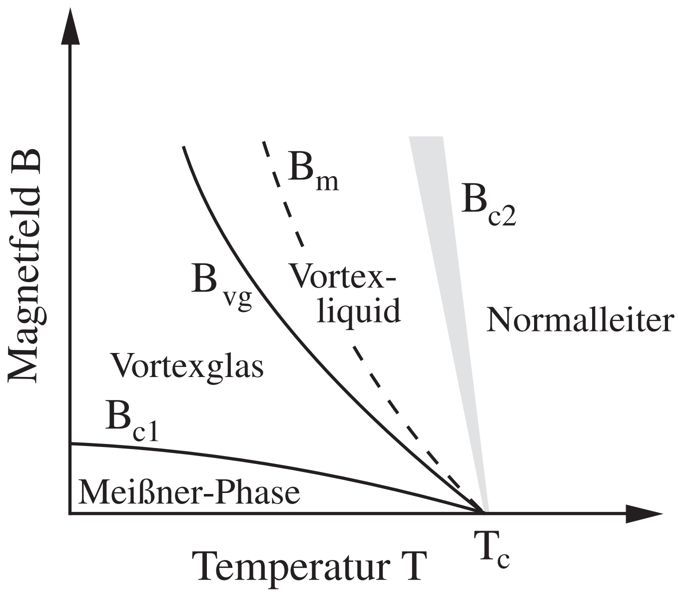

Abb. 2.5: *Phasendiagramm von YBCO mit einer hohen Dichte an Punktdefekten. Die Vortexglas-Linie $B_{vg}(T)$ liegt unterhalb der Schmelzlinie $B_m(T)$ von defektarmen YBCO.*

ist korreliert mit dem Schermodul c_{66} des Vortexfestkörpers [16],

$$\langle u^2 \rangle \sim \frac{1}{\sqrt{c_{66}}} .$$

Die Wirkung der Punktdefekte ist die, das Vortexgitter weicher zu machen und folglich c_{66} zu reduzieren. Damit wird die gemäß dem Lindemannkriterium (2.4) bestimmte kritische Temperatur unter der des Supraleiters ohne Punktdefekte liegen. Die Vortexglas-Linie wird deshalb unterhalb der Schmelzlinie liegen, wenn auch eine genaue Lokalisierung mit diesen Argumenten nicht möglich ist.

Jagla und Balseiro [26] untersuchten den Einfluß von (unkorrelierten) Punktdefekten und korrelierten Defekten (Zwillingsgrenzen sowie kolumnaren Defekten) auf den Schmelz-Phasenübergang des Vortexgitters anhand eines Netzwerkes dreidimensionaler Stapel von Josephsonkontakten. Oberhalb einer kritischen Defektdichte wird der Schmelz-Phasenübergang erster Ordnung ersetzt durch einen Phasenübergang zweiter Ordnung. Dessen Übergangstemperatur liegt im Fall von unkorrelierten Punktdefekten unterhalb der Übergangstemperatur des defektfreien Josephson Netzwerkes, $T_{vg} < T_m$ [26]. Es ist leicht erklärbar, warum es nicht möglich ist, mit Punktdefekten die Schmelzlinie zu erhöhen. Die Ursache hierfür ist, daß die zufällig verteilten Punktdefekte nicht in der Lage sind, bei T_m die Vortexflüssigkeit zu verankern. Die thermisch fluktuierenden Vortizes mitteln über die Haftkräfte der vielen schwachen Defekte. Die haftende Wirkung der Punktdefekte hebt sich in der Folge gegenseitig auf. Ob die Vortexglas-Temperatur endlich und wie hoch diese ist, konnte nicht vorausgesagt werden. Jagla und Balseiro [26] zeigten, daß eine *Erhöhung* der Übergangstemperatur gegenüber der Schmelztemperatur in der Gegenwart kolumnarer Defekte möglich ist. Diese Beobachtung entspricht einer quantitativen Voraussage des Boseglas-Modells (Abschnitt 2.4.2) für den thermodynamischen Phasenübergang in das Boseglas.

Im Gegensatz zum Abrikosov-Gitter ist der Ordnungsparameter (2.7) des Vortexglases nicht invariant unter einer globalen Verschiebung aller Vortexlinien, $A_\alpha \to A_\alpha + 2\pi N$. Vortexglas-Zustände mit verschiedenen N sind auf Grund der Symmetriebrechung in (2.7) durch eine unendlich große Energiebarriere getrennt. Eine angreifende Lorentzkraft versucht N zu erhöhen und erzeugt dabei Tröpfchen des $N+1$-Zustandes im metastabilen N-Zustand. Diese Tröpfchen können interpretiert werden als orientierte Vortexring-Anregungen im N-Zustand. Der Vortexglas-Zustand kann demnach dargestellt werden als eine Überlagerung eines konstanten Hintergrundes gerader Flußlinien plus geschlossener Vortexringe.

Ein Maß für die langreichweitige Phasenkohärenz ist die Korrelationsfunktion des Ordnungsparameters

$$G(\vec{r}) = \langle |\, \langle \psi(\vec{r'})\psi(\vec{r}+\vec{r'}) \rangle_T \,| \rangle_R^2 \,,$$

wobei $\langle\ \rangle_T$ und $\langle\ \rangle_R$ die Mittelung über thermische bzw. räumliche Unordnung bezeichnet. Oberhalb der Glastemperatur T_{vg} fällt $G(\vec{r})$ für große Abstände exponentiell mit der Vortexglas-Korrelationslänge ξ_g ab, während $G(\vec{r})$ im Vortexglas für große Abstände einen konstanten Wert annimmt. Die Korrelationslänge

$$\xi_g(T) = \xi_g(0) \left| 1 - \frac{T}{T_{vg}} \right|^{-\nu} \tag{2.8}$$

mit dem kritischen Exponenten ν des Vortexglas-Phasenübergangs beschreibt für Temperaturen unterhalb T_{vg} die räumliche Ausdehnung flüssiger Fluktuationen in der Glasphase. Für $T > T_{vg}$ beschreibt (2.8) Fluktuationen glasartiger Bereiche in der Vortexflüssigkeit. Bei Annäherung an den Phasenübergang divergiert die Größe beider Bereiche. Die charakteristische Lebensdauer (Relaxationszeit) der Glas-Fluktuationen divergiert wie

$$\tau(T) \sim \xi_g^z \sim \left| 1 - \frac{T}{T_{vg}} \right|^{-\nu z} \tag{2.9}$$

mit dem dynamischen kritischen Exponenten z des Vortexglases [17]. Die Phasenlinie $B_{vg}(T)$ soll innerhalb des XY-kritischen Regimes, wie die Schmelzlinie, mit der Korrelationslänge des Nullfeldes, Gl. (2.2), skalieren: $B_{vg} \simeq \Phi_0/(2\pi\xi^2)$. Dies bedeutet, die Vortexglas-Linie folgt

$$B_{vg}(T) = B_{vg}(0) \cdot \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{2\nu_0} \tag{2.10}$$

mit $B_{vg}(0) = \Phi_0/(2\pi\xi^2(0))$ und dem Exponenten des Nullfeldes $\nu_0 \approx 2/3$.

Die kritischen Exponenten des Vortexglas-Phasenübergangs wurden von Dorsey et al. [27] in Molekularfeldnäherung (MF) unter Berücksichtigung von Fluktuationen in

Gauß'scher Näherung bestimmt. Die Autoren erhalten $\nu = 1/2$ und $z = 4$; letzterer ist deutlich größer als für die zeitabhängige Ginsburg-Landau-Dynamik erwartet wird, $z = 2$. Als exakt wird dieses Ergebnis für den Vortexglas-Übergang nur in $D = 6$ Dimensionen angenommen. Für das reale Vortexglas in $D = 3$ Dimensionen erwartet man für beide Exponenten größere Werte. Der Exponent ν sollte in $\epsilon = 6 - D$ Dimensionen ansteigen [7], $\nu = 1/2 + 5\epsilon/24$. Für den dynamischen Exponenten z wird, $z = 2(2 - \eta)$, erwartet [27] mit $\eta \approx -\epsilon/6$, d.h. das Vortexglas in $D = 3$ Dimensionen sollte durch $z \approx 5$ und $\nu \approx 1$ charakterisiert sein. In der Tat liegen die in numerischen Simulationen ermittelten Werte der kritischen Exponenten verschiedener $3D$-Modellsysteme deutlich über den Molekularfeld-Ergebnissen. Für das $3D$-Ising-Spinglas wird $\nu = 1.3(3)$ und $z = 6.1(3)$ berichtet [28], während für das Eichglas-Modell in drei Dimensionen $\nu = 1.3(4)$ und $z = 4.7(7)$ ist [29]. Vor kurzem wurde berichtet, daß der Phasenübergang des $3D$-Eichglases unter Berücksichtigung einer endlichen Eindringtiefe unterdrückt wird [30]. Die Anwendbarkeit des Eichglas-Modells für reale Supraleiter wurde deshalb angezweifelt. Es wird vermutet, daß die Unterdrückung des Phasenübergangs in $3D$ durch die Nähe der unteren kritischen Dimension des Eichglases verursacht wird [30].

2.4.2 Boseglas

Das Boseglas-Modell wurde von Nelson und Vinokur [10] vorgeschlagen, um die Physik an kolumnaren Defekten haftender Vortizes zu beschreiben. In diesem Modell wird die freie Energie der Vortizes betrachtet, wenn diese entlang zufällig verteilter kolumnarer Defekte mit mittleren Abstand d und Radius δ orientiert sind. Die mit diesem Modell verbundene statistische Mechanik in $D + 1 = 3$ Dimensionen ist äquivalent zu der Quantenmechanik wechselwirkender Bosonen in $D = 2$ Dimensionen. In diesem Zusammenhang werden drei thermodynamische Phasen gefunden [31], welche in Abb. 2.6 dargestellt sind: Eine superfluide Phase, die der Vortexflüssigkeit entspricht, das Boseglas und bei tiefen Temperaturen eine Mott-Isolator-Phase, in der an jedem kolumnaren Defekt ein Vortex lokalisiert ist.

Die Vortexflüssigkeit ist charakterisiert durch endliche Kompressions- c_{11} und Kippmodule c_{44} und einen verschwindenden Schermodul c_{66}. Die Vortizes sind delokalisiert und erzeugen einen linearen Widerstand, ähnlich der Vortexflüssigkeit oberhalb des Vortexglas-Übergangs. Die flüssige Phase ist durch einen thermodynamischen Phasenübergang entlang einer Linie $T_{bg}(B)$ von dem Boseglas getrennt. In der Boseglas-Phase sind die Vortizes an einzelnen oder einigen wenigen Defekten lokalisiert. Das starke kolumnare Haften führt zu einem unendlich großen Kippmodul c_{44}, während der Schermodul c_{66} bei fehlender Vortex-Wechselwirkung, wie im Vortexglas, verschwindet [10]. Ob der Kompressionsmodul c_{11} im Boseglas endlich bleibt, wird durch die Korrelationslänge bestimmt. Diese ist für das Boseglas räumlich anisotrop

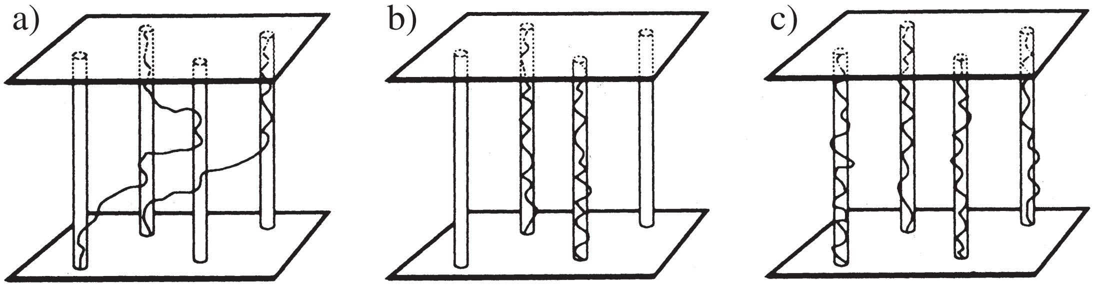

Abb. 2.6: *Schematische Darstellung von Vortizes, wechselwirkend mit kolumnaren Defekten (a) in der Vortexflüssigkeit, (b) im Boseglas und (c) in der Mott-Isolator-Phase [10].*

und verschieden entlang der kolumnaren Defekte,

$$\xi_{\|}(T) \sim \left|1 - \frac{T}{T_{bg}}\right|^{-\nu_{\|}}, \tag{2.11}$$

und senkrecht zu diesen,

$$\xi_{\perp}(T) \sim \left|1 - \frac{T}{T_{bg}}\right|^{-\nu_{\perp}}. \tag{2.12}$$

Die Kompressibilität des Boseglases ist $\kappa_{bg} \sim \xi^{\nu_{\|}/\nu_{\perp}-2}$. Ist das Verhältnis

$$\zeta = \frac{\nu_{\perp}}{\nu_{\|}} \tag{2.13}$$

gleich 1/2, so bleibt die Kompressibilität κ_{bg} und der Modul c_{11} im Boseglas endlich [10]. Gl. (2.13) definiert den *line-wandering*-Exponenten ζ. Dieser beschreibt das Skalenverhalten der transversalen Fluktuationen

$$\langle\langle \ell_{\perp}^2(L)\rangle_T\rangle_R^{1/2} \approx \xi_{\|}(L/L_c)^{\zeta}$$

für große Abstände L zweier Vortexsegmente [23]. Sein Wertebereich umfaßt $1/2 \leq \zeta \leq 1$ [17]. Isotrope, kreisförmige Vortexfluktuationen werden charakterisiert durch $\zeta = 1$. Ein reduzierter Wert des Exponenten $\zeta < 1$ beschreibt unterdrückte transversale Fluktuationen. Bleibt die kurzreichweitige Diffusionskonstante $D_0 \sim \xi_{\perp}^2/\xi_{\|}$ bei T_{bg} endlich, wie von Nelson und Vinokur vorgeschlagen, so legt dies den Wert des line-wandering-Exponenten für den Boseglas-Phasenübergang auf $\zeta = 1/2$ fest [10].

Im Mott-Isolator divergiert sowohl der Kompressionsmodul c_{11} wie auch der Kippmodul c_{44}. Nach Wengel und Täuber [32] bleibt nach Einschalten der Vortex-Vortex-Wechselwirkung die Mott-Isolator-Phase nur für $d \gg \lambda$ als thermodynamische Phase bestehen. Für zufällig verteilte kolumnare Defekte scheint die Vortex-Wechselwirkung die Mott-Isolator-Phase zu zerstören.

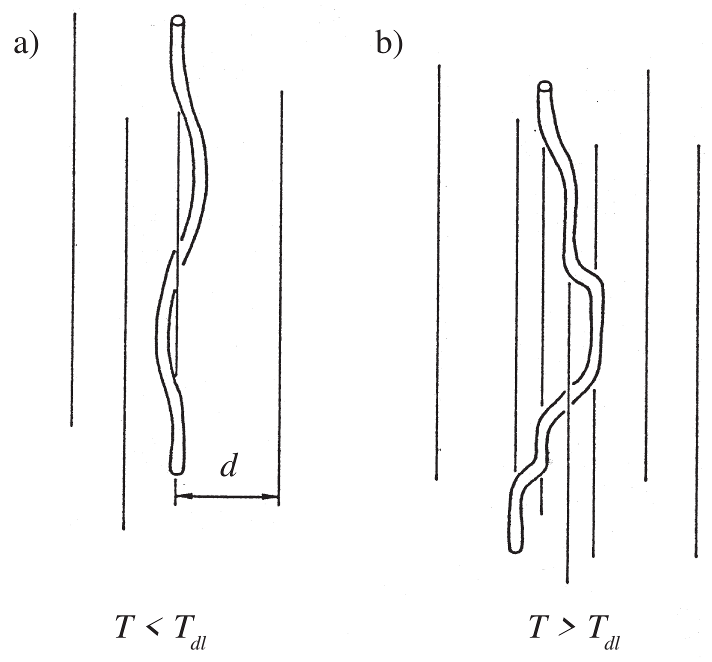

Abb. 2.7: *Schematische Darstellung eines an kolumnaren Defekten haftenden Vortex für Temperaturen (a) unterhalb und (b) oberhalb der Delokalisierungs-Temperatur T_{dl}.*

Im Gegensatz zum Vortexglas, wo Punktunordnung Vortexauslenkungen fördert, hindert Haften an kolumnaren Defekten Vortexbewegungen und fördert Lokalisierung. Dies hat entscheidenden Einfluß auf die Lage der Glaslinie im Vergleich zu der Schmelzlinie reiner Hochtemperatursupraleiter und der Glaslinie des Vortexglases. Für das Boseglas ist es möglich, die Lage der Boseglas-Linie quantitativ vorherzusagen. Eine wichtige Temperatur ist die Delokalisierungs-Temperatur T_{dl}, bei der Vortizes beginnen, sich von einzelnen kolumnaren Defekten zu lösen. Dies ist in der Abb. 2.7 schematisch dargestellt. Unterhalb T_{dl} wird ein Vortex durch einen Defekt verankert, während oberhalb Dichtefluktuationen kolumnarer Defekte, ähnlich wie im Vortexglas Dichtefluktuationen von Punktdefekten, als Haftzentren wirken. Bestimmt wird T_{dl} dadurch, daß die transversale Auslenkung eines Vortex $\ell_\perp$ den mittleren Abstand d zweier kolumnarer Defekte erreicht: $\ell_\perp(T_{dl}) = d$. Mit Parametern typisch für YBCO und die in dieser Arbeit untersuchten kolumnaren Defekte ist $T_{dl}/T_c = 0.945(5)$ oder $T_{dl} \approx 85$ K.

Oberhalb T_{dl} wächst $\ell_\perp = d(T/T^*)^2$, wobei $T^* = \delta/(4\xi_0)(\ln\kappa/\mathrm{Gi})^{1/2}\Delta T$ mit $\Delta T = T_c - T$ die Energieskala des Defekts ist. Für sehr kleine Felder $B \leq \Phi_0/\lambda_L^2 \approx 0.1$ T ist die Vortex-Wechselwirkung vernachlässigbar, $\lambda_L < a_0$, und die Boseglas-Temperatur T_{bg} ist gegeben durch $\ell_\perp(T_{bg}) = a_0(B)$. Hieraus folgt ein sehr starker Anstieg der Boseglas-Linie mit abnehmender Temperatur, $B_{bg} \sim \Delta T^{-4}$. Unter Berücksichtigung der Energieskala T^* folgt hieraus eine quantitative Vorhersage für die Boseglas-

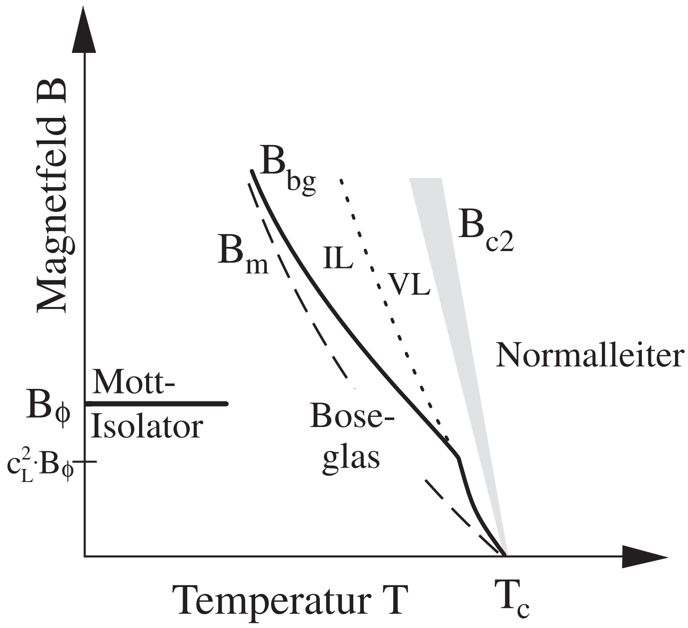

Abb. 2.8: *Phasendiagramm von sehr reinem YBCO in Anwesenheit kolumnarer Defekte der Dichte B_ϕ. Die Boseglas-Linie $B_{bg}(T)$ liegt oberhalb der Schmelzlinie $B_m(T)$ von reinem YBCO [34].* VL *bezeichnet das Vortexliquid und* IL *das Interstitial-Liquid [35].*

Linie [33]

$$B_{bg}(T) = B_\phi \cdot \left(\frac{\delta}{4\xi_0}\right)^4 \cdot \left(\frac{\ln\kappa}{\mathrm{Gi}}\right)^2 \cdot \left(\frac{T_c}{T} - 1\right)^4 . \tag{2.14}$$

$B_\phi = \Phi_0/d^2$ ist das sogenannte Dosisäquivalentfeld, mit dem mittleren Abstand zweier kolumnarer Defekte d. Bei $B = B_\phi$ entspricht die Vortexdichte der Dichte der kolumnaren Defekte, nominell wird also jeder Defekt durch genau einen Vortex belegt. Diese Magnetfeldstärke wird deshalb auch *Matchingfeld* genannt.

Mit zunehmender Vortexdichte wird der mittlere Vortexabstand kleiner und die Vortex-Wechselwirkung wird bedeutsam, wenn $a_0 < \lambda_L$. Für die Erhöhung der Boseglas-Linie $T_{bg}(B)$, verglichen mit der Schmelzlinie $T_m(B)$ des Supraleiters ohne die kolumnaren Defekte, wird vorhergesagt [5]

$$T_{bg}(B) = \gamma_\pm \cdot T_m(B) + (1 - \gamma_\pm) \cdot T_c , \tag{2.15}$$

mit dem Unordnungsparameter $0 \leq \gamma_\pm \leq 1$. Für $a_0 > d/c_L$, dies entspricht Magnetfeldern kleiner $c_L^2 \cdot B_\phi$, ist

$$\gamma_- = \left(1 + \frac{\delta^2}{16 c_L d \xi_0 \sqrt{\mathrm{Gi}}}\right)^{-1} . \tag{2.16}$$

Dieser Ausdruck ist korrekt im Limes verschwindender wie auch hoher Defektdichte. In Abwesenheit kolumnarer Defekte, d.h für $d \to \infty$, ist $\gamma_- = 1$ und die Schmelzlinie

$T_m(B)$ wird reproduziert. Für dichte Defekte, $d \to 0$, gilt $\gamma_- \to 0$ und die Boseglas-Temperatur erreicht die obere physikalische Grenze, $T_{bg} \to T_c$.

Zu höheren Feldern, $a_0 < d/c_L$, entsprechend $B > c_L^2 \cdot B_\phi$, ist die Anzahl der Defekte, die einem Vortex zur Verfügung stehen, reduziert und der Parameter γ_+ wird magnetfeldabhängig:

$$\gamma_+(B) = \left(1 + \frac{\delta^2}{16 d\xi_0}\sqrt{\frac{B_\phi}{B\mathrm{Gi}}}\right)^{-1} . \tag{2.17}$$

Für große Magnetfelder gilt $\gamma_+ \to 1$ und die Boseglas-Linie nähert sich der Schmelzlinie asymptotisch an. Das Phasendiagramm eines reinen Hochtemperatursupraleiters mit kolumnaren Defekten der Dichte B_ϕ ist in der Abb. 2.8 dargestellt.

Larkin und Vinokur [34] geben eine Erklärung des Gültigkeitsbereiches des $B_{bg} \sim \Delta T^{-4}$-Gesetzes und des Übergangs zur Gl. (2.15) an. Nach den Autoren ist das Zusammenwirken von elastischer Energie E_{el} und Haftenergie E_p der kolumnaren Defekte für diesen Wechsel verantwortlich. Die elastische Energie $E_{el} = c_{66}\ell_\perp^2\ell_\| + \varepsilon_0\ell_\perp^2/(\ell_\|\gamma)$ ist bestimmt durch Vortex-Exkursionen parallel $\ell_\|$ bzw. senkrecht $\ell_\perp$ zur Feldrichtung. Die Haftenergie $E_p \approx (\varepsilon_0\delta)^2/(d\gamma T)$ ist bestimmt durch die Struktur der kolumnaren Defekte. Bei der Delokalisierungs-Temperatur T_{dl} ist $E_p \approx (c_L a_0)^2\sqrt{c_{66}\varepsilon_0}/\gamma$ und Unordnung beginnt den Übergang zu dominieren. Ist die Dichte der kolumnaren Defekte geringer als die Vortexdichte am Schmelz-Phasenübergang bei der Delokalisierungs-Temperatur, $B_\phi < B_m(T_{dl})$, so soll Gl. (2.15) die relativ kleinen Korrekturen gegenüber der Schmelzlinie $B_m(T)$ beschreiben. Ist die Defektdichte jedoch größer, $B_\phi > B_m(T_{dl})$, so soll Gl. (2.14) gültig werden. Mit $T_{dl}/T_c = 0.945$ und der experimentellen Schmelzlinie (2.6) gilt $B_m(T_{dl}) \approx 2.3$ T. Für die Untersuchungen des Boseglas-Phasenübergangs in dieser Arbeit wurden deshalb YBCO Filme mit drei Dosisäquivalentfeldern, $B_\phi = 1$ T, 4 T und 10 T, untersucht.

Für Vortexdichten $B > B_\phi$ kann nur noch ein Teil der Vortizes an kolumnaren Defekten lokalisiert sein. Dieser Anteil entspricht maximal der Dichte der kolumnaren Defekte B_ϕ/B, während der restliche Teil $(B - B_\phi)/B$ zwischen den kolumnaren Defekten lokalisiert sein muß. L. Radzihovsky [35] nahm deshalb an, daß in Magnetfeldern $B > B_\phi$ zwei flüssige Phasen existieren, siehe auch Abb. 2.8. In der Vortexflüssigkeit sind alle Vortizes frei beweglich, während in dem sogenannten *Interstitial*-Liquid ein Anteil B_ϕ/B an kolumnaren Defekten haftet und die übrigen Vortizes eine flüssige Phase bilden. Der eigentliche thermodynamische Phasenübergang in einen wirklich supraleitenden Zustand vollzieht sich aus dem *Interstitial*-Liquid in das Boseglas. Alle physikalischen Größen bei diesem Übergang sind dann auf das effektive Magnetfeld $B - B_\phi$ zu beziehen.

2.5 Dynamische Leitfähigkeit

In diesem Abschnitt soll die dynamische Leitfähigkeit $\sigma(\omega) = \sigma' - i\sigma''$ eines Supraleiters betrachtet werden.

2.5.1 Zwei-Flüssigkeiten-Modell

Das einfachste Modell des supraleitenden Zustandes ist das Zwei-Flüssigkeiten-Modell. Dieses beschreibt die Leitfähigkeit durch Superposition von supraleitenden Elektronen der Dichte $n_s = m/(\mu_0 e^2 \lambda_L^2)$ mit den verbleibenden normalleitenden Elektronen der Dichte $n - n_s$. Die Bewegungsgleichung der supraleitenden Elektronen lautet:

$$m \frac{d\vec{v}_s}{dt} = -e\vec{E} \,.$$

Diese bestimmt die superfluide Stromdichte $\vec{j}_s = -2\vec{v}_s n_s$ und ergibt die erste London-Gleichung

$$\frac{d\vec{j}_s}{dt} = \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \vec{E} \,.$$

Für harmonische Zeitabhängigkeit der Stromdichte und unter Berücksichtigung der Leitfähigkeit der normalleitenden Elektronen σ_n ist die dynamische Leitfähigkeit des Zwei-Flüssigkeiten-Modells

$$\sigma_-(\omega) = \sigma_n + \frac{1}{i\omega\mu_0\lambda_L^2} \,, \tag{2.18}$$

d.h. die London'sche Eindringtiefe ergibt sich aus

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{1}{i\omega\mu_0\sigma_-(\omega)} = \lambda_L^2 \,.$$

Oberhalb von T_c erwartet man metallisches Verhalten. Die normalleitenden Elektronen folgen der Bewegungsgleichung

$$m \left(\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\hat{\tau}} \right) = -e\vec{E}$$

mit der Relaxationszeit $\hat{\tau}$. Bei harmonischer Zeitabhängigkeit wird die dynamische Leitfähigkeit beschrieben durch die Drude-Dynamik

$$\sigma_+(\omega) = \frac{\sigma_+(0)}{1 + i\omega\tau_n} \tag{2.19}$$

mit der statischen Leitfähigkeit $\sigma_+(0) = ne^2\tau_n/m$. Hier bestimmt das Verhältnis

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{\tau_n}{\mu_0\sigma_+(\omega)} = \lambda_p^2$$

die sogenannte Plasma-Wellenlänge des Drude-Metalls.

2.5.2 Gauß'sche und topologische Fluktuationen

Thermische Fluktuationen ändern dieses einfache Bild. Bei Annäherung an den Supraleitungs-Phasenübergang erhöhen kurzlebige Cooper-Paare-Fluktuationen die Leitfähigkeit oberhalb des Phasenübergangs. H. Schmidt [36] betrachtete thermische Fluktuationen des $3D$-Ordnungsparameters im Rahmen der zeitabhängigen Ginsburg-Landau-Theorie. In Gauß'scher Näherung führen diese Fluktuationen zu einem zusätzlichen Beitrag zu dem Realteil der Leitfähigkeit

$$\frac{\sigma'_G(\omega\tau)}{\sigma(0)} = \frac{8}{3(\omega\tau)^2}\left[1-(1+(\omega\tau)^2)^{3/4}\cos\left(\frac{3}{2}\arctan(\omega\tau)\right)\right] . \tag{2.20}$$

Mit der Kramers-Kronig-Relation ist es möglich, aus dem Realteil der Leitfähigkeit den korrespondierenden Imaginärteil zu berechnen:

$$\sigma''_G(\omega\tau) = \frac{2\omega\tau}{\pi} P\int_0^\infty \frac{\sigma'_G(s)}{(\omega\tau)^2 - s^2} ds . \tag{2.21}$$

In der Abb. 2.9 ist die resultierende Skalenfunktion in Phase und Betrag dargestellt. Im Limes kleiner $\omega\tau$ nimmt der Widerstand den statischen Wert ρ_0 an. Für große Werte von $\omega\tau$ zeigt die Skalenfunktion ein potenzartiges Verhalten $|\rho_G(x)| = 1/|\sigma_G(x)| \sim x^{1/2}$. Insbesondere ist die Phase in diesem Bereich $\phi_\rho = 1$. Dies entspricht einer relaxierenden Dynamik, die durch den kritischen Exponenten $z = 2$ beschrieben wird.

A.T. Dorsey [38] berechnete ebenfalls den Effekt Gauß'scher Fluktuationen oberhalb der kritischen Temperatur auf die dynamische Leitfähigkeit. Unter Vernachlässigung des $|\psi|^4$-Terms der freien Energie (2.1) und für einen reinen Relaxator ($z = 2$), gilt für den Real- und Imaginärteil der dynamischen Leitfähigkeit die Skalierungsform $\sigma_G(\omega)/\sigma(0) = S'_G(\omega\tau) + iS''_G(\omega\tau)$. In $D = 3$ Dimensionen gilt für den Realteil der Skalenfunktion

$$S'_G(x) = \frac{8}{3x^2}\left[1-(1+x^2)^{3/4}\cos\left(\frac{3}{2}\arctan(x)\right)\right] \tag{2.22}$$

und für den Imaginärteil

$$S''_G(x) = \frac{8}{3x^2}\left[-\frac{3}{2}x+(1+x^2)^{3/4}\sin\left(\frac{3}{2}\arctan(x)\right)\right] . \tag{2.23}$$

Die resultierende komplexe Skalenfunktion der Leitfähigkeit ist in Betrag und Phase identisch zu der Skalenfunktion unter Berücksichtigung von $3D$-Ordnungsparameterfluktuationen [36], Gl. (2.20) und Gl. (2.21). Die Berechnung der Fluktuationsleitfähigkeit in Gauß'scher Näherung bedeutet insbesondere, daß Fluktuations-Fluktuations-Wechselwirkungen nicht berücksichtigt werden. Damit ist dieser Ausdruck sicher nicht korrekt in dem kritischen Bereich in unmittelbarer Nähe des Phasenübergangs. Dort erwartet man einen Übergang in das kritische Regime, in welchem der $|\psi|^4$-Term der freien Energie (2.1) nicht mehr vernachlässigt werden kann.

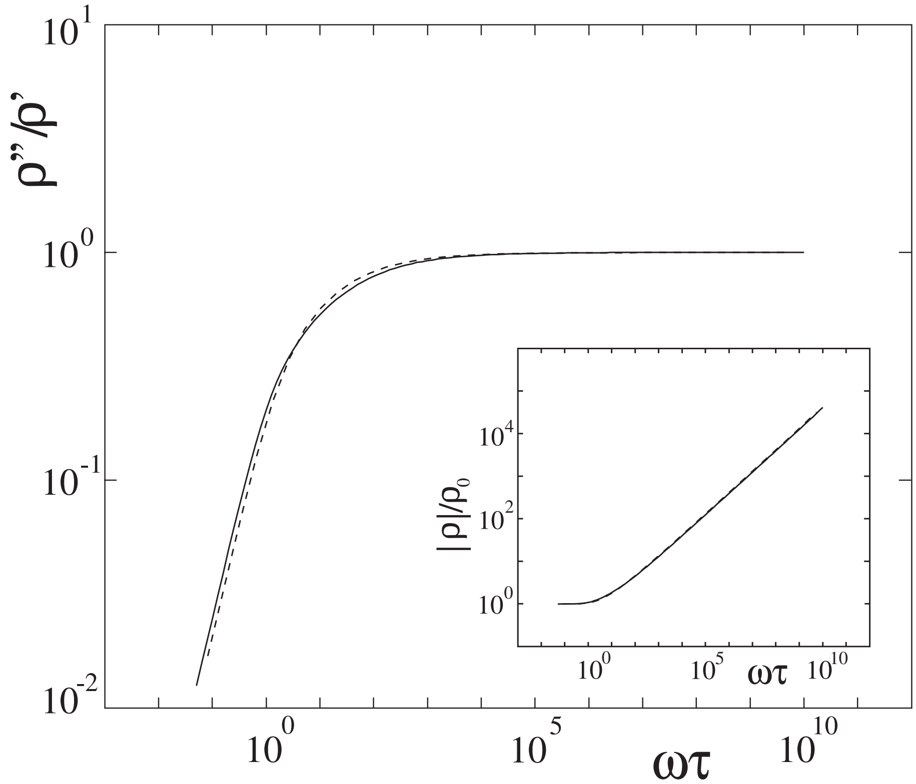

Abb. 2.9: *Phase der dynamischen Skalenfunktion $\rho''(\omega\tau)/\rho'(\omega\tau)$ oberhalb des Phasenübergangs. Das Inset zeigt den Betrag $|\rho(\omega\tau)|/\rho_0$. Die durchgezogene Linie berücksichtigt 3D-Gauß'sche Fluktuationen des Ordnungsparameters [36]. Die durchbrochene Linie ist für die Dynamik gebundener Vortex-Antivortex-Paare berechnet worden [37].*

Eine alternative Beschreibung der Dynamik oberhalb des Phasenübergangs berücksichtigt die diffusive und relaxierende Dynamik freier und gebundener Vortex-Antivortex (VA)-Paare. VA-Paare wurden von Halperin und Nelson [37] als Usprung elektrischer Verluste oberhalb des Phasenübergangs in dünnen Filmen ($d < \xi$) vorgeschlagen. Der zusätzliche Beitrag zum Widerstand auf Grund der VA-Paare ist

$$\rho_{VA}(\omega\tau) = \rho_{VA}(0) + i\omega\mu_0\lambda_0^2\,(1 + \chi_b(\omega\tau)) \tag{2.24}$$

mit der Polarisations-Suszeptibilität auf Grund gebundener VA-Paare

$$\chi_b(\omega\tau) = \frac{1}{\sqrt{\omega\tau_0}} \int_{\sqrt{\omega\tau_0}}^{\sqrt{\omega\tau}} \frac{\tilde{\epsilon}\,'}{1 + ix^2} dx \qquad x = \frac{r}{\xi}\,.$$

Die statische dielektrische Funktion $\tilde{\epsilon}(r/\xi)$ beschreibt die Abschirmung durch Vortizes mit Abstand kleiner als r. Mit der empirischen Annahme $\tilde{\epsilon}\,' \equiv d\tilde{\epsilon}/dx = 1$ erhält man eine mit $D = 3$-Gauß'schen Fluktuationen [36, 38] nahezu identische Skalenfunktion, siehe Abb. 2.9.

Der Beitrag Gauß'scher Fluktuationen unterhalb des Phasenübergangs wurde ebenfalls zuerst von H. Schmidt [39] berechnet. Es zeigt sich, daß die resultierende Skalenfunktion nahezu identisch ist zu der Skalenfunktion oberhalb des Phasenübergangs, Gl. (2.20) und (2.21). Dabei ist zu beachten, daß unterhalb des Phasenübergangs der Beitrag der endlichen supraleitenden Abschirmung $\lambda(T) = (\omega\mu_0\sigma'')^{-1/2}$ zu einer vollständigen Skalenfunktion berücksichtigt werden muß.

2.5.3 Vortexglas-Dynamik

Im XY-kritischen Bereich nahe $T_c(B=0)$ gilt für die Dichte [40] $n_s \sim \lambda^{-2} \sim \xi^{2-D}$. Die charakteristische Relaxationszeit skaliert wie

$$\tau \sim \xi^z \sim \left|1 - \frac{T}{T_c}\right|^{-\nu_0 z} \tag{2.25}$$

mit dem dynamischen kritischen Exponenten z. Innerhalb der zeitabhängigen Ginsburg-Landau-Dynamik ist $z = 2$ in Dimensionen $2 \leq D \leq 4$ [17]. Dies bedeutet, daß die lineare ac-Leitfähigkeit wie

$$\sigma_\pm(\omega\tau) \sim \xi^{z+2-D} S_\pm(\omega\tau) \tag{2.26}$$

$(+)$ oberhalb und $(-)$ unterhalb von T_c skalieren muß [17].

Unter der Annahme eines kontinuierlichen Phasenübergangs in das Vortexglas haben Fisher, Fisher und Huse [17] Skalenvorschriften für (i) den nichtlinearen Widerstand $\rho(j)$ in Strom-Spannungs-Kennlinien und (ii) den dynamischen Widerstand $\rho(\omega) = \sigma^{-1}(\omega)$ vermutet:

(i) Wegen $\vec{\nabla} \times \vec{e} = -\partial\vec{b}/\partial t$ mit $\vec{b} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ und weil das Vektorpotential wie eine inverse Länge in (2.1) eingeht, muß die elektrische Feldstärke wie 1/(Länge $\times$ Zeit) skalieren. Für die Stromdichte gilt $j = \partial f/\partial A$ mit der freien Energiedichte f. Folgt man der Hyperskalenrelation für die Energiedichte, so sollte diese in drei Dimensionen wie ein inverses Volumen skalieren. In der Nähe des Phasenübergangs sollen die Vortexglas-Korrelationslänge, Gl. (2.8), $\xi_g \sim |1 - T/T_{vg}|^{-\nu}$ und Vortexglas-Relaxationszeit, Gl. (2.9), $\tau \sim \xi_g^z$ die Längen- und Zeitskala bestimmen. Eine geeignete Skalenkombination ist deshalb

$$e\xi_g^{z+1} = \varepsilon_\pm(j\xi_g^2)\,. \tag{2.27}$$

$\varepsilon_+(j\xi_g^2)$ ist eine (universelle) Skalenfunktion oberhalb T_{vg} und $\varepsilon_-(j\xi_g^2)$ eine Skalenfunktion unterhalb der Vortexglas-Temperatur. Bei T_{vg} müssen sich die kritischen Abhängigkeiten aufheben und die Skalenfunktion folgt einem Potenzgesetz $\varepsilon_\pm(x) \sim x^{(z-1)/2}$. Basierend auf diesen Skaleneigenschaften des Vortexglas-Phasenübergangs, fanden Koch et al. [7] zum ersten Mal Hinweise auf das Vortexglas in dünnen YBCO Filmen.

(ii) Wegen $\rho = e/j$ skaliert ρ wie Länge/Zeit und mit ω als inverser Zeit ist

$$\rho(\omega)\xi_g^{z-1} = R_\pm(\omega\xi_g^z) \tag{2.28}$$

ein Ansatz für eine Skalenrelation. Der komplexe dynamische Widerstand $\rho(\omega) = \rho' - i\rho''$ kann auch ausgedrückt werden in Betrag $|\rho(\omega)| = \sqrt{\rho'^2 + \rho''^2}$ und Phase $\varphi_\rho(\omega) = \arctan(\rho''/\rho')$. Hiermit gilt $\rho = |\rho| \cdot \exp(i\varphi_\rho)$ und die Skalenrelation (2.28) ist gleichbedeutend mit den beiden Gleichungen

$$|\,\rho(\omega)\,|\,/\rho_0 = \tilde{R}_\pm(\omega\xi_g^z) \tag{2.29}$$

mit $\rho_0 \sim \xi_g/\tau = \xi_g^{1-z}$ und

$$\varphi_\rho(\omega) = \Phi_\pm(\omega\xi_g^z)\,.$$

Von Interesse ist auch das Verhältnis $\phi_\rho(\omega) = \rho''/\rho'$, für das eine analoge Skalenvorschrift existiert:

$$\phi_\rho(\omega) = \tilde{\Phi}_\pm(\omega\xi_g^z)\,, \tag{2.30}$$

wobei $\tilde{\Phi}_\pm(x) = \tan\Phi_\pm(x)$ ist.

Die Skalenfunktionen oberhalb (+) und unterhalb (−) der Übergangstemperatur sind im Abschnitt 2.5.2 für Gauß'sche Fluktuationen und $z = 2$ innerhalb der zeitabhängigen Ginsburg-Landau-Theorie berechnet worden. Für $T \gg T_{vg}$ haben die Skalenfunktionen die asymptotische Form

$$\tilde{R}_+(x \to 0) \sim 1, \qquad \tilde{\Phi}_+(x \to 0) \to 0\,.$$

Für $T \ll T_{vg}$ gilt:

$$\tilde{R}_-(x \to 0) \sim x, \qquad \tilde{\Phi}_-(x \to 0) \to \infty\,.$$

Bei T_{vg} müssen sich die kritischen Gesetze kürzen, woraus ein Potenzgesetz für den Betrag

$$\tilde{R}_\pm(T_{vg}) \sim x^{1-1/z}$$

folgt.

Die Phase $\Phi_\pm(T_{vg})$ ist aus der Kausalität von $|\sigma(\omega)| = 1/|\rho(\omega)|$ bestimmbar, wobei $\varphi_\sigma = \varphi_\rho$ ist. Die Kramers-Kronig-Relation, angewandt auf den Logarithmus $\ln\sigma = \ln|\,\sigma\,| + i\varphi_\sigma$, ist

$$\varphi_\sigma = \frac{\omega}{\pi}\,P\int_0^\infty \frac{\ln|\,\sigma(s)\,|}{\omega^2 - s^2}ds\,,$$

wobei P das Cauchy'sche Hauptwertintegral bezeichnet. Der Wert der Phase bei T_{vg} kann leicht auf eine beliebige Dimension D verallgemeinert werden. Wurde bisher implizit $D = 3$ angenommen, so gilt für $2 \le D \le 4$:

$$\Phi_\pm(T_{vg}) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2 - D + z}{z}\,. \tag{2.31}$$

In dem bisher betrachteten Fall $D = 3$ ist die Phase bei T_{vg} endlich und wird durch den kritischen Exponenten z bestimmt. Bei T_{vg} liegt ein echtes Potenzgesetz vor

$$\rho_{\pm}(\omega\tau) = \rho_0(i\omega\tau)^{1-1/z} \sim (i\omega\tau_0)^{1-1/z}\,. \tag{2.32}$$

Für $T < T_{vg}$ steigt das Verhältnis $\phi_\rho(\omega) = \rho''/\rho'$ mit der Frequenz, für $T > T_{vg}$ fällt es und nur bei T_{vg} nimmt es den konstanten Wert, $\tan[\pi/2 \cdot (1 - 1/z)]$, an. Anders verhält sich die Phase in $D = 2$ Dimensionen. In diesem Fall ist der Phasenwinkel $\Phi_{\pm}(T_{vg}) = \pi/2$ und das Verhältnis $\tilde{\Phi} = \infty$. Das Verhältnis steigt demnach in zwei Dimensionen immer mit der Frequenz an und erreicht keinen frequenzunabhängigen Wert.

Auch für den kontinuierlichen Phasenübergang in das Boseglas wird ein analoges Skalenverhalten des nichtlinearen und dynamischen Widerstandes erwartet. Die Relaxationszeit der Boseglas-Fluktuationen wird bestimmt durch die transversalen Auslenkungen, Gl. (2.12),

$$\tau(T) \sim \xi_\perp^z \sim \left|1 - \frac{T}{T_{bg}}\right|^{-\nu_\perp z} \tag{2.33}$$

und dem dynamischen Exponenten z. Der Skalenparameter des Widerstandes ist

$$\rho_0 \sim \frac{\xi_\parallel}{\tau} \sim \left(\frac{T}{T_{bg}} - 1\right)^{\nu_\perp(1/\zeta - z)} \qquad T > T_{bg}\,. \tag{2.34}$$

Bei $T = T_{bg}$ liegt wie am Vortexglas-Übergang ein echtes Potenzgesetz vor:

$$\rho(\omega, T_{bg}) \sim (i\omega\tau_0)^{1-1/(\zeta\cdot z)}\,. \tag{2.35}$$