

**Eine wahrscheinlichkeitstheoretische
Analyse des Mikrogravitationslinseneffekts**

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Physik
der Universität Hamburg

vorgelegt von
Bernd Neindorf
aus Hamburg

Hamburg
2001

Gutachter der Dissertation	Prof. Dr. S. Refsdal Prof. Dr. T. Schramm
Gutachter der Disputation	Prof. Dr. S. Refsdal Prof. Dr. D. Reimers
Datum der Disputation	25.01.2002
Sprecher des Fachbereichs Physik und Vorsitzender des Promotionsausschusses	Prof. Dr. F.-W. Büßer

Zusammenfassung

Es wird ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Verfahren zur Berechnung von Autokorrelationsfunktionen für den Mikrolinseneffekt hergeleitet. Den Ansatz von Deguchi und Watson [10] aufgreifend, wird die Ermittlung einer Autokorrelationsfunktion mittels Holtzmark–Markov Methode auf die numerische Berechnung von \mathcal{R}^2 -Integralen zurückgeführt. Aus gemessenen Lichtkurven von Mehrfachquasaren bestimmte Autokorrelationsfunktionen können dadurch mit Ergebnissen von durchgeführten Modellrechnungen verglichen werden. Auf diese Weise wurden Informationen über einzelne Linsensysteme gewonnen.

Für den Doppelquasar B1600+434 (Koopmans et al. [20]) ergibt der Vergleich der Autokorrelationsfunktionen für Bild A eine Quellgröße von $R = 0.7$ Einsteinradien bei einer effektiven Transversalgeschwindigkeit von 0.50–0.54 Einsteinradien pro Tag. Für Bild B folgt $\kappa_c = 0.84$ –0.86 und eine um 30–80% größere effektive Masse. Der bei diesem Bild um 14% größere Quellradius kann durch Streuverbreiterung erklärt werden, er kann aber auch zum Teil durch Fehler bei der Bestimmung der einzelnen Größen verursacht worden sein. Der Anteil des Radiojets an der Gesamtflußdichte beträgt 5–6%.

Beim Einsteinkreuz QSO 2237+0305 wurde die beste Übereinstimmung für Modelle mit einem Quellradius $R = 0.2$ Einsteinradien erzielt. Die effektive Geschwindigkeit zwischen dem Quasar und dem Schnittpunkt der optischen Achse mit der Quellebene beträgt 2 – $3 \cdot 10^{-3}$ Einsteinradien pro Tag. Genauere Ergebnisse sind möglich, wenn zusätzliche photometrische Messungen vorliegen oder ein höher entwickeltes Verfahren zur Datenanalyse entwickelt wird.

Abstract

A probability theoretical method is presented which enables the calculation of microlensing autocorrelation functions. Following an idea of Deguchi and Watson [10] the Holtzmark–Markov method is employed to reduce this calculation to the evaluation of \mathcal{R}^2 -integrals. Comparing this results with autocorrelation functions calculated from measurements, information about individual lens systems has been obtained.

An analysis of the lightcurves of the double quasar B1600+434 (Koopmans et al. [20]) results in a calculated source radius of $R = 0.7$ einsteinradii and an effective transversal source velocity of 0.50–0.54 einsteinradii per day for the A image. The effective mass ratio lies between 1.3 and 1.8 and at image B the normalized continuum mass density is $\kappa_c = 0.84$ –0.86. There is evidence that the 14% larger source radius at B results from scatter broadening but it cannot be excluded that part of this discrepancy is due to errors with the determination of the microlensing parameters. A radiojet contributes 5–6% to the total flux density.

Comparison of autocorrelation functions from lightcurves of QSO 2237+0305 (the Einstein Cross) with calculated model functions leads to an estimated source radius of $R = 0.2$ einsteinradii at all four images and transversal velocities of 2–3 $\cdot 10^{-3}$ einsteinradii per day. More exact results are possible, if additional photometric data are supplied or a more sophisticated method for data analysis is developed.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Wahrscheinlichkeitstheoretischer Ansatz	4
1.1 Grundlagen der Gravitationslinsentheorie	4
1.1.1 Notation	5
1.1.2 Verstärkte Lichtquelle	9
1.2 Formale Darstellung	10
1.2.1 Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen	10
1.2.2 Wahrscheinlichkeitsdichte für den Ablenkwinkel	12
1.3 Korrelation von Wahrscheinlichkeitsdichten	13
1.3.1 Die Korrelationsfunktion des Ablenk winkels	14
1.3.2 Die Korrelationsfunktion der Verstärkung	18
1.3.3 Eine Wahrscheinlichkeitsdichte für die Intensität	21
2 Auswertung	
von Varianz und Autokorrelationsfunktion	22
2.1 Integrationsverfahren	22
2.1.1 Das Winkelintegral	22
2.1.2 Das Radialintegral	24
2.2 Vergleichsmöglichkeiten	26
2.2.1 Die Verstärkung großer Quellen	26
2.2.2 Numerischer Test	27
2.3 Ergebnisse	29
2.3.1 Varianz als Funktion der Quellgröße	29
2.3.2 Varianz als Funktion der Massendichte	31
2.3.3 Varianz als Funktion des Massenspektrums	31
2.3.4 Autokorrelationsfunktion	36
3 Untersuchung	
des Mikrolinseneffektes bei Quasaren	40
3.1 Statistische Analyse gemessener Lichtkurven	41
3.1.1 Berücksichtigung intrinsischer Variabilität	42
3.1.2 Untersuchung einer idealen Lichtkurve	43
3.2 Der Mikrolinseneffekt beim Einsteinkreuz	45
3.2.1 Beobachtungsdaten und Linsenmodelle	45
3.2.2 Eine vorläufige Lichtkurvenanalyse	59
3.3 Die Radioquelle B1600+434	65
3.3.1 Beobachtungsdaten	67
3.3.2 Ein Mikrolinsenmodell	68
3.3.3 Lichtkurvenanalyse	70
3.4 Die Radioquelle B1608+656	85
Schlußbemerkung und Ausblick	87
Literaturverzeichnis	90

Einleitung

Nachdem jahrzehntlang der Gravitationslinseneffekt nur als theoretisches Konzept existierte¹, eröffnete sich mit der Entdeckung des ersten Doppelquasars QSO 0957+961 A,B durch Walsh et al. [44] die Möglichkeit vorhandene Theorien anhand konkreter Meßergebnisse zu überprüfen. Eine große Massenkonzentration entlang des Lichtweges von einer entfernten Lichtquelle wie z.B. einem Quasar zur Erde kann zu beobachtbaren Doppel- und Mehrfachbildern mit typischen Bildabständen von wenigen Bogensekunden führen. Durch Spektralanalyse dieser Bilder und Identifikation der Linse ist es dann möglich zu unterscheiden, ob ein Gravitationslinsenphänomen vorliegt, oder ob tatsächlich verschiedene Quasare mit einem geringen Winkelabstand beobachtet werden. Durch den Gravitationslinseneffekt erzeugte Mehrfachbilder ermöglichen es einzelne Modelle für die Massenverteilung in der Linsengalaxie anhand ihrer Vorhersage über Anzahl und Positionen der einzelnen Bilder sowie deren Helligkeitsunterschiede zu überprüfen (Schneider et al. 1988 [38], Kayser 1990 [17]). Langfristige photometrische Beobachtungen sind notwendig zur Bestimmung der Laufzeitdifferenzen (time delay) für das Licht der einzelnen Bilder. Intrinsische Variabilität der Lichtquelle zeigt sich durch die unterschiedliche Länge der Lichtwege zeitlich verzögert in den Einzelbildern und mit einer Messung der Laufzeitdifferenz besteht dann die Möglichkeit die Hubble Konstante zu bestimmen (Refsdal 1964 [31]).

Demgegenüber ist der extragalaktische Mikrolinseneffekt, welcher durch die Massen einzelner Sterne hervorgerufen wird, nicht so einfach zu beobachten, da die zu erwartenden Bildabstände von wenigen μ -arcsec optisch nicht auflösbar sind. Chang und Refsdal [6] haben 1979 als erste gezeigt, daß der Gravitationslinseneffekt durch einzelne Sterne zu einer deutlich meßbaren Variabilität einer kompakten extragalaktischen Lichtquelle führen kann. Dadurch wird es möglich, durch Analyse einer gemessenen Lichtkurve Rückschlüsse auf physikalische Parameter des Linsensystemes zu ziehen. Allerdings ist es bei einem einzelnen Quasarbild höchstens durch umfangreiche statistische Analyse oder Identifikation von einzelnen Ereignissen hoher Verstärkung möglich, den Mikrolinseneffekt und intrinsische Helligkeitsänderungen der Quelle zu unterscheiden, solange es keine weltraumgestützte Beobachtungsmöglichkeit in einer Entfernung von einigen astronomischen Einheiten von der Erde gibt, um den von Refsdal [32] beschriebenen Parallaxeneffekt zu nutzen. Nach der ersten Beobachtung von Mehrfachquasaren änderte sich diese Situation, da bei diesen die Lichtwege für die verschiedenen Bilder soweit voneinander entfernt sind, daß einzelne Sterne in der Linsengalaxie jeweils nur den Lichtweg eines Bildes beeinflussen können. Damit kann der Mikrolinseneffekt von der intrinsischen Variabilität der Lichtquelle unterschieden werden, welche in allen Bildern beobachtbar ist, wegen der unterschiedlicher Lichtlaufzeiten allerdings beim Beobachter zu verschiedenen Zeiten sichtbar wird. Trotzdem dauerte es weitere zehn Jahre, bis in dem 1985 von Huchra et al. [14] entdeckten Einsteinkreuz QSO 2237+0305 Helligkeitsänderungen durch den Mikrolinseneffekt von Irwin et al. [15] nachgewiesen werden konnten. Zu diesem Zeitpunkt gab es bereits mehrere Ansätze, künstliche Lichtkurven mittels Simulationsrechnungen zu erzeugen. Paczyński [27]

¹Siehe z.B. Schneider, Ehlers, Falco [39] für einen historischen Überblick

unternahm den Versuch, die Linsengleichung für Punktquellen numerisch zu lösen. Da er für jede Quellposition möglichst alle Bilder suchen mußte, können mit dieser Methode nur Sternfelder mit höchstens tausend Sternen berücksichtigt werden. Mittels Strahlenschießen konnten Kayser, Refsdal und Stabell [18] Lichtkurven für ausgedehnte Quellen erzeugen, ohne die Linsengleichung lösen zu müssen, aber auch dieses Verfahren blieb wegen der begrenzten Rechenzeit auf kleine Sternfelder mit einigen zehntausend Objekten in der Linsenebene beschränkt, konnte aber nach Verbesserungen durch Wambsganß [45] für mehrere hunderttausend Sterne in der Linse eingesetzt werden. Eine direkte Berechnung der Varianz der auf der Erde meßbaren Helligkeit durch Refsdal und Stabell [34] basiert auch auf der Methode des Strahlenschießens, verzichtet aber auf die Erstellung von Lichtkurven, wodurch die Größe des Sternfeldes und damit die Rechenzeit deutlich reduziert werden kann. Von denselben Autoren stammt eine einfache analytische Abschätzung [33], die für große Quellen zu sehr genauen Resultaten führt, wodurch es möglich wird, Ergebnisse, welche aus aufwendigen Rechenverfahren stammen, schnell und direkt zu überprüfen.

Die vorliegende Arbeit greift eine Idee von Deguchi und Watson [10] auf, welche mit einem wahrscheinlichkeitstheoretischen Ansatz die Varianz der von einer Quelle mit gaußischem Helligkeitsprofil ausgesendeten beobachtbaren Strahlung berechnet haben. Dieses Verfahren läßt sich derart verallgemeinern, daß es gelingt Autokorrelationsfunktionen für Lichtkurven direkt zu berechnen, ohne auf eine zur statistischen Analyse ausreichende Anzahl numerisch bestimmter Modelllichtkurven angewiesen zu sein. Mit einem ähnlichen Ansatz ist es Seitz und Schneider [40] sowie Seitz et al. [41] nicht gelungen, korrekte Resultate zu erzielen, obwohl sich viele der von ihnen errechneten Zwischenergebnisse nur sehr geringfügig von den hier vorgestellten Resultaten unterscheiden. Auch die Ergebnisse von Deguchi und Watson [10] können hier nur qualitativ reproduziert werden, was zumindestens teilweise durch die damals wegen zu geringer Computerleistung notwendigen Näherungen für die Berechnung der charakteristischen Funktionen und daraus resultierende Verfälschungen der Resultate erklärt werden kann.

Im folgenden wird nach Definition der verwendeten Größen, zuerst eine Wahrscheinlichkeitsdichte für die Differenz zweier Ablenkwinkel durch ein zufällig verteiltes Sternfeld hergeleitet. Aus einer Integraldarstellung der beim Beobachter auf der Erde gemessenen Intensität einer Gaußquelle werden deren Varianz und die Autokorrelationsfunktion einer Lichtkurve bestimmt. Im zweiten Kapitel wird die numerische Auswertung dieser Gleichungen beschrieben und die Gültigkeitsgrenzen dieses Verfahrens aufgezeigt. Anschließend folgt eine Darstellung der Ergebnisse einiger Beispielrechnungen und deren Vergleich mit Ergebnissen anderer Methoden. Abschließend wird dargestellt, wie physikalisch relevante Größen aus diesen Ergebnissen abgeleitet werden können, und zu welchen Ergebnissen eine Anwendung beim Einsteinkreuz QSO 2237+0305 und bei B1600+434, einem von Koopmans et al. [20] im Radiobereich beobachteten Doppelquasar, führt. Die hier verwendete Notation richtet sich weitestgehend nach dem Buch „Gravitational Lenses“ von Schneider, Ehlers und Falco [39], welches als Standardwerk der Gravitationslinsenforschung auch eine umfangreiche Beschreibung der zugrundeliegenden Theorie und vieler bis zu seinem Erscheinen im Jahr 1992 veröffentlichten Beobachtungsergebnisse enthält.

1 Wahrscheinlichkeitstheoretischer Ansatz

Nur für wenige Modelle von Gravitationslinsen sind analytische Berechnungen der Beobachtungsgrößen möglich. Besteht die Linse aus einzelnen Punktmassen, dann sind die Bildkoordinaten einer Punktquelle die Nullstellen eines Polynoms, dessen Grad mit der Anzahl der Massenpunkte in der Linsenebene ansteigt; die Bildhelligkeiten sind gleich den reziproken Determinanten der Abbildungsgleichung an den einzelnen Bildpunkten. Daher sind explizite Modellrechnungen nur für höchstens zwei Punktmassen und einige einfache stetige Massenverteilungsfunktionen möglich. Andererseits können Mehrfachbilder einer extragalaktischen Lichtquelle nur beobachtet werden, wenn Massen von der Größenordnung einer Galaxie oder eines Galaxienhaufens wirken. Der Einfluß eines einzelnen Sternes macht sich nur durch Helligkeitsschwankungen in einem dieser Bilder bemerkbar, denn die bei kosmologischen Entfernungen auftretenden Bildabstände von wenigen μ -arcsec sind optisch nicht auflösbar. Ausserdem sind Massen und Positionen der einzelnen Sterne in einer Galaxie nicht meßbar und damit bleibt auch die genaue Form und Stärke des Gravitationspotentials unbekannt.

Eine wahrscheinlichkeitstheoretische Methode zur Ermittlung des Gradienten dieses Potentials wurde 1943 von Chandrasekhar [5] vorgestellt. Bei der von ihm benutzten Holtzmark-Markov Methode wird eine Wahrscheinlichkeitsdichte für die wirkende Gravitationskraft durch aufsummieren der Beiträge der einzelnen Sterne ermittelt. Nityananda und Ostriker [25] haben in einer Arbeit von 1984 dieses Verfahren zur Bestimmung des Scherungstermes in der Gravitationslinsengleichung eingesetzt. 1987 haben dann Deguchi und Watson [10] versucht, die Varianz der Flußdichte, die ein Beobachter auf der Erde mißt, nach dem Prinzip der Holtzmark-Markov Methode zu berechnen, ein Ansatz, der auf Grund der vollzogenen Näherungen nur ein qualitativ richtiges Bild bieten konnte.

Die vorliegende Arbeit zeigt, wie für ein gegebenes Mikrolinsenmodell Varianz und Autokorrelationsfunktion für die Intensität eines Makrobildes berechnet werden, so daß durch Vergleich mit gemessenen Daten Größe und effektive Transversalgeschwindigkeit der Quelle ermittelt werden können. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Relativgeschwindigkeit von Lichtquelle, Gravitationslinse und Beobachter so groß ist, daß die Bewegung innerhalb der Linse während der Aufnahme der Lichtkurve vernachlässigt werden kann. Wegen der Äquivalenz von Beobachter- und Quellebene in der Linsengleichung kann dieses Verfahren nach einer einfachen Maßstabsänderung auch bei der Analyse des von Refsdal [32] beschriebenen Parallaxeneffektes eingesetzt werden, wenn von genügend weit voneinander entfernten Positionen aus gleichzeitige Helligkeitsmessungen an einem Quasar durchgeführt werden.

1.1 Grundlagen der Gravitationslinsentheorie

Nach Einführung der verwendeten Bezeichnungen wird im ersten Abschnitt eine Integraldarstellung der Gesamtintensität aller Bilder, die von einer Lichtquelle in der Linsenebene erzeugt werden, beschrieben. Zur Mittelwertbildung wird

das Quadrat der Intensität mit der korrelierten Wahrscheinlichkeitsdichte für zwei Ablenkungswinkel in der Linse multipliziert und zweifach über die Linsenebene integriert. Mittels einer Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichte durch ihre charakteristische Funktion erfolgt eine erste Vereinfachung dieses dann 12-dimensionalen Integralausdrucks.

Im anschließenden Abschnitt folgt eine Herleitung der Wahrscheinlichkeitsdichte für die Differenz der Lichtablenkung an zwei Punkten in der Linsenebene, entsprechend der von Nityananda und Ostriker [25] vorgestellten Vorgehensweise. Dieser Ausdruck läßt sich zwar formal zur Wahrscheinlichkeitsdichte für die korrelierte Lichtablenkung an beliebig vielen Punkten in der Linsenebene verallgemeinern, die numerische Berechnung ist allerdings nur für die Differenz zweier Winkel mit einem angemessenen Rechenaufwand möglich, da sonst die Funktion von zu vielen Parametern abhängt, über deren Wertebereich später mit einem numerischen Verfahren integriert werden muß, was bei der notwendigen Rechengenauigkeit nur mit einem unverhältnismäßig großen Zeitaufwand möglich ist. Zusätzlich wird der Speicherplatzbedarf bei der Tabellierung einer mehrdimensionalen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ebenfalls viel zu groß. Zum Abschluß des Kapitels werden durch sukzessives Auswerten der einzelnen Integrale die Bestimmungsgleichungen für Varianz und Autokorrelationsfunktion der Intensität hergeleitet.

1.1.1 Notation

Die Gravitationslinsentheorie beschreibt die Ablenkung des Lichtes durch das Gravitationsfeld einer Massenkonzentration zwischen einer kosmischen Lichtquelle und einem Beobachter. In einem homogenen und isotropen Modell des Universums, in welchem eine Robertson–Walker Metrik und die Friedmann–Gleichungen gelten, bewirkt die Masse, welche die Linse bildet, eine schwache Störung der Raum–Zeit Geometrie. Eine Beschreibung durch geometrische Optik läßt sich für die Untersuchung an extragalaktischen Lichtquellen wie z.B. Quasaren weiter vereinfachen, da in diesem Fall die räumliche Ausdehnung der Massenverteilung klein ist im Vergleich zu den Abständen vom Beobachter und von der Quelle und es kann eine Näherung für dünne Linsen verwendet werden². In dieser dann dreidimensionalen Geometrie wird die optische Achse als Verbindungsgerade zwischen Beobachter und Zentrum der Linse definiert. In der senkrecht dazu aufgespannten Linsenebene definiert dann

$$\Sigma(x, y) := \int \rho(x, y, z) dz \quad (1.1.1)$$

eine Flächenmassendichte, wobei das Integral über die dreidimensionalen Massendichte zwischen Quelle und Beobachter parallel zur optischen Achse ausgeführt wird.

Abbildung 1 veranschaulicht die Ablenkung des Lichtes einer Quelle S durch eine Punktmasse in der Nähe des Weges zum Beobachter O . Dieser sieht die Quelle nicht unter dem wahren Winkel θ_s zur Masse M , sondern als Bild I unter

²siehe Schneider, Ehlers, Falco [39], für eine ausführliche Herleitung

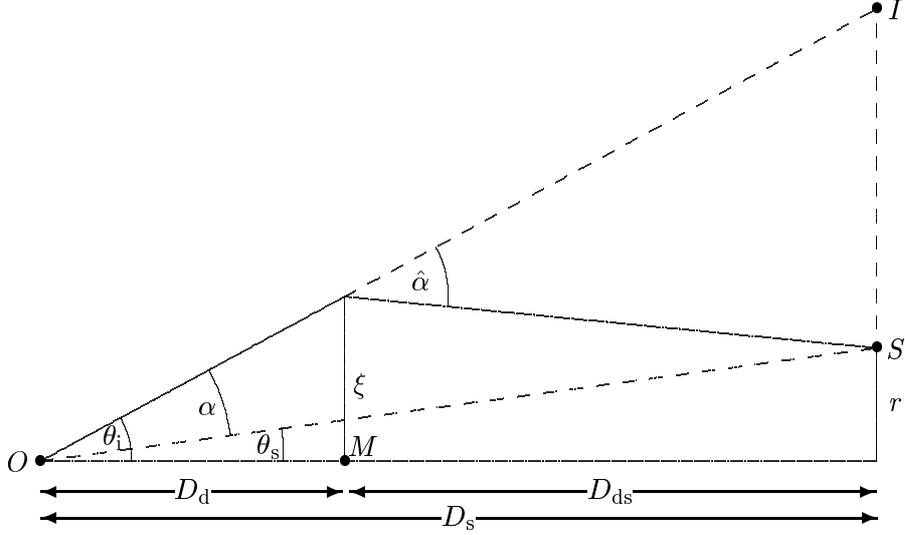


Abbildung 1: Das Gravitationsfeld einer Punktmasse M lenkt einen Lichtstrahl, der die Linsenebene im Abstand ξ trifft, um den Winkel $\hat{\alpha}(\xi)$ ab. Der Beobachter sieht das Bild I um den reduzierten Ablenkwinkel α gegenüber der ihm unbekanntem wahren Quellposition S verschoben.

dem Winkel $\vec{\theta}_i = \vec{\theta}_s + \vec{\alpha}$ zur optischen Achse durch M . Da diese Winkel in der Praxis nur wenige Bogensekunden betragen, gilt in einer Näherung für kleine Winkel α

$$\alpha = \frac{D_{ds}}{D_s} \hat{\alpha}, \quad \text{wobei} \quad \hat{\alpha} := \frac{4GM}{c^2 \xi} \quad (1.1.2)$$

der schon von Einstein angegebene Winkel ist, unter dem ein Lichtstrahl abgelenkt wird, welcher eine Masse M im Abstand ξ passiert. Dabei sind die D_j die, über die Ausdehnung der Objekte definierten Entfernungen (apparent size distances) vom Beobachter zur Linse (D_d), zur Quelle (D_s) und von der Linse zur Quelle (D_{ds}). Annahmen über ein kosmologisches Modell fließen im Zusammenhang mit dem Gravitationslinseneffekt nur in die Berechnung dieser Entfernungsparameter ein. Für $\theta_s = 0$ ist $\theta_i = \alpha$ und wegen $\xi = D_d \theta_i$ folgt

$$\xi^2 = \frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ds} D_d}{D_s}. \quad (1.1.3)$$

Der Beobachter sieht dann einen leuchtenden Ring, den *Einsteinring*, mit dem Winkelhalbmesser $\theta_E = \xi_E / D_d$. Mit dem *Einsteinradius* für die Masse M_0 wird dann durch

$$\xi_E := \sqrt{\frac{4GM_0 D}{c^2}} \quad \text{mit} \quad D := \frac{D_{ds} D_d}{D_s} \quad (1.1.4)$$

eine charakteristische Länge in der Linse eingeführt. Für eine räumlich ausge-

dehnte Masse gilt für den Ablenkwinkel $\vec{\alpha}$ die Superposition

$$\vec{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{4G}{c^2} \iint_{\mathcal{R}^2} \Sigma(\vec{\xi}') \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2} d^2\xi', \quad (1.1.5)$$

wobei $\vec{\xi} := (\xi_x, \xi_y)$ einen Vektor in der Linsenebene bezeichnet. Die zweidimensionale Linsengleichung lautet dann (vgl. Abbildung 1):

$$\vec{\theta}_s = \vec{\theta}_i - \vec{\alpha} \iff \frac{D_d}{D_s} \vec{r} = \vec{\xi} - D\vec{\alpha}(\xi) \quad (1.1.6)$$

und beschreibt mathematisch eine $\mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2$ Abbildung von der Linsen- auf die Quellebene.

Als Normierungskonstante wird die *kritische Flächenmassendichte* $\Sigma_{\text{crit}} := \frac{c^2}{4\pi G D}$ eingeführt, und damit die normierte Flächenmassendichte

$$\kappa(\vec{\xi}) := \frac{\Sigma(\vec{\xi})}{\Sigma_{\text{crit}}} \quad (1.1.7)$$

definiert. Durch eine Scheibe konstanter Flächenmassendichte mit ihrem Zentrum im Nullpunkt des Koordinatensystemes wird das Licht um den Winkel $\vec{\alpha}(\vec{\theta}_i) = \kappa \vec{\theta}_i$ abgelenkt, und für $\kappa = 1 \iff \Sigma = \Sigma_{\text{crit}}$ wird jeder von einer Punktquelle im Ursprung der Quellebene Richtung Linse ausgesendete Lichtstrahl zum Beobachter fokussiert.

Bei der Untersuchung des Mikrolinseneffektes gilt das Interesse dem Anteil an der Gesamtmasse $\kappa_t = \kappa_c + \kappa_s$, welcher in Sternen und anderen kompakten Objekten, wie z.B. Schwarzen Löchern enthalten ist, und im Gegensatz zur Kontinuumsmasse κ_c , die nur in die Bestimmung der Längeneinheit eingeht, explizit in den hergeleiteten Gleichungen berücksichtigt werden soll. Beim Ablenkwinkel $\hat{\alpha}$ führt diese Unterscheidung zur Darstellung

$$\vec{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathcal{R}^2} \kappa_c(\vec{\xi}') \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2} d^2\xi' + \frac{4G}{c^2} \sum_j M_j \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}_j}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}_j|^2}. \quad (1.1.8)$$

Der Einfluß staub- und gasförmiger Materie³ im Deflektor wird durch den linearen Term einer Taylorentwicklung des von ihr bewirkten Ablenkwinkels am Ort des makroskopischen Bildes berücksichtigt, wobei die daraus resultierende Jacobi-Matrix durch eine Drehung des Koordinatensystems diagonalisiert wird, so daß die Linsengleichung die folgende Form annimmt:

$$\frac{D_d}{D_s} \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa_c + \gamma' & 0 \\ 0 & 1 - \kappa_c - \gamma' \end{pmatrix} \vec{\xi} - \xi_E^2 \sum_j \varepsilon_j \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}_j}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}_j|^2}. \quad (1.1.9)$$

Dabei bezeichnet $\varepsilon_j := M_j/M_0$ die, mit M_0 normierte Masse eines einzelnen Sternes und γ' ist der Scherungsterm dieser Abbildung. Eine weitere Vereinfachung folgt mit einer von Paczyński [27] und Kayser, Refsdal und Stabell [18] eingeführten Normierung. Mit

$$\mathbf{J}_0 := \begin{pmatrix} 1 + \gamma & 0 \\ 0 & 1 - \gamma \end{pmatrix}, \quad \kappa = \frac{\kappa_s}{1 - \kappa_c} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{\gamma'}{1 - \kappa_c} \quad (1.1.10)$$

³ einschließlich kontinuierlich verteilter dunkler Materie

und der für die Beschreibung des Mikrolinseneffektes geeigneten Einheitslänge in der Linsenebene

$$z_0 := \sqrt{\frac{M_0}{\pi \Sigma_c |1 - \kappa_c|}} \equiv \frac{\xi_E}{\sqrt{|1 - \kappa_c|}} \quad (1.1.11)$$

folgt die in der Mikrolinsentheorie übliche Darstellung der Linsengleichung:

$$\vec{\zeta} = \mathbf{J}_0 \vec{z} - \text{sgn } \kappa \vec{S}(\vec{z}). \quad (1.1.12)$$

In dieser Notation ist

$$\vec{S}(\vec{z}) = \sum_i \vec{S}_i(\vec{z}) \quad \text{mit} \quad \vec{S}_i(\vec{z}) = \varepsilon_i \frac{\vec{z} - \vec{z}_i}{|\vec{z} - \vec{z}_i|^2}, \quad (1.1.13)$$

so daß $\vec{\xi} = z_0 \vec{z}$ ist, und mit der Längeneinheit in der Quellebene $\zeta_0 := z_0 (1 - \kappa_c) D_s / D_d$ gilt auch die im folgenden häufig verwendete Beziehung $\vec{r} = \zeta_0 \vec{\zeta}$. In der Beobachterebene lautet die Einheitslänge⁴ $\zeta'_0 := \zeta_0 (1 + z_d) D_d / D_{ds}$. Der in der Linsentheorie üblicherweise verwendete Ablenkwinkel am Ort \vec{z} lautet in dieser Notation

$$\vec{\alpha}(\vec{z}) = \frac{\text{sgn } \kappa}{D} z_0 \vec{S}(\vec{z}). \quad (1.1.14)$$

Damit geht der Makrolinseneffekt einschließlich des zugrundeliegenden kosmologischen Modelles nur durch die Scherung γ sowie das Vorzeichen von κ in die Beschreibung des Mikrolinseneffektes durch die Linsengleichung (1.1.12) ein, wobei $\kappa < 0$ (> 0) bei $\kappa_c > 1$ (< 1) Über- bzw. Unterfokussierung bedeutet. Zur Beschreibung des Mikro-Linsen Effektes werden die genauen Positionen der einzelnen Sterne sowie deren Massen benötigt. Diese Größen sind nicht beobachtbar, daher basiert die folgende Untersuchung auf einem Linsenmodell, welches durch zufallsverteilte Punktmassen als Modellparameter beschrieben wird. Die Ortskoordinaten der einzelnen Sterne werden dabei als statistisch unabhängig und gleichverteilt auf der Linsenebene angenommen. Daher werden in dieser Näherung alle Korrelationen zwischen den einzelnen Objekten wie z.B. bei Doppelsternen und Planetensystemen vernachlässigt, wobei diese bei den hier betrachteten kosmologischen Distanzen einen im Vergleich zum Einsteinradius kleinen Abstand haben und deswegen im allgemeinen zu jeweils einer Punktmasse zusammengefaßt werden können. Demgegenüber unterliegt die Verteilungsfunktion für die Größe der einzelnen Massen nur Beschränkungen, die durch die verfügbare Rechenzeit und die angestrebte Genauigkeit hervorgerufen werden. Die Wahrscheinlichkeit für die Existenz von genau N Sternen auf einer Fläche \mathcal{F} kann durch eine Poissonverteilung um den Mittelwert $\langle N(\mathcal{F}) \rangle = n ||\mathcal{F}||$

$$\phi(N, \mathcal{F}) = e^{-\langle N(\mathcal{F}) \rangle} \frac{\langle N(\mathcal{F}) \rangle^N}{N!} \quad (1.1.15)$$

beschrieben werden. Seitz und Schneider [40] haben ihre Rechnungen mit festem N durchgeführt und kommen mit dem Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ zum gleichen Ergebnis (1.3.2, Seite 14) mit (1.3.4), wie dieser Ansatz mit einer Poissonverteilung und $||\mathcal{F}|| \rightarrow \infty$.

⁴siehe auch Kayser, Refsdal, Stabell [18]

1.1.2 Verstärkte Lichtquelle

Die meßbare Flußdichte einer Lichtquelle \mathcal{Q} mit Zentrum bei $\vec{\zeta}_0$ läßt sich durch Faltung der intrinsischen Quellintensität mit der Verstärkung einer Punktquelle darstellen

$$\mathcal{I}(\mathcal{Q}) = \iint_{\mathcal{Q}} A(\vec{\zeta}) I(\vec{\zeta} - \vec{\zeta}_0) d^2\zeta. \quad (1.1.16)$$

Dabei ist die Verstärkung der Punktquelle die Summe der Verstärkungsfaktoren aller Bilder, die in der Linsenebene entstehen,

$$A(\vec{\zeta}) = \sum_j A(\vec{z}_j(\vec{\zeta})) = \iint_{\mathcal{L}} \delta^2 \left(\vec{\zeta} - \mathbf{J}_0 \vec{z} + \text{sgn } \kappa \vec{S}(\vec{z}) \right) d^2z \quad (1.1.17)$$

und die $A(\vec{z}_j)$ sind die Inversen der Determinanten der Linsengleichung (1.1.12) an den Bildpunkten \vec{z}_j .

Die intrinsische Flächenhelligkeit für eine Gaußquelle \mathcal{Q} mit ihrem Mittelpunkt am Ort $\vec{\zeta}_0$ beträgt in dieser Arbeit durchgehend

$$I(\vec{\zeta} - \vec{\zeta}_0) = \frac{I_0}{\pi\Delta} e^{-\frac{(\vec{\zeta}-\vec{\zeta}_0)^2}{\Delta}}. \quad (1.1.18)$$

Damit treten bei späteren Integrationen keine störenden Randterme auf und die Quellgröße $\Delta := R^2$ erzwingt die Konvergenz der auftretenden Integrale. Die gesamte zum Beobachter gelangende Flußdichte beträgt, (o.B.d.A. wird $\vec{\zeta}_0 = 0$ gesetzt,)

$$\iint_{\mathcal{Q}} I(\vec{\zeta}) d^2\zeta \equiv I_0. \quad (1.1.19)$$

Die Fouriertransformierte der Flächenhelligkeit wird ebenfalls benötigt, es gilt:

$$F(\vec{\tau}) := \iint_{\mathcal{R}^2} I(\vec{\zeta}) e^{i\vec{\tau}\vec{\zeta}} d^2\zeta = I_0 e^{-\frac{\Delta}{4}\tau^2}. \quad (1.1.20)$$

Die Änderungen der Verstärkung durch den Mikrolinseneffekt werden durch die unterschiedlichen Transversalbewegungen von Beobachter, Linse und Quelle hervorgerufen. Die entsprechenden Geschwindigkeiten \vec{v}_o , \vec{v}_d und \vec{v}_s sind die Projektionen der zugehörigen dreidimensionalen Geschwindigkeitsvektoren auf eine Ebene senkrecht zur optischen Achse. Kayser, Refsdal und Stabell [18] haben durch Transformation der Vektoren auf die Quellebene und anschließende Transformation der Zeit auf die Beobachterebene für ein flaches Universum hergeleitet wie die Relativbewegung durch eine effektive von einem Beobachter gemessene Geschwindigkeit der Quelle senkrecht zur optischen Achse dargestellt wird:

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}_s}{1+z_s} - \frac{\vec{v}_d}{1+z_d} \frac{D_s}{D_d} + \frac{\vec{v}_o}{1+z_d} \frac{D_{ds}}{D_d}. \quad (1.1.21)$$

Dabei muß für die Geschwindigkeit der Linsengalaxie berücksichtigt werden, daß in \vec{v}_d die Vektorsumme aus Geschwindigkeit des Massenzentrums und einer vorhandenen Relativgeschwindigkeit zum Massenzentrum zu

$$\vec{v}_d = \vec{v}_{\text{CM}} + |1 - \kappa_c| \mathbf{J} \vec{v}_{\text{rel}} \quad (1.1.22)$$

zusammengefaßt sind [18]. Ungeordnete Bewegung einzelner Sterne kann mit diesem Ansatz ebenso wie bei dem im folgenden vorgestellten Rechenverfahren nicht berücksichtigt werden. Mit $\vec{v} \equiv \vec{V} \zeta_0$ wird auch für die Geschwindigkeit die Längeneinheit *Einsteinradius* verwendet.

1.2 Formale Darstellung

Statistische Größen, die aus einer gemessenen Lichtkurve ermittelt werden können, sind Mittelwert und Varianz sowie die höheren Momente der Wahrscheinlichkeitsverteilung der gemessenen Intensität einer Quelle. Mit Autokorrelationsfunktionen läßt sich ausserdem die zeitliche Entwicklung der Lichtkurve analysieren. Der Mittelwert der beim Beobachter auftreffenden Intensität ist zur Beschreibung des Mikrolinseneffektes allerdings nicht geeignet, da er von der Scherung und der Gesamtmasse der Linse abhängt und durch deren Verteilung oder die Quellgröße nicht beeinflusst wird. Die Varianz der Verstärkung und die Autokorrelationsfunktion einer Lichtkurve hängen demgegenüber vom Mikrolinseneffekt ab und bieten den mathematisch einfachsten Zugang zu Informationen über den inneren Aufbau der Linse oder die Quellgröße.

1.2.1 Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen

Eine Korrelationsfunktion der vom Beobachter auf der Erde gemessenen Flußdichte lautet für eine Quelle, an den Positionen $\vec{\zeta}_1, \vec{\zeta}_2$:

$$\text{cor}(\mathcal{I}(\mathcal{Q}_1), \mathcal{I}(\mathcal{Q}_2)) := \frac{\langle \mathcal{I}(\mathcal{Q}_1) \mathcal{I}(\mathcal{Q}_2) \rangle - \langle \mathcal{I}(\mathcal{Q}) \rangle^2}{\langle \mathcal{I}(\mathcal{Q}) \rangle^2}. \quad (1.2.1)$$

Dabei kennzeichnet $\langle \rangle$ den Erwartungswert einer Größe. Bewegt sich die Quelle mit der Geschwindigkeit \vec{V} hinter einer statischen Linse, kann die zeitliche Entwicklung einer Lichtkurve durch $\vec{\zeta}_2 = \vec{\zeta}_1 + \vec{V}t$ beschrieben werden. Für $\vec{\zeta}_2 = \vec{\zeta}_1$ bzw. $t = 0$ ergibt sich dann die Varianz der auf eins normierten Flußdichte

$$\text{Var} \frac{\mathcal{I}(\mathcal{Q})}{\langle \mathcal{I}(\mathcal{Q}) \rangle} := \frac{\langle \mathcal{I}(\mathcal{Q})^2 \rangle - \langle \mathcal{I}(\mathcal{Q}) \rangle^2}{\langle \mathcal{I}(\mathcal{Q}) \rangle^2}. \quad (1.2.2)$$

Für die Autokorrelationsfunktion gilt mit diesen Bezeichnungen

$$\text{ACF}(\mathcal{I}(\mathcal{Q}_1), \mathcal{I}(\mathcal{Q}_2)) := \frac{\text{cor}(\mathcal{I}(\mathcal{Q}_1), \mathcal{I}(\mathcal{Q}_2))}{\text{Var} \frac{\mathcal{I}(\mathcal{Q})}{\langle \mathcal{I}(\mathcal{Q}) \rangle}} =: q(\vec{\zeta}_2 - \vec{\zeta}_1). \quad (1.2.3)$$

Die zweite Schreibweise betont dabei die Abhängigkeit von der relativen Quellposition und beschreibt bei der Untersuchung eines beobachteten Linsensystems in der Form $q(\vec{V}t)$ explizit die Zeitabhängigkeit der Autokorrelationsfunktion eines Linsenmodelles.

Da mit $\kappa_t = \kappa_c + \kappa_s$, $\mathbf{J} := \mathbf{J}_0 - \kappa \mathbf{I}$ und (1.1.10) für die mittlere Verstärkung $\langle A \rangle$ gilt:

$$\langle A \rangle = \frac{1}{(1 - \kappa_t)^2 - \gamma'^2} = \frac{1}{(1 - \kappa_c)^2 [(1 - \kappa)^2 - \gamma^2]} = \frac{1}{(1 - \kappa_c)^2 \det \mathbf{J}}, \quad (1.2.4)$$

folgt

$$\langle \mathcal{I}(\mathcal{Q}) \rangle = \frac{I_0}{(1 - \kappa_c)^2 \det \mathbf{J}} \quad (1.2.5)$$

und damit liegt das eigentliche Problem in der Bestimmung der Erwartungswerte $\langle \mathcal{I}(\mathcal{Q}_1) \mathcal{I}(\mathcal{Q}_2) \rangle$ bzw. $\langle \mathcal{I}(\mathcal{Q})^2 \rangle$. Das Faltungsintegral von der deterministischen ungelinsten Quellintensität und der zufallsabhängigen Verstärkung durch den Linseneffekt kann dann folgendermaßen dargestellt werden:

$$\langle \mathcal{I}(\mathcal{Q}_1) \mathcal{I}(\mathcal{Q}_2) \rangle = \iint_{\mathcal{Q}_1 \times \mathcal{Q}_2} \langle A(\vec{\zeta}_a) A(\vec{\zeta}_b) \rangle I(\vec{\zeta}_a - \vec{\zeta}_1) I(\vec{\zeta}_b - \vec{\zeta}_2) d^2 \zeta_a d^2 \zeta_b \quad (1.2.6)$$

mit der korrelierten mittleren Verstärkung von zwei Punktquellen:

$$\langle A(\vec{\zeta}_1) A(\vec{\zeta}_2) \rangle = \iint_{\mathcal{L}^2 \times \mathcal{R}^4} \phi(\vec{S}_1, \vec{S}_2) \prod_{j=1}^2 \delta^2(\vec{\zeta}_j - \mathbf{J}_0 \vec{z}_j + \text{sgn } \kappa \vec{S}_j) d^2 \vec{S}_j d^2 z_j. \quad (1.2.7)$$

Dabei sei $\vec{S}_j := \vec{S}(\vec{z}_j)$ und $\phi(\vec{S}_1, \vec{S}_2)$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeitsdichte für die – korrelierten – Ablenkungswinkel an zwei Punkten in der Linsenebene. Die Berechnung des mittleren Intensitätsquadrates $\langle \mathcal{I}(\mathcal{Q})^2 \rangle$ erfolgt dann mit $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_2$ bzw. mit $\vec{\zeta}_1 = \vec{\zeta}_2$. Mit der Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichte für die Lichtablenkung durch ihre charakteristische Funktion lassen sich die δ -Funktionen durch Integration über die \vec{S}_j , $j = 1, 2$ auswerten.

$$\langle A(\vec{\zeta}_1) A(\vec{\zeta}_2) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \iint_{\mathcal{L}^2 \times \mathcal{R}^4} Q_2(\vec{\tau}_1, \vec{z}_1, \vec{\tau}_2, \vec{z}_2) \prod_{j=1}^2 e^{i \text{sgn } \kappa \vec{\tau}_j (\vec{\zeta}_j - \mathbf{J}_0 \vec{z}_j)} d^2 \tau_j d^2 z_j. \quad (1.2.8)$$

Dabei ist

$$Q_2(\vec{\tau}_1, \vec{z}_1, \vec{\tau}_2, \vec{z}_2) := \iint_{\mathcal{R}^4} \phi(\vec{S}_1, \vec{S}_2) e^{i (\vec{\tau}_1 \vec{S}_1 + \vec{\tau}_2 \vec{S}_1)} d^2 \vec{S}_1 d^2 \vec{S}_2. \quad (1.2.9)$$

Die Faltung von Quellintensität und mittlerer Verstärkung entspricht daher einer Fouriertransformation der Quelle, so daß weiter folgt

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{I}(\mathcal{Q}_1) \mathcal{I}(\mathcal{Q}_2) \rangle &= \frac{I_0^2}{(2\pi)^4} \iint_{\mathcal{L}^2 \times \mathcal{R}^4} Q_2(\vec{\tau}_1, \vec{z}_1, \vec{\tau}_2, \vec{z}_2) \prod_{j=1}^2 e^{i \text{sgn } \kappa \vec{\tau}_j (\vec{\zeta}_j - \mathbf{J}_0 \vec{z}_j)} \\ &\quad \times e^{-\frac{\Delta}{4} \tau_j^2} d^2 \tau_j d^2 z_j. \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

Bevor diese Gleichung weiter vereinfacht werden kann, wird eine Darstellung für die charakteristische Funktion $Q_2(\vec{\tau}_1, \vec{z}_1, \vec{\tau}_2, \vec{z}_2)$ benötigt, welche im folgenden Abschnitt hergeleitet wird. Dabei wird deutlich, daß nach einer Transformation auf Schwerpunkts- und Relativkoordinaten im Orts- und im Fourierraum, die Integration über die Schwerpunktskoordinaten problemlos ausgeführt werden kann. Aus einer anschließenden inversen Fouriertransformation folgt dann ein zweidimensionales Integral, welches mit einem numerischen Verfahren ausgewertet werden muß.

1.2.2 Wahrscheinlichkeitsdichte für den Ablenkwinkel

Die in diesem Abschnitt vorgestellte Holtzmark-Markow Methode zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsdichte des Ablenkwinkels, $\phi(\vec{S}_1, \vec{S}_2)$ wurde von Chandrasekhar [5] bereits 1943 zur Bestimmung der Gravitationskraft in einem statistisch definierten Sternfeld eingesetzt. Nityananda und Ostriker [25] haben mit diesem Verfahren die Fouriertransformierte der Wahrscheinlichkeitsdichte der Scherung bestimmt. Die Vorgehensweise basiert darauf, daß die Wahrscheinlichkeitsdichte einer Summe von N statistisch unabhängigen Zufallsvariablen durch ein $(N - 1)$ -faches Faltungsintegral ausgedrückt wird. Diese Darstellung hat allerdings den Nachteil, daß jedes einzelne Integral einen anderen Integrationsbereich umfaßt und deren explizite Angabe zu umfangreichen und unübersichtlichen Ausdrücken führt. Aus der hier verwendeten Notation folgt diese Schreibweise durch Auswerten des N -ten Integrales und der δ -Funktion. Durch Fouriertransformation entsteht ein Produkt von charakteristischen Funktionen der Wahrscheinlichkeitsdichten der einzelnen Zufallsvariablen. Da diese Funktionen auf Grund der statistischen Unabhängigkeit identisch sind, kann durch inverse Fouriertransformation dann die Wahrscheinlichkeitsdichte der Summe ermittelt werden.

Für zwei Ablenkwinkel die Sterne auf einer Fläche \mathcal{L} an den Punkten \vec{z}_1 und \vec{z}_2 verursachen, läßt sich die Wahrscheinlichkeitsdichte folgendermaßen darstellen:

$$\phi(\vec{S}_1, \vec{S}_2) = \sum_{N=0}^{\infty} \phi(N, \mathcal{L}) \phi_N(\vec{S}_1, \vec{S}_2), \quad (1.2.11)$$

mit der bedingten Wahrscheinlichkeitsdichte $\phi_N(\vec{S}_1, \vec{S}_2)$ bei fester Sternzahl N in der Linse \mathcal{L}

$$\phi_N(\vec{S}_1, \vec{S}_2) = \iint_{\mathcal{L}^{2N}} \delta^2(\vec{S}_1 - \sum_{i=1}^N \vec{S}_{1i}) \delta^2(\vec{S}_2 - \sum_{i=1}^N \vec{S}_{2i}) \prod_{i=1}^N \phi(\vec{S}_{1i}, \vec{S}_{2i}) d^2 S_{1i} d^2 S_{2i}, \quad (1.2.12)$$

und der Wahrscheinlichkeitsdichte $\phi(N, \mathcal{L})$ (vgl. 1.1.15) für die Zahl der Sterne auf der Linsenfläche. Dabei bezeichnen die $\vec{S}_{ji} \equiv \vec{S}_i(\vec{z}_j)$ den Beitrag des i -ten Sternes zum Ablenkwinkel an der Stelle \vec{z}_j .

Durch die Verwendung von statistisch unabhängigen Sternkoordinaten werden alle Korrelationen zwischen einzelnen Massen vernachlässigt und die Wahrscheinlichkeitsdichten für die Lichtablenkung durch einen einzelnen Stern voneinander unabhängig. Wenn für die Ortskoordinaten eines Sternes als Zufallsvariable eine Gleichverteilung in der Ebene gilt, lautet deren Wahrscheinlichkeitsdichte in einer Linse mit der Fläche $||\mathcal{L}||$

$$\phi(\vec{z}_i) = \frac{1}{||\mathcal{L}||}, \quad (1.2.13)$$

so daß für die Lichtablenkung durch einen einzelnen Stern folgt⁵:

$$\phi(\vec{S}_{1i}, \vec{S}_{2i}) = \int_0^\infty \iint_{\mathcal{R}^2} \delta^2(\vec{S}_{1i} - \varepsilon_i \frac{\vec{z}_1 - \vec{z}_i}{|\vec{z}_1 - \vec{z}_i|^2}) \delta^2(\vec{S}_{2i} - \varepsilon_i \frac{\vec{z}_2 - \vec{z}_i}{|\vec{z}_2 - \vec{z}_i|^2}) \frac{d^2 z_i}{\|\mathcal{L}\|} \phi(\varepsilon_i) d\varepsilon_i. \quad (1.2.14)$$

Das Faltungsintegral (1.2.12) zerfällt mit diesem Ansatz durch Fourier-Transformation der bedingten Wahrscheinlichkeitsdichte $\phi_N(\vec{S}_1, \vec{S}_2)$ in ein N-faches Produkt identischer Integrale, und mit der charakteristischen Funktion für die Lichtablenkung durch einen einzelnen Stern

$$\begin{aligned} p(\vec{\tau}_1, \vec{z}_1, \vec{\tau}_2, \vec{z}_2) &:= \iint_{\mathcal{R}^4} \phi(\vec{S}_{1i}, \vec{S}_{2i}) e^{i(\vec{\tau}_1 \vec{S}_{1i} + \vec{\tau}_2 \vec{S}_{2i})} d^2 \vec{S}_{1i} d^2 \vec{S}_{2i} \\ &= \int_0^\infty \iint_{\mathcal{R}^2} e^{i\varepsilon(\vec{\tau}_1 \frac{\vec{z}_1 - \vec{z}}{|\vec{z}_1 - \vec{z}|^2} + \vec{\tau}_2 \frac{\vec{z}_2 - \vec{z}}{|\vec{z}_2 - \vec{z}|^2})} \frac{d^2 z}{\|\mathcal{L}\|} \phi(\varepsilon) d\varepsilon, \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

folgt dann

$$\iint_{\mathcal{R}^4} \phi_N(\vec{S}_1, \vec{S}_2) e^{i(\vec{\tau}_1 \vec{S}_1 + \vec{\tau}_2 \vec{S}_2)} d^2 \vec{S}_1 d^2 \vec{S}_2 = p^N(\vec{\tau}_1, \vec{z}_1, \vec{\tau}_2, \vec{z}_2). \quad (1.2.16)$$

Damit läßt sich die Summe in der Poisson-Verteilung jetzt ausführen, so daß für (1.2.9) gilt:

$$\begin{aligned} Q_2(\vec{\tau}_1, \vec{z}_1, \vec{\tau}_2, \vec{z}_2) &= \sum_{N=0}^{\infty} \phi(N, \mathcal{L}) p^N(\vec{\tau}_1, \vec{z}_1, \vec{\tau}_2, \vec{z}_2) \\ &= e^{\langle N(\mathcal{F}) \rangle [p(\vec{\tau}_1, \vec{z}_1, \vec{\tau}_2, \vec{z}_2) - 1]}. \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

Mit der mittleren Sternzahldichte in der Linsenebene

$$n := \frac{\langle N(\mathcal{L}) \rangle}{\|\mathcal{L}\|} \equiv \frac{|\kappa|}{\pi \langle \varepsilon_i \rangle}, \quad (1.2.18)$$

lautet das Ergebnis dieser Berechnung

$$Q_2(\vec{\tau}_1, \vec{z}_1, \vec{\tau}_2, \vec{z}_2) = e^{n \int_0^\infty \iint_{\mathcal{L}} \left[e^{i\varepsilon(\vec{\tau}_1 \frac{\vec{z}_1 - \vec{z}}{|\vec{z}_1 - \vec{z}|^2} + \vec{\tau}_2 \frac{\vec{z}_2 - \vec{z}}{|\vec{z}_2 - \vec{z}|^2})} - 1 \right] d^2 z \phi(\varepsilon) d\varepsilon}. \quad (1.2.19)$$

1.3 Korrelation von Wahrscheinlichkeitsdichten

Um den Erwartungswert für das Quadrat der Verstärkung (1.2.8) berechnen zu können, muß zuerst die charakteristische Funktion für die Wahrscheinlichkeitsdichte der korrelierten Ablenkungswinkel (1.2.9) bzw. (1.2.19) bekannt sein. Die

⁵Um die Eigenbewegung der Sterne einzubeziehen, müßte in der zweiten δ -Funktion \vec{z}_i durch $\vec{z}_i + \vec{v}_i t$ ersetzt, und über die Geschwindigkeit \vec{v}_i gemittelt werden, wodurch die Korrelationsfunktion zeitabhängig werden würde und für jedes t neu berechnet werden müßte. Das würde jeweils einige Mbyte Speicherplatz und einige Wochen an CPU-Zeit erfordern und ist damit völlig unrealistisch

Form dieser Funktion führt in (1.2.8) zu Vereinfachungen, so daß nur die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Differenz zweier Winkel explizit berechnet werden muß. In der folgenden Herleitung wird das Problem jeweils auf den benötigten Spezialfall reduziert, um die Darstellung übersichtlich zu halten. Die korrelierte Wahrscheinlichkeitsdichte der Lichtablenkung an mehreren Punkten in der Linsenebene kann entsprechend (1.2.9, 1.2.15) hergeleitet werden, in dieser Arbeit wird nur die Korrelation an zwei Punkten verwendet, da nur für diesen Fall die numerischen Rechnungen mit ausreichender Präzision in einem realistischen Zeitrahmen durchgeführt werden können.

1.3.1 Die Korrelationsfunktion des Ablenkungswinkels

Ausgehend von

$$\phi(\vec{S}(\vec{z}_1), \vec{S}(\vec{z}_2)) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iint_{\mathcal{R}^4} Q_2(\vec{\tau}_1, \vec{z}_1, \vec{\tau}_2, \vec{z}_2) e^{i(\vec{\tau}_1 \vec{S}(\vec{z}_1) + \vec{\tau}_2 \vec{S}(\vec{z}_2))} d^2\tau_1 d^2\tau_2, \quad (1.3.1)$$

mit

$$\ln Q_2(\vec{\tau}_1, \vec{z}_1, \vec{\tau}_2, \vec{z}_2) = n \int_0^\infty \iint_{\mathcal{L}} \left[e^{i\varepsilon(\vec{\tau}_1 \frac{\vec{z}_1 - \vec{z}}{|\vec{z}_1 - \vec{z}|^2} + \vec{\tau}_2 \frac{\vec{z}_2 - \vec{z}}{|\vec{z}_2 - \vec{z}|^2})} - 1 \right] d^2z \phi(\varepsilon) d\varepsilon \quad (1.3.2)$$

und den Schwerpunkt- und Relativkoordinaten

$$\vec{T} := \frac{\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2}{2}, \quad \vec{t} := \vec{\tau}_2 - \vec{\tau}_1; \quad \vec{R} := \frac{\vec{z}_1 + \vec{z}_2}{2}, \quad \vec{\rho} := \vec{z}_2 - \vec{z}_1 \quad (1.3.3)$$

folgt im Grenzfall einer unendlich großen Linse,

$$Q_2(\vec{T} - \frac{\vec{t}}{2}, \vec{R} - \frac{\vec{\rho}}{2}, \vec{T} + \frac{\vec{t}}{2}, \vec{R} + \frac{\vec{\rho}}{2}) = Q_2(\vec{T} - \frac{\vec{t}}{2}, -\frac{\vec{\rho}}{2}, \vec{T} + \frac{\vec{t}}{2}, \frac{\vec{\rho}}{2}) e^{2in\pi\langle\varepsilon\rangle\vec{T}\vec{R}}, \quad (1.3.4)$$

da in dieser Näherung alle Beiträge höherer Ordnung in \vec{R} und damit alle Einflüsse des Linsenrandes verschwinden. Diese Transformation führt dazu, daß bei der Berechnung des Erwartungswertes des Quadrates der Verstärkung ein Faktor $\delta(\vec{T})$ auftritt, so daß tatsächlich nur die Funktion

$$Q(\vec{t}, \vec{\rho}) := Q_2(-\frac{\vec{t}}{2}, -\frac{\vec{\rho}}{2}, \frac{\vec{t}}{2}, \frac{\vec{\rho}}{2}) \quad (1.3.5)$$

explizit berechnet werden muß, und es möglich wird, das Flächenintegral in (1.3.2) auf ein eindimensionales numerisch zu berechnendes Integral zu reduzieren.

Mit einem Vektor \vec{r} , dessen x-Komponente gleich der Summe im Exponenten ist, läßt sich die folgende Transformation durchführen:

$$\vec{r}(\vec{z}) := \sum_{j=1}^{\nu} \begin{pmatrix} \tau_{jx} & \tau_{jy} \\ \tau_{jy} & -\tau_{jx} \end{pmatrix} \frac{\vec{z}_j - \vec{z}}{|\vec{z}_j - \vec{z}|^2}. \quad (1.3.6)$$

Die Jacobi-Matrix dieser Transformation lautet

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{z}} = \sum_{j=1}^{\nu} \begin{pmatrix} \tau_{jx} & \tau_{jy} \\ \tau_{jy} & -\tau_{jx} \end{pmatrix} \frac{\begin{pmatrix} (x_j - x)^2 - (y_j - y)^2 & 2(x_j - x)(y_j - y) \\ 2(x_j - x)(y_j - y) & (y_j - y)^2 - (x_j - x)^2 \end{pmatrix}}{|\vec{z}_j - \vec{z}|^4}. \quad (1.3.7)$$

Nach einer Transformation in die komplexe Zahlenebene mit $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow u + iv$ folgen die übersichtlicheren Darstellungen

$$r(z) = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\tau_j}{z_j - z} \quad (1.3.8)$$

und die Determinante der Jacobi-Matrix

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{z}} \right| = \left| \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\tau_j}{(z_j - z)^2} \right|^2. \quad (1.3.9)$$

Mit $\nu = 2$ ergibt sich $z(r)$ als Lösung einer quadratischen Gleichung (in komplexer Notation!).

$$r(z) = \frac{T + \frac{t}{2}}{R - z + \frac{\rho}{2}} + \frac{T - \frac{t}{2}}{R - z - \frac{\rho}{2}} = \frac{2T(R - z) - \frac{t\rho}{2}}{(R - z)^2 - \left(\frac{\rho}{2}\right)^2}, \quad (1.3.10)$$

und damit

$$R - z(r) = \frac{T}{r} \pm \sqrt{\left(\frac{T}{r}\right)^2 - \frac{t\rho}{2r} + \left(\frac{\rho}{2}\right)^2}. \quad (1.3.11)$$

Mit $\vec{R} = 0$ und $\vec{T} = 0$ folgt

$$z(r) = \pm \frac{\rho}{2\sqrt{r}} \sqrt{r - 2s}, \quad (1.3.12)$$

für $s := \frac{t}{\rho}$. Damit ist dann in reeller Vektordarstellung

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{z}} \right|_{\vec{T}=0} = \frac{4r^3}{t^2} |\vec{r} - 2\vec{s}|, \quad (1.3.13)$$

mit

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} t_x & t_y \\ t_y & -t_x \end{pmatrix} \frac{\vec{\rho}}{|\vec{\rho}|^2}. \quad (1.3.14)$$

Da die Umkehrabbildung $z = z(r)$ nur für die Einschränkung von z auf eine Halbebene eindeutig definiert ist, gilt damit

$$\begin{aligned} \ln Q(\vec{t}, \vec{\rho}) &= 2n \int_0^\infty \iint_{\mathcal{R}^2} \left[e^{i\varepsilon x} - 1 \right] \frac{t^2 d^2 r}{4r^3 |\vec{r} - 2\vec{s}|} \phi(\varepsilon) d\varepsilon \\ &= -\frac{n}{2} \rho^2 a(\vec{s}) \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

mit

$$a(\vec{s}) = \int_0^\infty \alpha(\varepsilon, \vec{s}) \phi(\varepsilon) d\varepsilon \quad (1.3.16)$$

und

$$\alpha(\varepsilon, \vec{s}) = s^2 \iint_{\mathcal{L}} \frac{1 - e^{i\varepsilon x}}{r^3} \frac{d^2 r}{|\vec{r} - 2\vec{s}|}. \quad (1.3.17)$$

Mit dem Einheitsvektor

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \frac{\vec{s}}{s} \quad (1.3.18)$$

erfolgt dann in kartesischen Koordinaten eine Trennung der Integrationsvariablen mit

$$\alpha(\varepsilon, \vec{s}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{i\varepsilon s x}}{x^2} f(x, u, v) dx \quad (1.3.19)$$

und

$$f(x, u, v) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dy}{r^3 \sqrt{(x - 2u)^2 + (y - 2v)^2}}. \quad (1.3.20)$$

Nach dieser Variablentrennung läßt sich das Integral in eine Summe von vollständigen elliptischen Integralen transformieren, denn mit $\cos(\phi + \frac{\pi}{2}) := \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

folgt weiter

$$y = \left| \frac{x}{\sin(\phi + \frac{\pi}{2})} \right| \cos(\phi + \frac{\pi}{2}) \equiv - \left| \frac{x}{\cos \phi} \right| \sin \phi, \quad (1.3.21)$$

$$\frac{x^2}{r^3} dy = - \sin(\phi + \frac{\pi}{2}) d\phi \equiv - \cos \phi d\phi \quad (1.3.22)$$

und da $\cos \phi$ für $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ nicht negativ wird,

$$f(x, u, v) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \phi d\phi}{\sqrt{(x - 2u)^2 \cos^2 \phi + (|x| \sin \phi + 2v \cos \phi)^2}}. \quad (1.3.23)$$

Mit der Forderung, daß der Nenner dieses Ausdruckes gleich $\sqrt{a - b \sin^2(\phi + \frac{\alpha}{2})}$ sein soll, entsteht daraus eine Summe von elliptischen Integralen mit dem Modul $m^2 := \frac{b}{a}$

$$(x - 2u)^2 \cos^2 \phi + (|x| \sin \phi + 2v \cos \phi)^2 = x^2 + 2(1 - ux)(1 + \cos 2\phi) + 2v|x| \sin 2\phi \quad (1.3.24)$$

$$a - b \sin^2(\phi + \frac{\alpha}{2}) = a - \frac{b}{2}(1 + \sin \alpha \sin 2\phi - \cos \alpha \cos 2\phi) \quad (1.3.25)$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt

$$a = \frac{b}{2} + x^2 - 2ux + 2, \quad \frac{b}{2} \cos \alpha = 2(1 - ux) \quad \text{und} \quad \frac{b}{2} \sin \alpha = -2v|x|. \quad (1.3.26)$$

Aus der zweiten und der dritten Gleichung resultiert weiterhin

$$b^2 = 16(1 - 2ux + x^2) \implies b = 4\sqrt{(1 - 2ux + x^2)} =: 4k. \quad (1.3.27)$$

Das letzte Gleichheitszeichen folgt, da $m^2 = \frac{b}{a} > 0$ nur mit $b > 0$ für alle x, u gelten kann. Damit ergibt sich dann weiter

$$a = (1 + k)^2 \quad \cos \alpha = \frac{1 - ux}{k}, \quad (1.3.28)$$

so daß gilt:

$$m^2 := \frac{b}{a} = \frac{4k}{(1+k)^2} \implies m = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}. \quad (1.3.29)$$

Aus den Formeln in Kapitel 8.1 bei Gradshteyn, Ryzhik [50] ergeben sich dann die folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned} f(x, u, v) &= \frac{1}{1+k} \int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\alpha+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(\phi - \frac{\alpha}{2}) d\phi}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \phi}} \\ &= \frac{1}{2(1+k)} \left[F(\phi, m) + \frac{\cos \alpha}{m^2} (2E(\phi, m) + (m^2 - 2)F(\phi, m)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin \alpha}{m^2} \sqrt{1-m^2 \sin^2 \phi} \right]_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\alpha+\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{k}} \left[m\mathbf{F}(m)(1 + \cos \alpha) + \frac{2}{m} \cos \alpha (\mathbf{E}(m) - \mathbf{F}(m)) \right] \\ &= \begin{cases} \mathbf{F}(k) + \frac{\mathbf{E}(k) - \mathbf{F}(k)}{k} \cos \alpha & k < 1 \\ \frac{1}{k} \mathbf{F}(\frac{1}{k}) + [\mathbf{E}(\frac{1}{k}) - \mathbf{F}(\frac{1}{k})] \cos \alpha & k > 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.3.30)$$

Da $k < 1$ für $0 < x < 2u$ sowie $2u < x < 0$ gilt, folgt damit für $\alpha(\varepsilon, \vec{s})$:

$$\begin{aligned} \alpha(\varepsilon, \vec{s}) &= \int_{\min(0, 2u)}^{\max(0, 2u)} \frac{1 - e^{i\varepsilon s x}}{x^2} \left[\mathbf{F}(k) + \frac{1 - ux}{k^2} [\mathbf{E}(k) - \mathbf{F}(k)] \right] dx \\ &\quad + \left(\int_{-\infty}^{\min(0, 2u)} + \int_{\max(0, 2u)}^{\infty} \right) \frac{1 - e^{i\varepsilon s x}}{x^2} \left[\frac{1}{k} \mathbf{F}(\frac{1}{k}) + \frac{1 - ux}{k} [\mathbf{E}(\frac{1}{k}) - \mathbf{F}(\frac{1}{k})] \right] dx. \end{aligned} \quad (1.3.31)$$

Für $u \rightarrow -u$ gilt $\alpha(\varepsilon, \vec{s}) = \alpha^*(\varepsilon, \vec{s})$, daher genügt es, die Funktion für positive u zu betrachten. Mit $z := \varepsilon s$ und $\kappa := (x^2 + 2ux + 1)^{-1/2}$ ist

$$\begin{aligned} \alpha(\vec{z}) := \alpha(\varepsilon, \vec{s}) &= \int_0^{2u} \frac{1 - e^{izx}}{x^2} \left[\mathbf{E}(k) + \frac{ux - x^2}{k^2} [\mathbf{E}(k) - \mathbf{F}(k)] \right] dx \\ &\quad + \int_{2u}^{\infty} \frac{1 - e^{izx}}{x^2} \left[\frac{1}{k} \mathbf{E}(\frac{1}{k}) - \frac{ux}{k} [\mathbf{E}(\frac{1}{k}) - \mathbf{F}(\frac{1}{k})] \right] dx \\ &\quad + \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-izx}}{x^2} \kappa [\mathbf{E}(\kappa) + ux [\mathbf{E}(\kappa) - \mathbf{F}(\kappa)]] dx. \end{aligned} \quad (1.3.32)$$

Durch Addition der Integranden werden die Pole bei $x = 0$ ebenso wie diejenigen bei $x = 2u$ zu logarithmischen Singularitäten, so daß das Gesamtintegral konvergent ist. Bei der numerischen Auswertung muß dann eine Umgebung dieser Pole ausgespart werden und nach geeigneter Darstellung der elliptischen Integrale \mathbf{E} und \mathbf{F} durch eine Näherung ersetzt werden. Eine Romberg-Integration auf der Basis der zusammengesetzten Trapezregel konvergiert für

$10^{-5} \leq z \leq 165$ gegen eine stetige Funktion $\alpha(\vec{z})$. Nur wenn $u \approx 0$ ist, muß für $z \leq 10^{-3}$ aus vorliegenden Ergebnissen eine Näherungslösung extrapoliert werden. Um eine relative Genauigkeit $\frac{\delta\alpha}{\alpha} < 10^{-5}$ zu erzielen, genügt es, die Funktionswerte für $z < 10^{-5}$ und $z > 165$ den folgenden Näherungslösungen zu entnehmen:

$$\alpha(\vec{z}) \xrightarrow{z \rightarrow 0} \alpha_0(\vec{z}) := \pi z^2 (0.75 + 0.6 \cos^2 \chi - 0.5 \ln z) - i\pi z \cos \chi \quad (1.3.33)$$

und

$$\alpha(\vec{z}) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \pi z - i\pi \left(\frac{0.5z \cos \chi}{\sqrt{1+z^2}} + 0.25 \frac{\sin(2z \cos \chi)}{z} + 0.75 \frac{\cos(2z \cos \chi)}{z^2} \right). \quad (1.3.34)$$

Allerdings wird der relative Fehler für kleine z nur durch die Qualität der Approximation von $\Im m a$ bestimmt, solange $u > 10^{-2}$ ist. Für kleinere u dominiert der Fehler in $\Re e a$, der bis zu 0.5% betragen kann. Während sich die von Seitz und Schneider [40] veröffentlichten Ergebnisse für $z > 50$ von den hier angegebenen Werten um etwas weniger als ein Prozent unterscheiden, stimmen die Imaginärteile der Funktionen für $z < 10^{-3}$ überein. Nur im Realteil sind die Werte von Seitz und Schneider bis zu 4.2% kleiner als in (1.3.33). Bei einer ersten Testrechnung war nur ein zu vernachlässigender Einfluß dieser Diskrepanz auf das Endergebnis feststellbar, was daraufhin deutet, daß die Genauigkeit von $\Re e a(\vec{z})$, für kleine z nicht kritisch für die Bestimmung von $\langle \mathcal{I}(\mathcal{Q}_1) \mathcal{I}(\mathcal{Q}_2) \rangle$ ist.

Da die Funktion $a(\vec{s})$ die Grundlage jeder weiteren Modellrechnung für den Mikrolinseneffekt bildet, lohnt sich die Speicherung der numerischen Ergebnisse in einer Interpolationstabelle für spätere Rechnungen. Das Integral (1.3.15) kann dann als gewichtete Summe

$$a(\vec{s}) := \sum_i \frac{n_i}{n} \alpha(\varepsilon_i, \vec{s}) \quad (1.3.35)$$

dargestellt werden. Dabei bezeichnen die n_i die Anzahl der Sterne der Masse ε_i und $n := \sum_i n_i$ die Gesamtzahl der Sterne in der Linsenebene. Wenn das Massenspektrum durch eine stetige Verteilungsfunktion modelliert wird, sind die n_i identisch mit den durch das Integrationsverfahren bestimmten Gewichten für die einzelnen Funktionswerte. Der zur Auswertung von (1.3.32) notwendige Rechenaufwand übersteigt jeden Nutzen, der aus einer Einbeziehung des Massenspektrums vor der numerischen Rechnung gezogen werden kann.

1.3.2 Die Korrelationsfunktion der Verstärkung

Mit den in den vorhergehenden Abschnitten gewonnenen Resultaten ist es jetzt möglich, den in (1.2.10) formulierten Ausdruck für den Erwartungswert des Intensitätsquadrates weiter auszuwerten. Neben der Elimination der Schwerpunktkoordinaten ermöglicht insbesondere die hergeleitete Struktur der Korrelationsfunktion für die Lichtablenkung eine durchgreifende Vereinfachung dieser Gleichung.

Aus

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{I}(\mathcal{Q}_1)\mathcal{I}(\mathcal{Q}_2) \rangle &= \frac{I_0^2}{(2\pi)^4} \iint_{\mathcal{R}^4 \times \mathcal{L}^2} Q_2(\vec{\tau}_1, \vec{z}_1, \vec{\tau}_2, \vec{z}_2) \prod_{j=1}^2 e^{i \operatorname{sgn} \kappa (\vec{\tau}_j (\vec{\zeta}_j - \mathbf{J}_0 \vec{z}_j))} \\ &\quad \times e^{-\frac{\Delta}{4} \tau_j^2} d^2 \tau_j d^2 z_j \end{aligned} \quad (1.3.36)$$

folgt nach Transformation auf Schwerpunkt- und Relativkoordinaten (siehe Gleichung 1.3.3) für

$$\vec{\zeta} := \vec{\zeta}_2 - \vec{\zeta}_1 \quad \text{und} \quad \mathbf{J} := \mathbf{J}_0 - \kappa \mathbf{I} \quad (1.3.37)$$

sowie mit (1.3.4) bei einer unbegrenzten Linse:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{I}(\mathcal{Q}_1)\mathcal{I}(\mathcal{Q}_2) \rangle &= \frac{I_0^2}{(2\pi)^4} \iint_{\mathcal{R}^8} Q_2\left(\vec{T} - \frac{\vec{t}}{2}, -\frac{\vec{\rho}}{2}, \vec{T} + \frac{\vec{t}}{2}, \frac{\vec{\rho}}{2}\right) e^{i \operatorname{sgn} \kappa \vec{T} (\vec{\zeta}_1 + \vec{\zeta}_2 - 2\mathbf{J}\vec{R})} \\ &\quad \times e^{\frac{i}{2} \operatorname{sgn} \kappa \vec{t}^T (\vec{\zeta} - \mathbf{J}_0 \vec{\rho}) - \frac{\Delta}{4} (2T^2 + t^2/2)} d^2 T d^2 t d^2 R d^2 \rho. \end{aligned} \quad (1.3.38)$$

Da die Integration über $d^2 R$ den Faktor $(2\pi)^2 \delta^2(2\mathbf{J}\vec{T})$ ergibt, läßt sich anschließend sofort die Integration über $d^2 T$ ausführen und mit (1.3.5) gilt⁶

$$\langle \mathcal{I}(\mathcal{Q}_1)\mathcal{I}(\mathcal{Q}_2) \rangle = \frac{I_0^2}{(4\pi)^2 \det \mathbf{J}} \iint_{\mathcal{R}^4} Q(\vec{t}, \vec{\rho}) e^{-\frac{\Delta}{8} t^2 + \frac{i}{2} \operatorname{sgn} \kappa \vec{t}^T (\vec{\zeta} - \mathbf{J}_0 \vec{\rho})} d^2 t d^2 \rho. \quad (1.3.39)$$

Nach Einsetzen von (1.3.15) wird deutlich, daß das ρ -Integral hier nur für $|\vec{t}| > 0$ absolut konvergent ist. Für $|\vec{t}| \rightarrow 0$ kann $a(\vec{s})$ durch die Näherungslösung (1.3.33) ausgedrückt werden und es folgt

$$\rho^2 a(\vec{s}) \xrightarrow{t \rightarrow 0} -i\pi \langle \varepsilon \rangle \vec{t} \vec{\rho} + O(t^2). \quad (1.3.40)$$

Damit gilt für das Teilintegral von $\vec{\rho}$ über \mathcal{R}^2 und \vec{t} aus $\mathcal{U}_\varepsilon(0)$, einer ε -Umgebung von $\vec{0}$,

$$\begin{aligned} H_0(\vec{\zeta}) &:= \frac{I_0^2}{(4\pi)^2 \det \mathbf{J}} \iint_{\mathcal{U}_\varepsilon(0) \times \mathcal{R}^2} e^{-\frac{\Delta}{8} t^2 - \frac{n}{2} \rho^2 a(\vec{s}) + \frac{i}{2} \operatorname{sgn} \kappa \vec{t}^T (\vec{\zeta} - \mathbf{J}_0 \vec{\rho})} d^2 \rho d^2 t \\ &= \frac{I_0^2}{(4\pi)^2 \det \mathbf{J}} \iint_{\mathcal{U}_\varepsilon(0) \times \mathcal{R}^2} e^{-\frac{i}{2} \operatorname{sgn} \kappa \vec{t}^T \mathbf{J} \vec{\rho}} d^2 \rho d^2 t \\ &= \frac{I_0^2}{4 \det \mathbf{J}} \iint_{\mathcal{U}_\varepsilon(0)} \delta^2\left(\frac{1}{2} \mathbf{J} \vec{t}\right) d^2 t \\ &= \frac{I_0^2}{(\det \mathbf{J})^2} \equiv \langle \mathcal{I}(\mathcal{Q}) \rangle^2 \end{aligned} \quad (1.3.41)$$

Bei einer Vertauschung der Integrationsreihenfolge und anschließender Transformation $\vec{\rho} = \mathbf{S}^{-1} \vec{t}$ tritt dieses Integral nicht auf und bei einer analytischen

⁶Für $\vec{\zeta} = 0$, $\gamma = 0$ und $\vec{t} = 2\vec{k}$ sowie $\vec{\rho} = \Delta \vec{r}$ ist dieser Ausdruck identisch mit Gleichung (12) bei Deguchi und Watson [10]. Für die, in der Arbeit von Seitz und Schneider [40] angegebene Gleichung (2.6), läßt sich nach Einsetzen von Gleichung (4.6) und Integration über die Differenz der Ablenkungswinkel \vec{a} mit $\vec{t} = 2\vec{k}$ ebenfalls die Äquivalenz zu (1.3.39) nachweisen.

Auswertung für $n = 0$ wird deutlich, daß nur die Hälfte dieses Ausdruckes zum Endergebnis beiträgt.

Für $|\vec{t}| > 0$ kann mit (1.3.15) und

$$\vec{t} = \mathbf{S} \vec{\rho} \quad \text{für } \mathbf{S} := \begin{pmatrix} s_x & -s_y \\ s_y & s_x \end{pmatrix} \quad (1.3.42)$$

sowie mit

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} \rho_x & -\rho_y \\ \rho_y & \rho_x \end{pmatrix} \vec{s} \quad \text{und } d^2 t = \rho^2 d^2 s \quad (1.3.43)$$

die Integration über $d^2 \rho$ ohne explizite Kenntnis von $a(\vec{s})$ durchgeführt werden, da der Realteil von $a(\vec{s})$ nicht negativ wird und zusammen mit $\frac{\Delta}{8} s^2$ im Exponenten die Konvergenz erzwingt. Dabei kann das s -Integral in

$$\langle \mathcal{I}(\mathcal{Q}_1) \mathcal{I}(\mathcal{Q}_2) \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathcal{I}(\mathcal{Q}) \rangle^2 + \frac{I_0^2}{4\pi \det \mathbf{J}} \iint_{\mathcal{R}^2 \setminus \mathcal{U}_\varepsilon(0)} h(\vec{s}, \vec{\zeta}) \frac{d^2 s}{s^2} \quad (1.3.44)$$

auf den gesamten \mathcal{R}^2 ausgedehnt werden, wie später aus dem asymptotischen Verhalten von $h(\vec{s}, \vec{\zeta})$ deutlich wird. In der gewählten Darstellung gilt für diese Funktion

$$h(\vec{s}, \vec{\zeta}) := \frac{s^2}{4\pi} \iint_{\mathcal{R}^2} e^{-s \vec{\rho}^T \tilde{\mathbf{A}} \vec{\rho} + \frac{i}{2} \operatorname{sgn} \kappa \vec{\rho}^T \mathbf{S}^T \vec{\zeta}} \rho^2 d^2 \rho. \quad (1.3.45)$$

Dabei ist

$$\tilde{\mathbf{A}} := \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\Delta}{4} s + \frac{n}{s} a(\vec{s}) \right) \mathbf{I} + i \frac{\operatorname{sgn} \kappa}{s} \mathbf{S}^T \mathbf{J}_0 \right). \quad (1.3.46)$$

Da nur der symmetrische Anteil von $\tilde{\mathbf{A}}$ zum Skalarprodukt beiträgt, kann jetzt der Exponent mit $\mathbf{A} := \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{A}}^T$ diagonalisiert werden und das Integral läßt sich geschlossen auswerten.

$$h(\vec{s}, \vec{\zeta}) = \frac{1}{2\sqrt{\det \mathbf{A}}} e^{-\frac{1}{8s} \vec{\zeta}^T \mathbf{S} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{S}^T \vec{\zeta}} \left[\frac{\operatorname{Tr} \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}} - \frac{1}{4s} \vec{\zeta}^T \mathbf{S} \mathbf{A}^{-2} \mathbf{S}^T \vec{\zeta} \right]. \quad (1.3.47)$$

Mit den Polarkoordinatendarstellungen

$$\vec{\zeta} = \zeta \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix} \quad \text{und } \vec{s} = s \begin{pmatrix} \cos \chi \\ \sin \chi \end{pmatrix} \quad (1.3.48)$$

sowie der weiteren Abkürzung

$$b(\vec{s}) := \frac{\Delta}{4} s + n \frac{a(\vec{s})}{s} + i \operatorname{sgn} \kappa \cos \chi \quad (1.3.49)$$

folgt dann

$$\mathbf{A} = b \mathbf{I} - i\gamma \operatorname{sgn} \kappa \begin{pmatrix} -\cos \chi & \sin \chi \\ \sin \chi & \cos \chi \end{pmatrix} \quad \det \mathbf{A} = b^2 + \gamma^2 \quad \operatorname{Tr} \mathbf{A} = 2b. \quad (1.3.50)$$

$$\vec{\zeta}^T \mathbf{S} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{S}^T \vec{\zeta} = \frac{s^2 \zeta^2}{b^2 + \gamma^2} (b - i\gamma \operatorname{sgn} \kappa \cos(\chi - 2\psi)) \quad (1.3.51)$$

und

$$\vec{\zeta}^T \mathbf{S} \mathbf{A}^{-2} \mathbf{S}^T \vec{\zeta} = \frac{s^2 \zeta^2}{(b^2 + \gamma^2)^2} (b^2 - \gamma^2 - 2ib\gamma \operatorname{sgn} \kappa \cos(\chi - 2\psi)). \quad (1.3.52)$$

Zusammengefaßt lautet das Ergebnis

$$h(\vec{s}, \vec{\zeta}) = \left[\frac{b}{\sqrt{b^2 + \gamma^2}^3} - \frac{s\zeta^2}{8} \frac{b^2 - 2ib\gamma \operatorname{sgn} \kappa \cos(\chi - 2\psi) - \gamma^2}{\sqrt{b^2 + \gamma^2}^5} \right] \times e^{-\frac{s\zeta^2}{8} \frac{b - i\gamma \operatorname{sgn} \kappa \cos(\chi - 2\psi)}{(b^2 + \gamma^2)}}. \quad (1.3.53)$$

Damit ist

$$\langle \mathcal{I}(\mathcal{Q}_1) \mathcal{I}(\mathcal{Q}_2) \rangle = \frac{I_0^2}{2(\det \mathbf{J})^2} + \frac{I_0^2}{4\pi \det \mathbf{J}} \iint_{\mathcal{R}^2 \setminus \mathcal{U}_\varepsilon(0)} h(\vec{s}, \vec{\zeta}) \frac{d^2 s}{s^2}, \quad (1.3.54)$$

wobei die Einschränkung des Integrales auf \mathcal{R}^2 ohne die ε -Umgebung von $\vec{0}$ fallengelassen werden kann, da hier nur eine logarithmische Singularität vorliegt, welche infinitesimal zum Resultat beiträgt.

Speziell für die Varianz der – auf eins normierten – Intensität gilt damit

$$\operatorname{Var} \frac{\mathcal{I}(\mathcal{Q})}{\langle \mathcal{I}(\mathcal{Q}) \rangle} \equiv \frac{\langle \mathcal{I}(\mathcal{Q})^2 \rangle - \langle \mathcal{I}(\mathcal{Q}) \rangle^2}{\langle \mathcal{I}(\mathcal{Q}) \rangle^2} = \frac{\det \mathbf{J}}{4\pi} \iint_{\mathcal{R}^2} \frac{b}{\sqrt{b^2 + \gamma^2}^3} \frac{d^2 s}{s^2} - \frac{1}{2}. \quad (1.3.55)$$

Für $\gamma = 0$ und $n = 0$ ist das Integral analytisch lösbar und die Varianz verschwindet, wie es sein muß. Der Grenzfall $\langle \varepsilon \rangle \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ und $\kappa = \operatorname{const}$ entspricht einer zusätzlichen kontinuierlich verteilten Masse und mit $b(\vec{s}) \rightarrow \frac{\Delta}{4}s + i \operatorname{sgn} \kappa (1 - \kappa) \cos \chi$ trägt auch dieser Anteil nicht zur Varianz bei.

1.3.3 Eine Wahrscheinlichkeitsdichte für die Intensität

Einen weiteren Ansatz für wahrscheinlichkeitstheoretische Untersuchungen des Mikrolinseneffektes bietet eine Theorie *stochastischer Prozesse*⁷. In einer guten Näherung kann der Intensitätsverlauf einer Quelle unter der Wirkung des Mikrolinseneffektes als ein stetiger Zufallsprozeß mit konstantem Mittelwert betrachtet werden. In diesem Fall existiert eine Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichte für die korrelierte Intensität an zwei unterschiedlichen Zeitpunkten als eine zweidimensionale Gaußfunktion, die nur von der Varianz und der Autokorrelationsfunktion abhängig ist. Für eine zeitabhängige Funktion $\tilde{I}(t)$ mit $\langle \tilde{I} \rangle = 0$, existieren eine Matrix

$$R(t_1, t_2) := \begin{pmatrix} \langle \tilde{I}(t_1)^2 \rangle & \langle \tilde{I}(t_1) \tilde{I}(t_2) \rangle \\ \langle \tilde{I}(t_2) \tilde{I}(t_1) \rangle & \langle \tilde{I}(t_2)^2 \rangle \end{pmatrix} \quad (1.3.56)$$

sowie ein Vektor $\vec{I}(t_1, t_2) := (\tilde{I}(t_1), \tilde{I}(t_2))^T$. Die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\phi(\tilde{I}(t_1), \tilde{I}(t_2)) := \frac{1}{2\pi \sqrt{\det R}} e^{-\frac{1}{2} \vec{I}(t_1, t_2)^T R(t_1, t_2)^{-1} \vec{I}(t_1, t_2)} \quad (1.3.57)$$

⁷Eine Darstellung der zugrundeliegenden Mathematik enthalten: YURIĬ A. ROZANOW, *Introduction to random Processes* [36] oder KAZIMIERZ SOBCZYK, *Stochastic Differential Equations* [42]

reproduziert Varianz und Autokorrelationsfunktion des stochastischen Prozesses $\tilde{I}(t)$. Damit besteht dann die Möglichkeit, auch Erwartungswerte für die höheren Potenzen der Intensität zu berechnen. Allerdings gibt es bisher keine Möglichkeit zu überprüfen, ob diese Wahrscheinlichkeitsdichte beim Mikrolinseneffekt realisiert wird, da die bisher gemessenen Daten nicht ausreichend sind und auch keine unabhängigen Modellrechnungen zur Verfügung stehen.

2 Auswertung von Varianz und Autokorrelationsfunktion

2.1 Integrationsverfahren

Für die praktische Auswertung von (1.3.54) sind wegen der Symmetrieeigenschaften von $h(\vec{s}, \vec{\zeta})$ Vereinfachungen möglich. Tatsächlich braucht nur im ersten Quadranten über $\frac{1}{2}\Re[h(s, \chi, \vec{\zeta}) + h(s, -\chi, \vec{\zeta})]$ integriert zu werden, da $h(-\vec{s}, \vec{\zeta}) = h^*(\vec{s}, \vec{\zeta})$ gilt und die Funktion h nur über $\cos(\chi - 2\psi)$ vom Vorzeichen des Winkels χ abhängt. Polarkoordinatendarstellung ermöglicht es, auf einfache Weise die logarithmische Singularität für $\vec{s} = 0$ bei der numerischen Rechnung auszusparen und die Werte für $a(\vec{s})$ aus der abgespeicherten Tabelle ohne zusätzliche Koordinatentransformation zur Interpolation zu verwenden. Sowohl das Winkelintegral für $s > s_0$ als auch das Radialintegral werden mit der zusammengesetzten Trapezregel und Romberg-Extrapolation berechnet. Für $s \rightarrow 0$ wird aus der Näherung (1.3.33) für die Funktion $a(\vec{s})$ und einer Reihenentwicklung von $h(\vec{s}, \vec{\zeta})$ das Winkelintegral ermittelt. Der Cut-off Parameter s_0 muß dann aus einem Vergleich der Ergebnisse bestimmt werden. Die Differenz zwischen der Näherungslösung und dem numerisch berechneten Winkelintegral an der Stelle s_0 bietet einen Hinweis auf die Qualität der Rechnung (vgl. Abb. 2). Der bei der numerischen Integration als Abbruchkriterium verwendete Fehler kann grundsätzlich vernachlässigt werden, selbst wenn für kleine s das Ergebnis der Winkelintegration eindeutig falsch wird, konvergiert das numerische Verfahren zuverlässig.

2.1.1 Das Winkelintegral

Während für $s > 1$ das Integral über den Viertelkreis mit wenigen Funktionswerten bestimmt werden kann, steigt die benötigte Anzahl bei kleineren s deutlich an. Besonders in demjenigen Bereich, in dem $(1 - \kappa) \cos \chi \approx \gamma$ ist, werden besonders viele Stützstellen für die numerische Integration benötigt. Speziell für $\gamma = 0$ gilt mit

$$\frac{\langle \mathcal{I}(\mathcal{Q})^2 \rangle}{\langle \mathcal{I}(\mathcal{Q}) \rangle^2} = \frac{1}{2} + \int_0^\infty G(s) ds \quad (2.1.1)$$

daß die Funktion

$$G(s) := \frac{(1 - \kappa)^2}{4\pi s} \int_0^{2\pi} \frac{d\chi}{b^2(\vec{s})}, \quad (2.1.2)$$

bei $\cos \chi = 0$ mit s^{-3} für $s \rightarrow 0$ wächst. Wegen

$$\Re \frac{1}{b^2(\vec{s})} = \frac{(\Re b)^2 - (\Im b)^2}{|b|^4} \quad (2.1.3)$$

und

$$b(\vec{s}) \xrightarrow{s \rightarrow 0} b_0(\vec{s}) := \frac{\Delta}{4}s + n \Re e \frac{a_0(\vec{s})}{s} + i \operatorname{sgn} \kappa (1 - |\kappa|) \cos \chi \quad (2.1.4)$$

hat der Integrand in der Näherung für kleine s eine Nullstelle bei $\chi = \chi_0$,

$$\cos \chi_0 \approx s \frac{\frac{\Delta}{4} + n \Re e \frac{a_0(\vec{s})}{s^2}}{1 - |\kappa|} \quad \text{für } s < \frac{1 - |\kappa|}{\frac{\Delta}{4} + n \Re e \frac{a_0(\vec{s})}{s^2}}. \quad (2.1.5)$$

Für kleine χ ist die Funktion negativ, wobei das Minimum bei $\chi = \chi_1$, mit $\cos \chi_1 = \sqrt{3} \cos \chi_0$ liegt, und sein Betrag ebenfalls mit s^{-3} für $s \rightarrow 0$ abfällt. Bei relativer und absoluter Rechengenauigkeit von jeweils 10^{-6} bei der Integration wird das hier verwendete numerische Verfahren für Radialkoordinaten $s < \frac{1-|\kappa|}{\Delta} 10^{-3}$ ungenau, und es muß mit einem Näherungsverfahren gearbeitet werden. Mit der Darstellung (1.3.33) für die Funktion $a(\vec{s})$ kann das Winkelintegral nach Partialbruchzerlegung geschlossen ausgewertet werden, wobei für genügend kleine s sogar die Winkelabhängigkeit von $\Re a(\vec{s})$ vernachlässigt werden darf, ohne das Ergebnis zu beeinflussen. Für die Funktion

$$G_0(s) := \frac{(1 - \kappa)^2}{4\pi s} \int_0^{2\pi} \frac{d\chi}{b_0^2(\vec{s})} \quad (2.1.6)$$

gilt dann

$$G_0(s) \approx \frac{\frac{\Delta + \kappa(3 - 2 \ln s)}{4(1 - \kappa)}}{2\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta + \kappa(3 - 2 \ln s)}{4(1 - \kappa)}\right)^2 s^2}}^3. \quad (2.1.7)$$

Für $\Delta \leq 1$ und $\kappa \leq 0.2$ wirken sich die numerischen Integrationsfehler schon bei $s \leq 10^{-2}$ aus, so daß das hier vorgestellte Verfahren für kleine κ, Δ fehlerhaft wird, da die angestrebte Genauigkeit bei der Approximation von $a(\vec{s})$ durch (1.3.33) erst für $s < 10^{-3}$ erreicht wird und auch bei Näherung der Funktion $a(\vec{s})$ durch Terme von höherer Ordnung in $\cos \chi$ die numerische Auswertung einer dann notwendigen Partialbruchzerlegung fehlerbehaftet ist.

Wenn $\gamma \neq 0$ ist, bleibt dieses Problem prinzipiell bestehen, wobei für $b_0(b_0^2 + \gamma^2)^{-3/2}$ eine vorherige Reihenentwicklung nach γ bzw. γ^{-1} notwendig ist. In diesem Fall muß die Reihe anschließend numerisch aufsummiert werden, wodurch eine genauere Analyse der Gleichungen erschwert wird, und die benötigte Rechenzeit durch die Auswertung dieser Reihe nahezu verdoppelt wird. Für die Autokorrelationsfunktion werden zusätzlich die ersten beiden Terme aus der Entwicklung nach $|\vec{\zeta}|^2$ berücksichtigt, was ausreichend ist, sofern $s|\vec{\zeta}|^2 \ll 1$ bleibt.

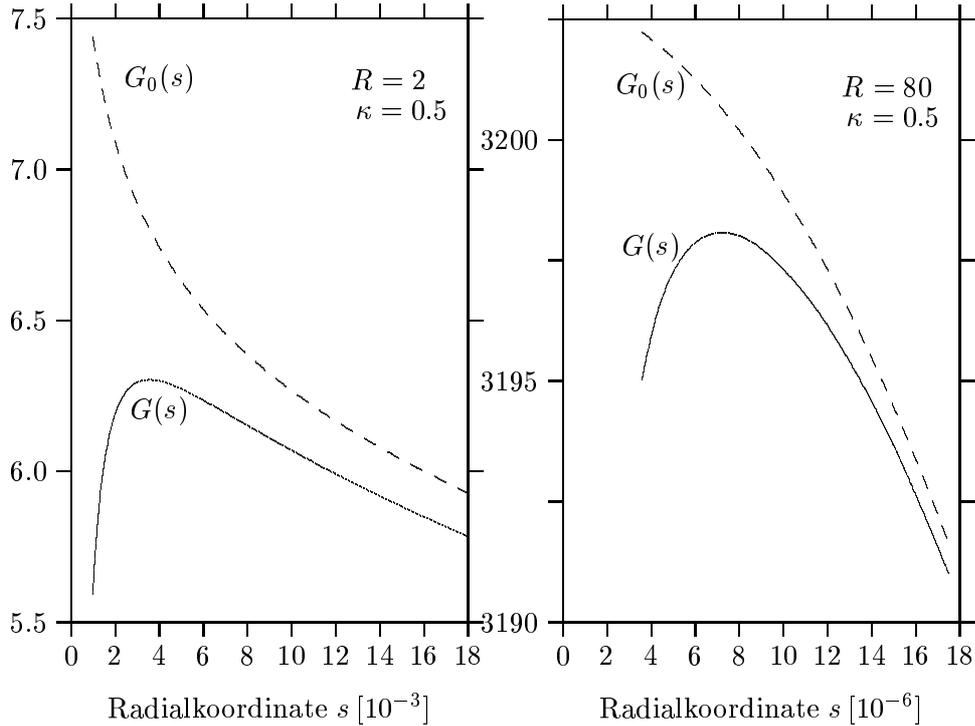


Abbildung 2: Die Zwischenresultate nach der Winkelintegration auf numerischem Wege $G(s)$ und aus der analytischen Näherung $G_0(s)$ (gestrichelt) für kleine Radialkoordinaten im Vergleich: Qualitativ unterscheidet sich der Funktionsverlauf bei verschiedenen Quellgrößen trotz des unterschiedlichen Maßstabes nicht, der relative Fehler dagegen wächst mit abnehmendem Quellradius.

2.1.2 Das Radialintegral

Für $s \gg 1$ ist $b(\vec{s}) \approx s\Delta/4$, so daß für große s das Integral schnell konvergiert und nahezu unabhängig von einem oberen Cut-off Parameter s_∞ ist, womit gilt:

$$\int_{s_\infty}^{\infty} G(s) ds \approx \frac{s_\infty}{2} G(s_\infty). \quad (2.1.8)$$

Alle Rechnungen für $\Delta > 1$ wurden mit $s_\infty = 165$ durchgeführt, nur bei kleineren Quellen wurde das Integrationsgebiet auf $s_\infty = 1189$ ausgedehnt. Für kleine s dagegen zeigt der Vergleich von $G(s)$ mit der aus (1.3.33) hergeleiteten Näherung in Abbildung 2, wie $G_0(s)$ logarithmisch für $s \rightarrow 0$ wächst, während $G(s)$ nach zeitweiliger Konvergenz gegen G_0 bei der Annäherung an den Ursprung deutlich von den zu erwartenden Werten abweicht, sobald die Rechengenauigkeit bei zu kleinem s abnimmt. Dabei sind $G_0(s)$ und $G(s)$ besonders bei großen Quellen über einen weiten Bereich nahezu identisch, so daß für viele der betrachteten Linsensituationen eine Veränderung des Cut-off Parameters s_0 um eine Zehnerpotenz das Ergebnis um weniger als ein Prozent beeinflusst. Bei der konkreten Berechnung von

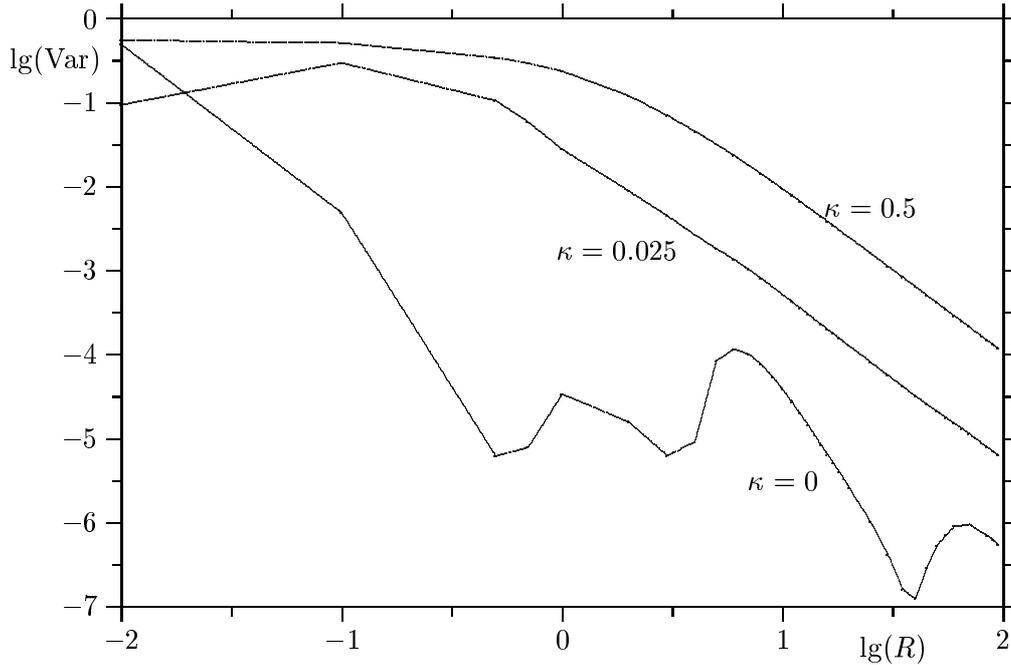


Abbildung 3: Überprüfung der numerischen Fehler durch Berechnung der Varianz nach (1.3.55) für $\kappa = 0$. Vergleich der Varianz für $\kappa = 0.025$ und $\kappa = 0.5$ mit dem Ergebnis für $\kappa = 0$.

$$\frac{\langle \mathcal{I}(\mathcal{Q})^2 \rangle}{\langle \mathcal{I}(\mathcal{Q}) \rangle^2} \approx \frac{1}{2} + \int_0^{s_0} G_0(s) ds + \int_{s_0}^{s_\infty} G(s) ds + \frac{s_\infty}{2} G(s_\infty) \quad (2.1.9)$$

wird deutlich, daß in dem dargestellten Beispiel für $\kappa = 0.5$ und $R = 80$ der Bereich der Übereinstimmung von G und G_0 über drei Zehnerpotenzen mehr umfaßt, als bei $R = 2$. Da gleichzeitig die relative Abweichung $(G(s) - G_0(s))/G_0(s)$ bei der kleinen Quelle etwa einhundertmal größer ist, folgt bei dieser eine deutlichere Abhängigkeit des Ergebnisses von s_0 . Allerdings gibt es kein allgemeingültiges Kriterium um die Bestimmung des Cut-off Parameters s_0 automatisieren zu können; während in dem angeführten Beispiel die Varianz der Intensität als Funktion von s_0 monoton wächst, hat ihre Ableitung nach s_0 , die Differenz $G(s) - G_0(s)$ mehrere lokale Extrema. Dabei konnte nicht geklärt werden, ob dieses nur auf numerische Fehler bei der Berechnung von $G(s)$ zurückzuführen ist, oder dem tatsächlichen Funktionsverlauf entspricht. Ein automatisiertes Verfahren muß das Minimum der Differenz $G(s) - G_0(s)$ innerhalb eines geeigneten im allgemeinen nicht vorher bekannten Intervalles finden, ohne durch vorhandene Schnittpunkte der beiden Kurven an anderer Stelle zu einem falschen Resultat zu gelangen. Der direkte Vergleich mit exakten Ergebnissen ist für $\kappa = 0$ möglich, da hier das Resultat immer $\langle \mathcal{I}(\mathcal{Q})^2 \rangle / \langle \mathcal{I}(\mathcal{Q}) \rangle^2 = 1$ sein muß. Die numerische Rechnung liefert dabei größere Werte, die aber nur bei $R < 0.1$ eine deutliche Verfälschung des Ergebnisses bewirken, bei großen Quellen und kleiner Massendichte beträgt dieser Fehler weniger als 10% des Betrages der Varianz der Intensität (vgl. Abb. 3).

Es liegt nahe, durch Addition einer analytisch integrierbaren Funktion die Bildung von Differenzen großer Zahlen zu vermeiden, aber eine Testrechnung der Form

$$\frac{\langle \mathcal{I}(\mathcal{Q})^2 \rangle}{\langle \mathcal{I}(\mathcal{Q}) \rangle^2} - 1 = \frac{(1 - \kappa)^2}{4\pi} \iint_{\mathcal{R}^2} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{b_0^2} \right) \frac{d^2 s}{s^2} + \int_0^\infty G_0(s) ds - \frac{1}{2} \quad (2.1.10)$$

brachte keine Veränderung im Ergebnis, da Nullstellen und Minima von $1/b^2$ und $1/b_0^2$ nicht identisch sind, so daß die Addition großer Zahlen unterschiedlichen Vorzeichens unvermeidbar bleibt.

2.2 Vergleichsmöglichkeiten

Zur Überprüfung der Ergebnisse mit unabhängigen Rechenverfahren wurden zwei verschiedene von Refsdal und Stabell [33, 34] vorgestellte Methoden eingesetzt, die hier kurz beschrieben werden.

2.2.1 Die Verstärkung großer Quellen

Ein Näherungsverfahren zur Berechnung der Varianz der Intensität großer Quellen, haben Refsdal und Stabell [33] 1991 entwickelt. Nach ihrem Ansatz wird die Variabilität einer ausgedehnten Quelle durch die in ihrer Projektion auf die Linsenebene gelegenen Sterne verursacht. Bei einer mittleren Verstärkung

$$\langle A \rangle = (1 - \kappa)^{-2} \quad (2.2.1)$$

gilt für eine Quelle mit der Fläche $\|\mathcal{F}\| \zeta_0^2$ für die erwartete Anzahl der Sterne

$$\langle N \rangle = \frac{n \|\mathcal{F}\|}{(1 - \kappa)^2} = \frac{\kappa \|\mathcal{F}\|}{\pi (1 - \kappa)^2}. \quad (2.2.2)$$

Wenn die Sterne in der Linsenebene zufallsverteilt sind, ist die Anzahl der Sterne vor dieser Fläche poissonverteilt um den Mittelwert $\langle N \rangle$ mit einer Standardabweichung $\sqrt{\langle N \rangle}$. Für

$$\delta A = \frac{dA}{d\kappa} \delta\kappa = \frac{2A}{1 - \kappa} \delta\kappa \quad \text{und} \quad \frac{\delta\kappa}{\kappa} = \frac{\delta N}{N} = \frac{1}{\sqrt{\langle N \rangle}} \quad (2.2.3)$$

ist dann

$$\frac{\delta A}{A} = \frac{2\kappa}{(1 - \kappa)} \sqrt{\frac{\pi (1 - \kappa)^2}{\kappa \|\mathcal{F}\|}} = 2 \sqrt{\frac{\pi\kappa}{\|\mathcal{F}\|}} \quad (2.2.4)$$

und mit $\|\mathcal{F}\| = \pi R^2 \equiv \pi \Delta$ folgt das in [33] angegebene Ergebnis

$$\frac{\delta A}{A} = \frac{2\sqrt{\kappa}}{R}. \quad (2.2.5)$$

Bei vorhandener Scherung in der Linse konnte kein derartiges Näherungsverfahren entwickelt werden.

Für eine aus mehreren genügend großen Teilflächen zusammengesetzte Quelle ist bei einer ortsunabhängigen Verteilungsfunktion für die Sternkoordinaten

die Verteilung der Sterne vor den Einzelflächen statistisch unabhängig und poissonverteilt⁸. Damit sind auch die Verstärkungen für die Teilflächen statistisch unabhängig, so daß gilt $(\delta A)^2 = \sum (\delta A_j)^2$. Falls die Flächenhelligkeit der Quelle nicht konstant ist, muß stattdessen die Varianz der Intensität $(\delta I)^2 = \sum (\delta I_j)^2$ bestimmt werden. Dabei gilt mit der mittleren intrinsischen Helligkeit $I(j)$ auf der Fläche \mathcal{F}_j für

$$(\delta I_j)^2 := I^2(j) \|\mathcal{F}_j\|^2 (\delta A_j)^2 = \frac{4\pi\kappa}{(1-\kappa)^4} I^2(j) \|\mathcal{F}_j\|, \quad (2.2.6)$$

und damit

$$(\delta I)^2 = \frac{4\pi\kappa}{(1-\kappa)^4} \sum_j I^2(j) \|\mathcal{F}_j\|. \quad (2.2.7)$$

Bei genügend kleinen Teilflächen kann die Summe durch ein Integral ersetzt werden, und es gilt

$$(\delta I)^2 = \frac{4\pi\kappa}{(1-\kappa)^4} \iint_{\mathcal{F}} I^2(\vec{\zeta}) d^2\zeta, \quad (2.2.8)$$

sowie

$$\frac{\delta I}{I} = \frac{\sqrt{4\pi\kappa \iint_{\mathcal{F}} I^2(\vec{\zeta}) d^2\zeta}}{\iint_{\mathcal{F}} I(\vec{\zeta}) d^2\zeta} = \sqrt{\frac{4\pi\kappa \langle I^2 \rangle}{\|\mathcal{F}\| \langle I \rangle^2}}. \quad (2.2.9)$$

Daher gilt dann für eine Quelle mit gaußschem Helligkeitsprofil (1.1.18)

$$\frac{\delta I}{I} = \frac{\sqrt{2\kappa}}{R} \quad (2.2.10)$$

und die Varianz der Intensität für die Quelle konstanter Flächenhelligkeit ist damit genau doppelt so groß wie bei einer Gaußquelle mit gleicher Maximalintensität und Gesamtlichtmenge I_0 . Gegenüber Rechnungen mit (1.3.55) für $10 \leq R \leq 100$ und $0.1 \leq \kappa \leq 0.9$ betragen die Abweichungen hiervon weniger als 6%. Dieses Resultat widerspricht dem von Seitz, Wambsganß und Schneider [41] veröffentlichten Ergebnis, nach dem die Varianz bei großen Gaußquellen mit der von Refsdal und Stabell [33] ermittelten Näherungslösung für Quellen konstanter Flächenhelligkeit übereinstimmt. Der von Seitz et al. eingeführte Korrekturterm reduziert diesen Unterschied nur geringfügig für kleinere Quellen $R < 30$, das asymptotische Verhalten für große Quellradien bleibt nahezu unverändert.

2.2.2 Numerischer Test

Zur Überprüfung der Ergebnisse bei kleineren Quellen wird die von Refsdal und Stabell [34] beschriebene Variante des Strahlenschießens verwendet. Bei diesem Verfahren wird die Abbildung eines regelmäßigen Punktgitters der Kantenlänge $2R_0$ durch die Linsengleichung (1.1.12) von der Linsen- auf die Quellebene untersucht. Für das Linsenmodell werden dabei mittels Zufallszahlengenerator Sternkoordinaten auf einer Kreisfläche vom Radius R_{\max} erzeugt, wobei die

⁸Den folgenden Teil ihrer Analyse haben die Autoren nicht veröffentlicht

Anzahl der Sterne einer Poissonverteilung um den Mittelwert $\langle N \rangle = \kappa R_{\max}^2$ folgt und die Masse jedes Sternes gleich der Einheitsmasse ist. Die von einem Beobachter gemessene Intensität ist dann gleich der Summe über alle Gitterpunkte, jeweils gewichtet mit der intrinsische Quellintensität an den Punkten in der Quellebene, welche in diesem Zusammenhang als Bildpunkte der Abbildung zu betrachten sind. Der Fehlerbetrachtung in [34] folgend, wird die Varianz der Intensität ebenfalls aus $N_m = 1000$ Einzelmessungen bestimmt, was zu einem Fehler von $\delta_1(\delta m) = \sqrt{1/(2N_m)} = 2.2\%$ bei der Bestimmung von δm führt. Eine weitere Fehlerquelle, welche in dieser Arbeit betrachtet wurde, basiert auf der begrenzten Anzahl von Lichtstrahlen N_r , welche in der numerischen Rechnung berücksichtigt werden können. Mit dem für eine Quelle konstanter Flächenhelligkeit angegebenen Fehler $\delta_2(\delta m) \approx 1.085 N_r^{-3/4}$ folgt bei einem geforderten Gesamtfehler von unter 3%, daß N_r größer als 205 sein muß. Nach numerischen Tests wurde in allen im Rahmen dieser Arbeit für Gaußquellen durchgeführten Rechnungen mit $N_r \geq 230$ sichergestellt, daß dieser Anteil am Gesamtfehler klein genug bleibt. Die Ausdehnung des quadratischen Schießfeldes mit der Kantenlänge $2R_0$ wird bestimmt durch die Forderung, daß der Einfluß weiter entfernter Bilder auf die gesammelte Lichtmenge zu vernachlässigen ist. Nach einer Analyse von Paczyński [27] tragen Bilder, deren Abstand vom Ursprung der Linsenebene größer als r ist, bei einer Punktquelle im Zentrum der Quellebene und einem ausreichend großen r mit zusammen

$$A_r = \frac{\kappa}{|1 - \kappa|^{4r^2}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{A_r}{\langle A \rangle} = \frac{\kappa}{|1 - \kappa|^{2r^2}} \quad (2.2.11)$$

zur Gesamtverstärkung bei. Da diese Bilder immer in der Nähe von Sternen entstehen, genügt es, wenn die Eckpunkte des Gitters innerhalb des Sternfeldes zu liegen kommen, und deswegen $R_{\max} \geq 1.5R_0$ gewählt wird. Für die hier vorgestellten Beispielrechnungen ist r der Abstand zwischen dem Rand des Schießfeldes und dem der Quelle. Mit $\frac{A_r}{\langle A \rangle} < 0.01$ wird sichergestellt, daß weniger als ein Prozent der Lichtmenge außerhalb des Schießfeldes auftritt.

Für $r = R_0 - \frac{\sqrt{\Delta}}{|1 - \kappa|}$ folgt mit

$$r^2 = \frac{\kappa \langle A \rangle}{|1 - \kappa|^2 A_r} > \frac{100 \kappa}{|1 - \kappa|^2} \quad (2.2.12)$$

eine Abschätzung der Mindestgröße R_0 für das Schießfeld bei einem endlichen Quellradius:

$$R_0 > \frac{\sqrt{\Delta} + 10\sqrt{\kappa}}{|1 - \kappa|}. \quad (2.2.13)$$

Nur bei $\kappa < 0.1$ muß durch eine zusätzliche Vergrößerung des Schießfeldes sichergestellt werden, daß durch die wenigen berücksichtigten Sterne das Ergebnis nicht durch seltene Ereignisse hoher Verstärkung verfälscht wird, was durch $R_0 > 3$ und bei kleinen Quellradien zusätzlich mit $N_m = 2000$ erreicht wird. Bei der Berechnung der Autokorrelationsfunktion wird das Licht gleichzeitig auf zwei Kreisflächen gesammelt, deren Zentren den Abstand $2|\vec{\zeta}|$ haben.

Dafür wird der Radius des Schießfeldes vergrößert auf

$$R_0 > \max \left(3, \frac{\sqrt{\Delta} + 10\sqrt{\kappa}}{|1 - \kappa|} \right) + \frac{2|\vec{\zeta}|}{|1 - \kappa|}. \quad (2.2.14)$$

2.3 Ergebnisse

Für Massendichten κ zwischen 0.025 und 1.6 und für Quellgrößen von 1/100 bis 100 Einsteinradien wurde (2.1.1) ausgewertet. Besondere Beachtung gilt dabei der Umgebung von $\kappa = 1$, da hier die Integrale (2.1.1) bzw. (2.1.9) divergieren. Um den Einfluß eines Scherungstermes zu untersuchen, werden einige Kurven mit $\gamma = 0.1$ und $\gamma = 0.4$ berechnet. Diese Rechnungen basieren auf der Annahme, daß alle Sterne in der Linsenebene die gleiche Einheitsmasse besitzen. Da diese Voraussetzung in realistischen Linsensituationen nicht erfüllt ist, wird mit einzelnen Vergleichsrechnungen der Einfluß verschiedener Massenverteilungen untersucht.

Für den Vergleich mit gemessenen oder auf numerischem Wege erzeugten Lichtkurven wird die auf Grund der Varianz erwartete Helligkeitsschwankung in Magnituden ausgedrückt:

$$\delta m = 2.5 \lg \left(1 + \sqrt{\frac{\langle \mathcal{I}(\mathcal{Q})^2 \rangle - \langle \mathcal{I}(\mathcal{Q}) \rangle^2}{\langle \mathcal{I}(\mathcal{Q}) \rangle^2}} \right). \quad (2.3.1)$$

Bei der Analyse des oben beschriebenen Strahlenschießens wird deutlich, daß Umrechnung der einzelnen gemessenen Intensitäten in Magnituden und anschließende Mittelwertbildung in der Regel deutlich größere Werte für die Standardabweichung ergibt als diese Darstellung und nur bei kleinen Varianzen zum gleichen Ergebnis führt, worauf beim Vergleich mit Resultaten anderer Untersuchungen geachtet werden muß.⁹

Für die Darstellung der Autokorrelationsfunktion wird die Notation

$$q(\vec{\zeta}) := \frac{\langle \mathcal{I}(\mathcal{Q}_1)\mathcal{I}(\mathcal{Q}_2) \rangle - \langle \mathcal{I}(\mathcal{Q}) \rangle^2}{\langle \mathcal{I}^2(\mathcal{Q}) \rangle - \langle \mathcal{I}(\mathcal{Q}) \rangle^2} \equiv \text{ACF}(\mathcal{I}(\mathcal{Q}_1), \mathcal{I}(\mathcal{Q}_2)) \quad (2.3.2)$$

verwendet, um zu verdeutlichen, daß die Autokorrelationsfunktion eine Funktion der Differenz zweier Quellpositionen $\vec{\zeta} := \vec{\zeta}_2 - \vec{\zeta}_1$ oder mit $\vec{\zeta} = \vec{V}t$ eine Funktion der Zeit ist, wobei $\vec{\zeta}_1, \vec{\zeta}_2$ die Zentren der, im Rahmen der mathematischen Herleitung formal unterschiedenen Quellen $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$ bezeichnen. Wegen der Normierung gilt immer $q(0) = 1$, so daß der direkte Vergleich verschiedener Modellrechnungen vereinfacht wird. Eine charakteristische Größe für die Autokorrelationsfunktion ist die Korrelationslänge, der Quellabstand, bei dem die Funktion den Wert 0.5 annimmt.

2.3.1 Varianz als Funktion der Quellgröße

Aus der Arbeit von Refsdal und Stabell [33] wird deutlich, daß die Abhängigkeit der Helligkeitsschwankungen vom Quellradius am übersichtlichsten auf einer

⁹Wambsganß et al. [46] werten z.B. $\langle (\log A)^2 \rangle$ aus.

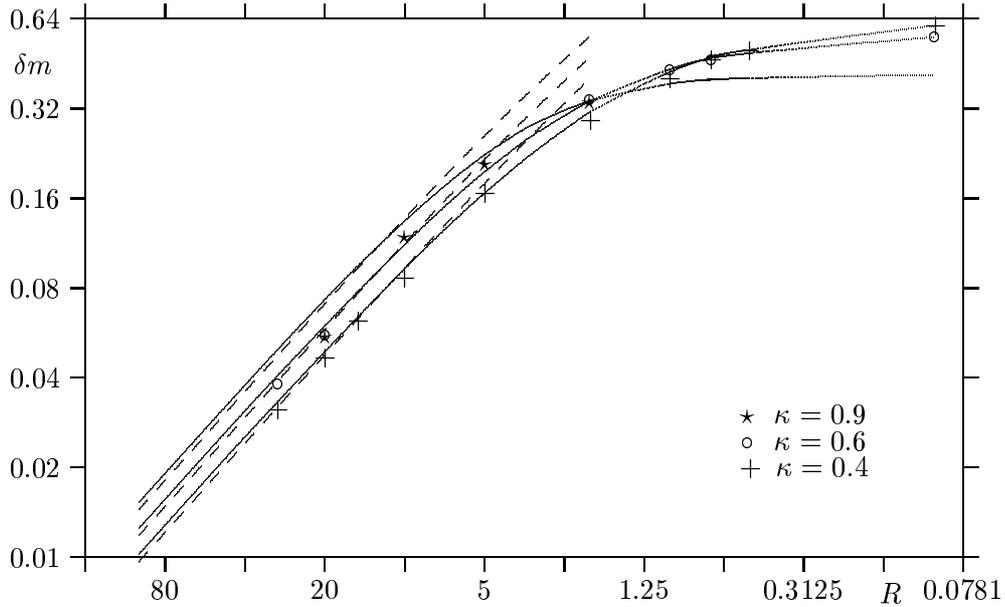


Abbildung 4: Standardabweichung der Intensität nach (1.3.55) in Magnituden umgerechnet (logarithmische Darstellung) für $\kappa = 0.4$, $\kappa = 0.6$ und $\kappa = 0.9$ (durchgezogene Linien, in der linken Bildhälfte von unten nach oben), Näherung von Refsdal und Stabell für Gaußquelle (gestrichelt) und einzelne Ergebnisse mittels Strahlenschießens ($+$, \circ und \star).

logarithmischen Skala dargestellt werden kann, da für große Quellen $\frac{d \ln \delta m}{d \ln R} \equiv \frac{R}{\delta m} \frac{d \delta m}{d R}$ konstant ist und für $R \rightarrow 0$ ebenfalls gegen null geht. Wegen der mangelnden Rechengenauigkeit bei sehr kleinen Quellradien ist es mit dem hier vorgestellten Ansatz nicht möglich das asymptotische Verhalten von δm für $R \rightarrow 0$ zu bestimmen, wobei Abbildung 4 allerdings andeutet, daß die Varianz einer Punktquelle eine endliche Größe ist. Bei großen Quellen ist auffallend, daß die Varianz geringfügig langsamer abnimmt, als aus der Abschätzung von Refsdal und Stabell [33] folgt. Da spätere numerische Rechnungen dieser Autoren [34] ergaben, daß die Näherungslösung eine obere Grenze für die Varianz ergibt, wird aus Abbildung 4 deutlich, daß die hier vorgestellten Ergebnisse für sehr große Quellen um circa 4% zu groß sind. Durch eine Verkleinerung des in Abschnitt 2.2 eingeführten Cut-off Parameters s_0 für den Wechsel zwischen numerischer Integration und Verwendung der analytischen Näherung bei der Winkelintegration wird diese Differenz verringert und sie verschwindet mit $s_0 \approx 10^{-5}$, aber ein Vergleich mit Abbildung 2 zeigt deutlich, daß für derartig kleine s_0 die Ergebnisse der numerischen Rechnung durch Rundungsfehler beeinflusst werden und die Wahl des Cut-off Parameters nur eine zufällige Übereinstimmung der Ergebnisse bewirkt. Aus Abbildung 4 wird ebenfalls ersichtlich, daß sich Kurven verschiedener Massendichten im Bereich kleiner Quellradien schneiden, was gleichbedeutend damit ist, daß bei gegebener Quellgröße unterschiedliche Massendichten zu derselben Varianz führen. Dieses ist darauf zurückzuführen, daß die Varianz als Funktion von κ ein lokales Maximum im Intervall $(0, 1)$ hat

und daher, wie in Abbildung 6 erkennbar ist, jeweils zwei verschiedene κ zum gleichen Resultat führen.

2.3.2 Varianz als Funktion der Massendichte

Als Funktion von κ hat δm für kleine R ein Maximum auf dem Intervall $(0, 1)$, dessen Lage sich mit ansteigendem R Richtung $\kappa \rightarrow 1$ verschiebt, während sein Betrag abnimmt. Nach Deguchi und Watson [10] geht $\langle I^2 \rangle / \langle I \rangle^2$ logarithmisch gegen eins, was für kleine Quellen, wie sie auch von den beiden Autoren untersucht wurden, zumindest qualitativ deutlich wird, für $R > 20$ allerdings kann dies hier im Rahmen der Rechengenauigkeit nicht bestätigt werden. Aus Abbildung 5 ist ersichtlich, daß das Intervall, in dem δm ein derartiges Verhalten zeigt, nur in den vergrößerten Ausschnitten deutlich wird, während es im oberen Bildteil kaum erkennbar ist. Nicht abgebildet ist hier der Übergang zu falschen Resultaten bei Quellradien $R > 50$, wenn κ sich der kritischen Massendichte annähert. In diesem Wertebereich wird der Imaginärteil der Funktion $b(\vec{s})$ so klein, daß $G(s)$ auch für sehr kleine s noch mit s^{-3} anwächst und das Radialintegral durch numerische Fehler bei der Bildung von Differenzen großer Zahlen verfälscht wird. Die Breite des Intervalles um $\kappa = 1$, in dem die numerischen Fehler relevant werden, beträgt bei $R = 50$ ungefähr $8 \cdot 10^{-4}$, steigt mit wachsendem R langsam an und erreicht bei $R = 100$ einen Wert von $3.2 \cdot 10^{-3}$. Für $\gamma > 0$ verschwindet die Varianz an den beiden Punkten, an denen $\kappa \pm \gamma = 1$ ist. Im Unterschied zu $\gamma = 0$ wirken sich die numerischen Fehler schon bei kleinen Quellen deutlich aus, so daß mit dem hier vorgestellten numerischen Verfahren Berechnungen nur für $|1 - \kappa \pm \gamma| > 10^{-3}$ möglich sind. Auffällig ist dabei, daß die Ergebnisse für $\gamma = 0.4$ deutlich kleiner sind als im scherungsfreien Fall, während mit $\gamma = 0.1$ zumindestens bei kleinen Massendichten geringfügig größere Werte berechnet werden.

2.3.3 Varianz als Funktion des Massenspektrums

Während bisher alle Berechnungen mit identischen Massenpunkten in der Linsenebene durchgeführt wurden, muß bei einer realitätsnahen Anwendung berücksichtigt werden, daß Sterne und kompakte Objekte innerhalb einer Galaxie ein Spektrum von der Größe kleiner Planeten bis zu Riesensternen mit vielen Sonnenmassen umfassen. Zwar können Planetensysteme ebenso wie Doppelsterne, deren Abstand kleiner als der Einsteinradius ist, als Punktmassen betrachtet werden, dennoch umfaßt das Massenspektrum in der Regel mehrere Zehnerpotenzen. Eine einfache Änderung der Einheitsmasse entspricht nur einer Maßstabsänderung, welche in diesem Formalismus einer veränderten Quellgröße gleichkommt. Demgegenüber muß die Einführung eines Massenspektrums bei der Berechnung der Autokorrelationsfunktion für die Lichtablenkung (1.3.16) bzw. (1.3.35) berücksichtigt werden. Ergebnisse einer Beispielrechnung für ein Zwei-Komponenten Gemisch aus Einheitsmasse und einer Anzahl kleinerer Objekte in unterschiedlichen Mischungsverhältnissen sind Abbildung 8 zu entnehmen. Unter der Annahme ein Massenspektrum könne durch eine zu definierende effektive Masse beschrieben werden, entspräche jedes einzelne Mi-

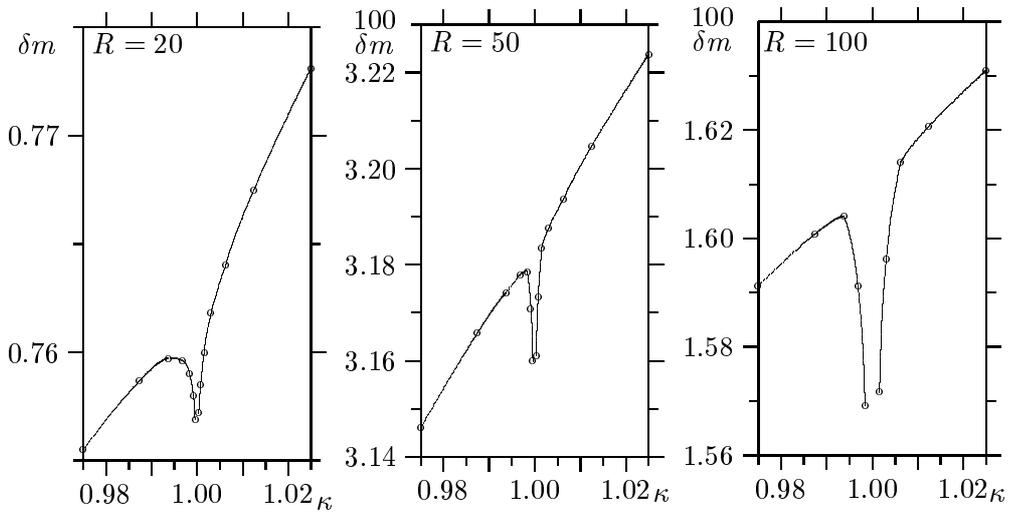
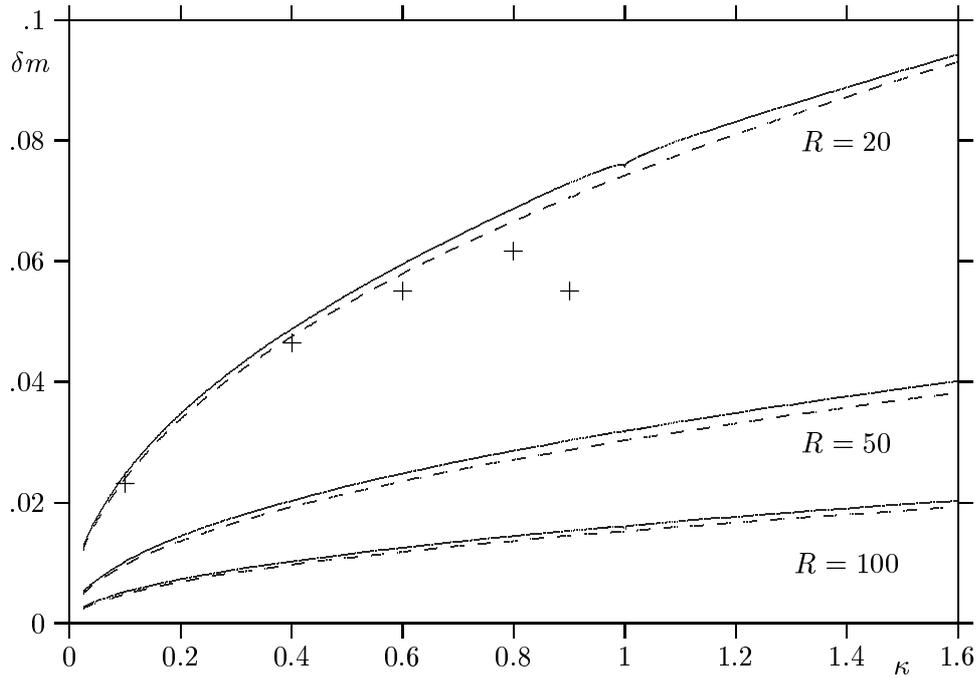


Abbildung 5: Oben: Standardabweichung der Intensität in Magnituden für Quellradius $R = 20$, $R = 50$ und $R = 100$ (von oben nach unten) dazu Refsdal-Stabell Näherung (gestrichelt) und für $R = 20$ (+) einige mittels Strahlenschießen gewonnene Resultate. Unten: Ausschnittsvergrößerung der Umgebung von $\kappa = 1$, mit berechneten Werten (o) bei $\kappa = 1 \pm 2^{-k}/20$ für $k = 1$ bis $k = 7$ bei $R = 20$ und $R = 50$, sowie $k = 1$ bis $k = 5$ bei $R = 100$.

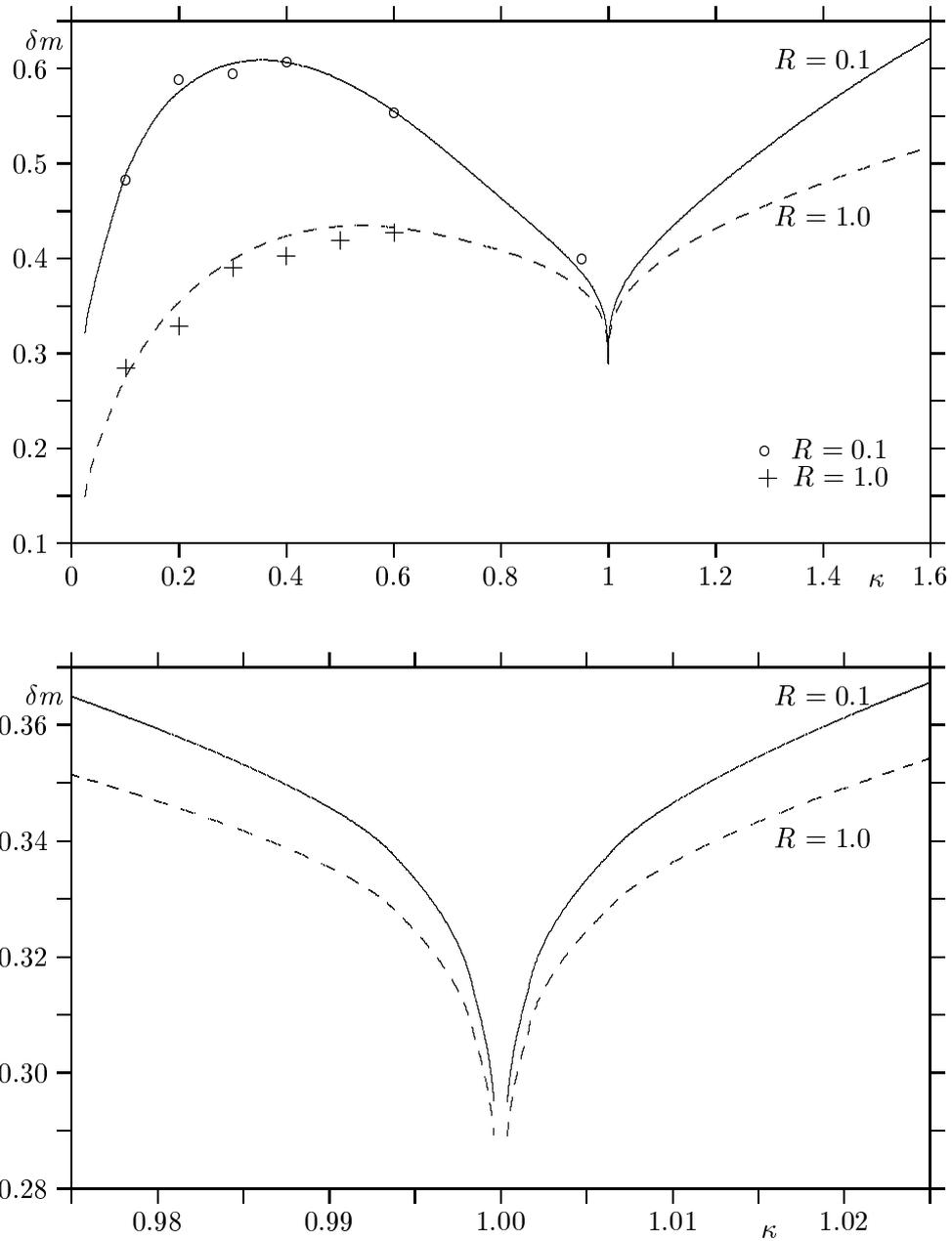


Abbildung 6: Standardabweichung der Intensität nach (1.3.54), mit (2.3.1) umgerechnet in Magnituden für Quellradius $R = 0.1$ (durchgezogene Linien) und $R = 1.0$ (gestrichelt) sowie einige mittels Strahlenschießen gewonnene Werte ($+$, \circ)
 Unten: Ausschnitt der Umgebung von $\kappa = 1$, mit berechneten Werten bei $\kappa = 1 \pm 2^{-k}/20$ für $k = 1$ bis $k = 7$

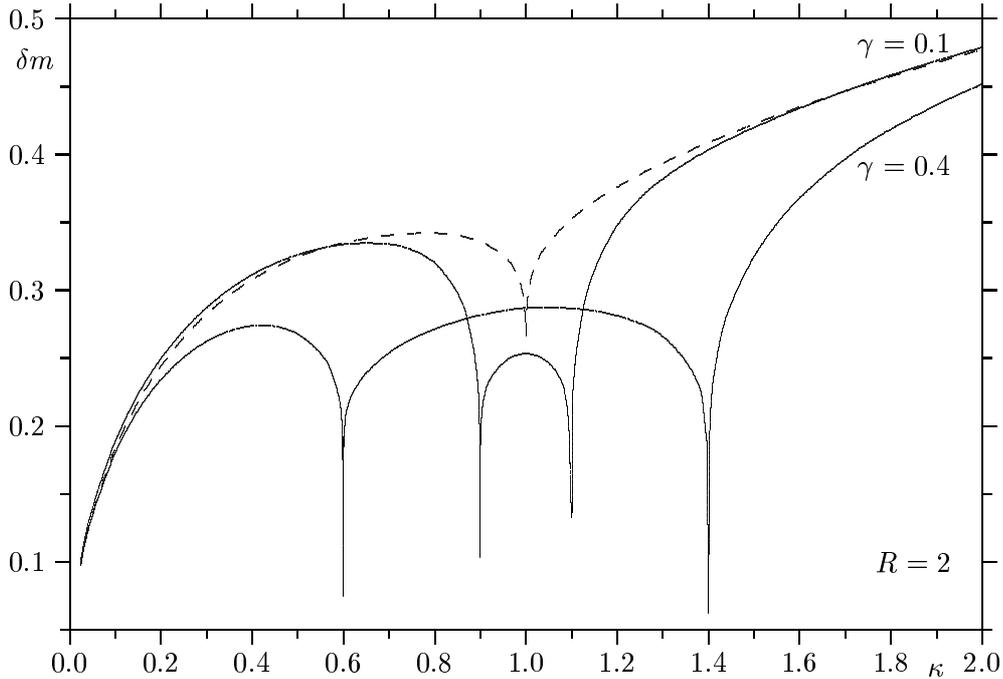


Abbildung 7: Standardabweichung der Intensität in Magnituden für Quellradius $R = 2$, $\gamma = 0.1$ und $\gamma = 0.4$ sowie zum Vergleich $\gamma = 0$ (gestrichelt)

schungsverhältnis wiederum einer einfachen Maßstabstransformation, wodurch es möglich wäre, äquivalenten Punkten in jedem der beiden mit unterschiedlichen Quellradien erstellten Teilbildern von Abbildung 8 identische Maßstabsfaktoren zuzuordnen. Tatsächlich beträgt der Unterschied für diese weniger als 2%, was dafür spricht, daß eine derartige Beziehung zumindestens näherungsweise gilt. Durch eine Darstellung der Quellgröße als Funktion der Standardabweichung bei festgehaltener Massendichte, läßt sich für jeden in Abbildung 8 angegebenen Wert eine effektive Quellgröße und damit auch der Maßstabsfaktor ermitteln. Einem Ansatz von Refsdal und Stabell [33] folgend, kann eine effektive Masse durch

$$M_{\text{eff}} := \frac{\langle M^2 \rangle}{\langle M \rangle} \quad (2.3.3)$$

definiert werden. Verglichen mit der Wurzel dieser Größe, sind die Maßstabsfaktoren bei $R = 10$ um weniger als 0.6% zu groß und bei $R = 2$ sind sie um bis zu 1.1% zu klein. Das bedeutet, daß sich bei der Berechnung der Varianz für diese Quellradien ein Massenspektrum in sehr guter Näherung durch die effektive Masse M_{eff} ersetzen läßt. Eine Überprüfung dieses Zusammenhanges für große Quellen ergab allerdings Abweichungen des ermittelten Einsteinradius aus Rechnungen mit effektiver Masse gegenüber der expliziten Berücksichtigung des Massenspektrums von bis zu 1.3% und 8.1% bei $R = 20$ bzw. $R = 40$ (gemessen in normierten und dimensionslosen Einheiten). Dabei traten die größten Abweichungen auf, wenn 90% aller Sterne jeweils weniger als 0.4 Sonnenmassen hatten.

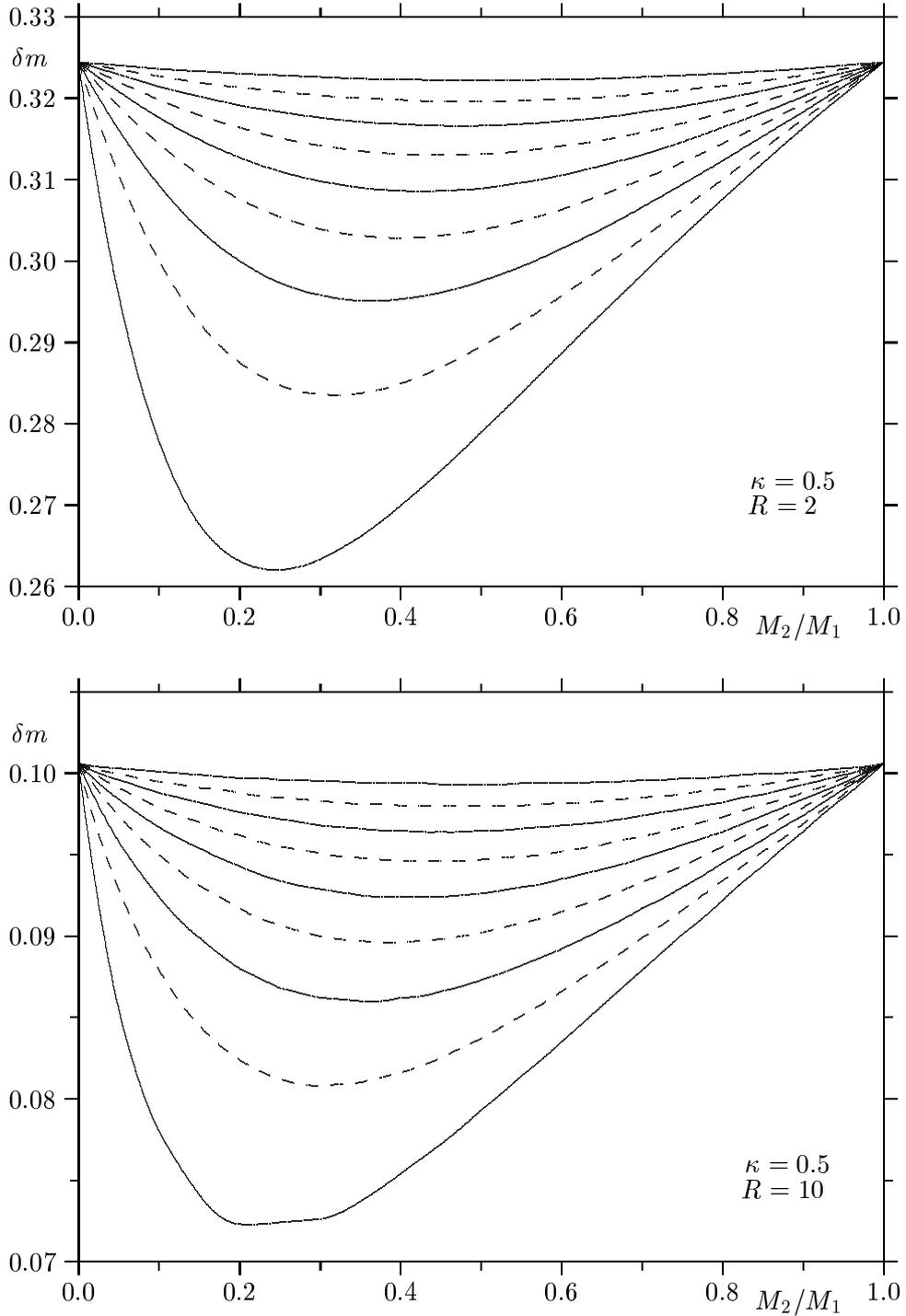


Abbildung 8: Standardabweichung der gemessenen Intensität (umgerechnet in Magnituden) bei einem zweikomponentigem Massengemisch, als Funktion des Massenverhältnis M_2/M_0 bei einem Anteil von 10% bis 90% der Sterne (von unten nach oben) mit der Masse M_1 für $\kappa = 0.5$ und $R = 2$ (oberes Bild) sowie $R = 10$ (unteres Bild). Die Größe des Einsteinradius ist dabei durch M_1 festgelegt.

2.3.4 Autokorrelationsfunktion

Die Autokorrelationsfunktion einer Lichtkurve enthält Informationen über die statistische Abhängigkeit von Helligkeitsmessungen zu verschiedenen Zeitpunkten als Funktion des zeitlichen Abstandes der Messungen. Bei den hier vorgestellten Modellrechnungen wurde der Abstand der Quellzentren als freier Parameter gewählt, so daß erst für den Vergleich mit Meßwerten die Geschwindigkeit der Quelle bestimmt werden muß. Wenn die Gesamtmassendichte κ_t und die Scherung γ durch ein Makrolinsenmodell gegeben sind, wird die Autokorrelationsfunktion für $\gamma = 0$ durch den Quellradius R und die Kontinuums-massendichte κ_c vollständig bestimmt¹⁰. Da ohne Scherung keine Richtung in der Linsenebene ausgezeichnet ist, müssen dann auch die statistischen Eigenschaften einer Lichtkurve richtungsunabhängig sein. Die Normierung mit der Varianz bewirkt, daß jede Autokorrelationsfunktion für $t = 0$ bzw. für $\vec{\zeta} = 0$ den Wert 1 hat. Als eine charakterisierende Größe für die Autokorrelationsfunktion wird die Korrelationslänge als derjenige Quellabstand definiert, bei dem die Funktion den Wert 1/2 annimmt. Wegen der zwei freien Parameter ist allerdings mindestens die Kenntnis eines weiteren Funktionswertes notwendig, um eine Modellfunktion festzulegen. Für einen Vergleich mit Autokorrelationsfunktionen aus Meßwerten muß mit der effektiven Geschwindigkeit V der Quelle (1.1.21) ein weiterer freier Parameter eingeführt werden, um die Modellfunktionen in eine Darstellung als Funktion der Zeit transformieren zu können. Nach (1.3.53, 1.3.54) hängt die Autokorrelationsfunktion vom Quadrat der Differenz der Quellkoordinaten ab und damit ergibt sich für sehr kleine Zeitintervalle in sehr guter Näherung ein quadratischer Abfall der Autokorrelationsfunktion mit zunehmendem Abstand der Quellen. Aus durchgeführten Rechnungen läßt sich entnehmen, daß bis zu einem halben bis einem Quellradius Abstand bei großen Quellen ($R > 1$) keine Abweichungen von dieser Parabelform auftreten, wogegen aus den vorliegenden Gleichungen dieses Verhalten nur für sehr viel kleinere Abstände zu erwarten war. Wird die Variabilität der Lichtkurve ausschließlich durch den Mikrolinseneffekt hervorgerufen, ist zu erwarten, daß die Korrelation zwischen zwei Messungen für große Quellen bei einem Quellabstand $|\vec{\zeta}| > 2R/|1 - \kappa|$ verschwindet, da die Verstärkung dann von zwei disjunkten Sternfeldern bewirkt wird und die Meßwerte dadurch statistisch unabhängig werden.

Durch Strahlenschießen ermittelte Werte für $\text{cor}(\mathcal{I}(Q_1), \mathcal{I}(Q_2))$ scheinen wegen der großen Streuung der Ergebnisse zunächst nahezu unkorreliert zu sein. Erst nach Normierung mit den, in derselben Meßreihe gewonnenen Werten von $\text{Var} \frac{I}{\langle I \rangle}$ kann die aus (1.3.53, 1.3.54) gewonnene Autokorrelationsfunktion auch mittels Strahlenschießen sehr genau reproduziert werden. Die Reduktion der statistischen Schwankungen durch diese Normierung wird auch bei der Untersuchung an QSO 2237+0305 im nächsten Kapitel deutlich. Trotz der zu kurzen Lichtkurven kann der mögliche Wertebereich für Quellgröße und Geschwindigkeit nach Auswertung der Autokorrelationsfunktionen sehr stark eingeschränkt werden.

¹⁰Die Massendichte in Sternen und kompakten Objekten ist schon durch $\kappa_s = \kappa_t - \kappa_c$ festgelegt.

Zur Beschreibung der Modellautokorrelationsfunktionen muß bei vorhandener Scherung $\gamma \neq 0$ zusätzlich der Winkel zwischen Bewegungsrichtung und Scherung berücksichtigt werden, denn durch den Scherungsterm in der Linsengleichung wird die Richtungsunabhängigkeit der Autokorrelationsfunktion aufgehoben. Ein kreisförmiges Bild wird dadurch zu einer Ellipse verformt. Mit der Wahl des Vorzeichens von γ in (1.1.10) wird bei einer Punktmasse im Koordinatenzentrum die Richtung senkrecht zum Ortsvektor des betrachteten Bildpunktes als die Scherungsrichtung definiert. Ohne Überfokussierung verläuft die Scherungsrichtung mit $|1 - \kappa - \gamma| < |1 - \kappa + \gamma|$ parallel zur großen Hauptachse eines elliptischen Bildes. Dabei wächst die Korrelationslänge in dieser Richtung, während sie in der Richtung orthogonal zur Scherung kleiner wird. Entlang der Winkelhalbierenden unterscheiden sich die Ergebnisse von den mit $\gamma = 0$ berechneten Werten um weniger als ein Prozent innerhalb der Korrelationslänge, für größere Quellabstände wird die Autokorrelationsfunktion durch den Scherungsterm verkleinert. Die deutlichsten Auswirkungen sind im rechten oberen Teil von Abbildung 10 angedeutet, wo bei $\kappa = 0.5$ und $\gamma = 0.4$ die Korrelationslänge parallel zur Scherung 200 Einsteinradien beträgt, was in diesem Fall einem 20-fachen Quellradius entspricht, und in dem gewählten Maßstab nicht mehr darstellbar ist. Allerdings ist bei dieser Korrelationslänge zu berücksichtigen, daß die Länge der großen Halbachse der Ellipse mit $R/|1 - \kappa - \gamma| = 100$ der halben Korrelationslänge entspricht.

Der untere Teil der Abbildung 10 zeigt einige Ergebnisse von Beispielrechnungen. Das linke Bild verdeutlicht, daß auch für unterschiedliche Makrolinsenparameter κ_t und γ' nahezu übereinstimmende Autokorrelationsfunktionen existieren, und daher die genaue Kenntnis eines Makrolinsenmodells für erfolgreiche Modellrechnungen notwendig ist. Die rechte Skizze zeigt für Bild A vom Einsteinkreuz (QSO 2237+0305) die Bestapproximation mit $R = 0.2$ und $\psi = 18^\circ$ (obere durchgezogene Linie). Die Autokorrelationsfunktion für $R = 1$ und $\psi = 0^\circ$ (untere punktierte Linie) verläuft deutlich unterhalb dieser Kurve und oberhalb von allen anderen Modellfunktionen mit $R \geq 1$. Während Modelle mit großen Quellradien dadurch ausgeschlossen werden können, gibt es verschiedene Modellfunktionen für kleinere Quellen, die sich für kleine Zeiten t nur geringfügig voneinander unterscheiden. Die Abweichungen der Funktionen voneinander werden erst bei längeren Autokorrelationsfunktionen signifikant und der Vergleich der Modellfunktionen ermöglicht es die Länge der Autokorrelationsfunktion aus Meßdaten abzuschätzen, welche notwendig ist, um die Mikrolinsenparameter eindeutig festlegen zu können.

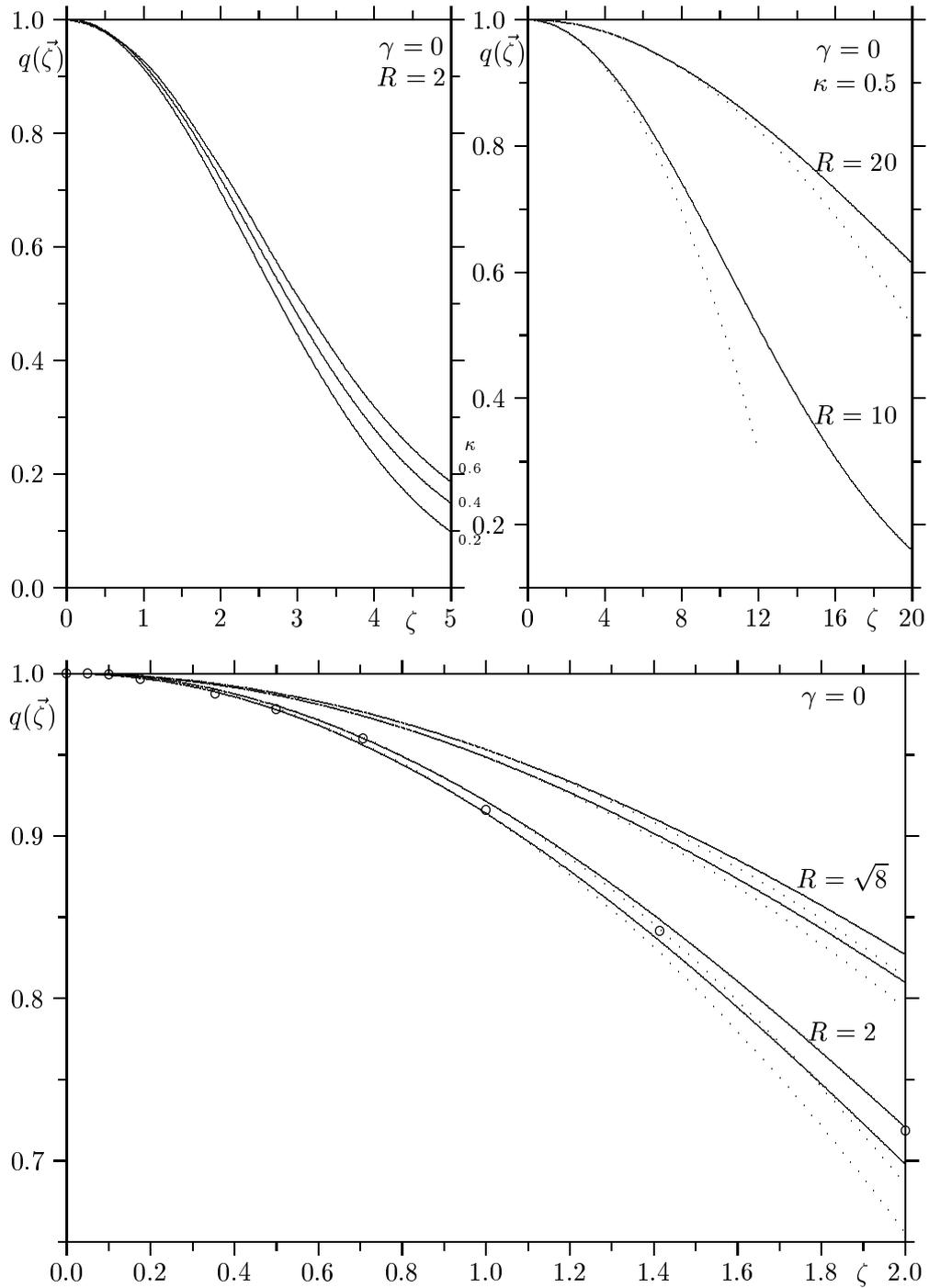


Abbildung 9: Oben links: Autokorrelationsfunktion für $R = 2$, $\kappa = 0.2, 0.4$ und 0.6 (von unten nach oben); rechts: $\kappa = 0.5$ für $R = 10$ und $R = 20$ zusammen mit je einer quadratischen Näherung (punktiert)
 Unten: $\kappa = 0.2$ und $\kappa = 0.4$ (jeweils von unten nach oben) für $R = 2$ und $R = \sqrt{8}$, sowie jeweils eine quadratische Näherung (punktiert) und mittels Strahlenschießen gewonnene Ergebnisse für $R = 2$ mit $\kappa = 0.2$ (Kreise)

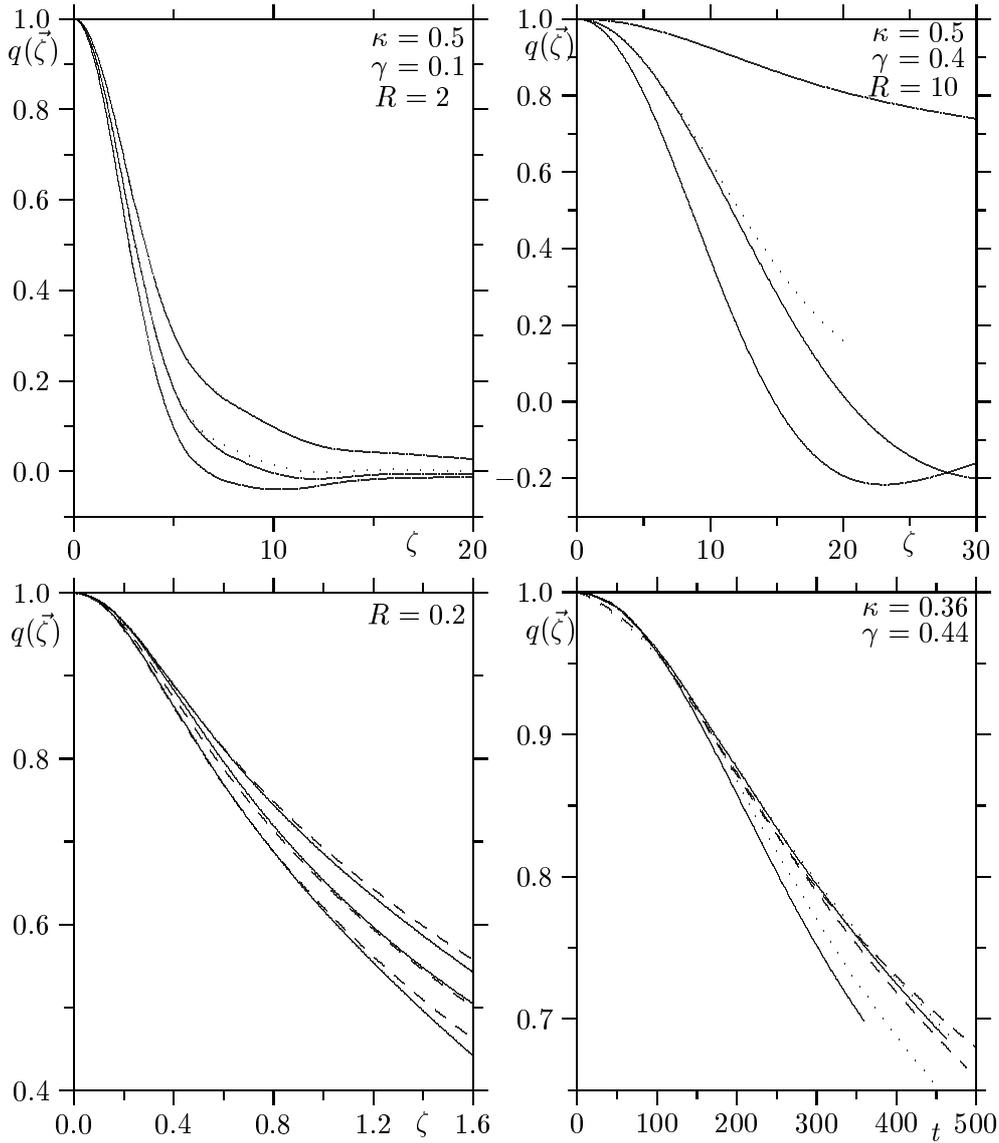


Abbildung 10: Oben links: Autokorrelationsfunktion für $R = 2$, $\kappa = 0.5$ und $\gamma = 0.1$ senkrecht, im Winkel $\pi/4$ und parallel zur Scherung (von unten nach oben), sowie für $\gamma = 0$ zum Vergleich (punktiert); rechts: Wie links, aber für $R = 10$ und $\gamma = 0.4$; Unten: Modellfunktionen für QSO 2237+0305 links: Bild A, $\psi = 18^\circ$ und $\psi = 27^\circ$ (obere und untere durchgezogene Linie); Bild B, $\psi = 9^\circ$ (obere gestrichelte Linie); Bild C, $\psi = 9^\circ$ und $\psi = 18^\circ$ (untere zwei gestrichelte Linien); Bild D, $\psi = 9^\circ$ (mittlere durchgezogene Linie); rechts: Bestapproximationen für die Autokorrelationsfunktion von Bild A mit verschiedenen Quellgrößen: $R = 10$, $\psi = 0^\circ$ (untere durchgezogene Linie); $R = 1$, $\psi = 0^\circ$ (untere punktierte Linie); $R = 0.5$, $\psi = 0^\circ$ (untere gestrichelte Linie); $R = 0.3$, $\psi = 9^\circ$ (obere punktierte Linie); $R = 0.2$, $\psi = 18^\circ$ (obere durchgezogene Linie); $R = 0.1$, $\psi = 18^\circ$ (obere gestrichelte Linie)

3 Untersuchung des Mikrolinseneffektes bei Quasaren

Die normierte Linsengleichung (1.1.12) hängt weder von einem kosmologischen Modell noch von einem speziellen Linsenmodell ab. Neben Quellgröße, Scherung und der dimensionslosen Flächenmassendichte in Sternen und kompakten Objekten bleibt bei einer wahrscheinlichkeitstheoretischen Analyse nur noch das Massenspektrum als freier Parameter. Dieses kann aber, näherungsweise durch die effektive Masse ausgedrückt, in die Definition des Einsteinradius einbezogen werden. Für die Berechnung der Autokorrelationsfunktion werden zusätzlich Betrag und Richtung der Relativgeschwindigkeit von Beobachter, Linse und Strahlungsquelle benötigt. Werden mittels eines Makrolinsenmodelles die Gesamtmassendichte und die Scherung an den Bildpositionen eines Mehrfachquasars bestimmt und aus einer ausreichend langen Lichtkurve Varianz und Autokorrelationsfunktion berechnet, können im Prinzip durch Vergleich mit auf theoretischem Wege bestimmten Werten die freien Parameter ermittelt, oder bei Entartung deren möglicher Wertebereich festgelegt werden. Dazu kann z.B. die Differenz von empirischer Autokorrelationsfunktion und numerisch bestimmten Modellfunktionen bezüglich einer gewählten Norm minimiert werden, um so eine Bestapproximation zu ermitteln. Die gemessene Varianz alleine kann bei unbekanntem $\kappa_s \leq \kappa_t$ nur eine Obergrenze für die Quellgröße – gemessen in Einsteinradien – festlegen, wobei die Längeneinheit wegen der unbekanntenen effektiven Masse nicht bestimmbar ist.

Zusätzlich zum Mikrolinseneffekt und intrinsischer Quasarvariabilität tragen auch Meßfehler additiv zur Varianz einer gemessenen Lichtkurve bei, so daß besonders bei geringer Variabilität die Varianz zusätzlich vergrößert wird. Daher können durch eine statistische Analyse Informationen zuerst nur aus den Autokorrelationsfunktionen für die einzelnen Makrobilder abgeleitet werden, da diese nur über die Normierung mit der Varianz von den unkorrelierten Fehlern abhängt. Das hier vorgestellte numerische Modell beschreibt eine Autokorrelationsfunktion als Funktion vom Quadrat des Abstandes $|\vec{\zeta}|$ zweier Punkte in der Quellebene. Durch die Festlegung einer Geschwindigkeit \vec{V} erfolgt mit $\vec{\zeta} = \vec{V} t$ eine Abbildung auf die, als Funktion der Zeit dargestellte und aus Beobachtungsdaten berechnete empirische Autokorrelationsfunktion. Hier beschreibt (1.1.21) die, von einem Beobachter gemessene Geschwindigkeit der Lichtquelle relativ zur optischen Achse vom Beobachter durchs Linsenzentrum, wie bei Kayser, Refsdal und Stabell [18] dargestellt. Durch geeignete Wahl der Mikrolinsenparameter (Quellgröße $\Delta \equiv R^2$, normalisierte Massendichte in Sternen und kompakten Objekten $\kappa = \kappa_s / (1 - \kappa_c)$ und des Betrages des Winkels zwischen Bewegungsrichtung und lokaler Scherung ψ) muß dann für gegebene Gesamtmassendichte κ_t und Scherung γ' eine Bestapproximation für die Autokorrelationsfunktion bestimmt werden.

Wenn die Pekuliarbewegung der Sterne in der Linsengalaxie vernachlässigt werden kann, muß die Bewegungsrichtung in allen Bildern die gleiche sein. Dieses trifft z.B. auf den im Abschnitt 3.3 untersuchten Doppelquasar B1600+434 zu, bei dem die relativistische Elektronengeschwindigkeit in einem Radiojet zu einer scheinbar überlichtschnellen Transversalgeschwindigkeit führt, im Vergleich zu der die Pekuliargeschwindigkeiten der einzelnen Sterne vernachlässigt

bar klein sind. Sofern die Richtung der lokalen Scherung aus dem Makrolinsenmodell ermittelbar ist, kann dann das Mikrolinsenmodell durch Vergleich der Winkel zwischen Scherung und der Richtung der Bewegung in den einzelnen Bildern auf Konsistenz untersucht werden. Diese Möglichkeit ist auch bei elliptischen Linsengalaxien in Betracht zu ziehen, da hier durch vorwiegend ungeordnete Eigenbewegung der Sterne keine bevorzugte Richtung existiert. Um die Relativbewegung der Sterne in der Linsengalaxie berücksichtigen zu können, muß der im ersten Kapitel vorgestellte wahrscheinlichkeitstheoretische Ansatz modifiziert werden. Dabei wird die Korrelationsfunktion für die Lichtablenkung (1.3.1, 1.3.2) zeitabhängig und kann damit im Rahmen des hier vorgestellten Verfahrens nicht untersucht werden.

Wird der Linseneffekt durch eine Spiralgalaxie verursacht, dann dominiert die Eigenrotation der gesamten Galaxienscheibe die Bewegung der Sterne relativ zum Galaxienzentrum, was sich besonders für einen Beobachter auswirkt, welcher auf die Fläche der Galaxienscheibe (face-on) blickt, da für ihn die effektive Transversalgeschwindigkeit in den einzelnen Bildern in Betrag und Richtung unterschiedlich ist. In diesem Fall muß die Projektion der Rotationsgeschwindigkeit auf die Linsenebene zur Schwerpunktgeschwindigkeit \vec{v}_d addiert werden [18], woraus für die einzelnen Makrobilder unterschiedliche effektive Geschwindigkeiten \vec{V} resultieren, und eine Überprüfung der Ergebnisse erschwert wird. Beim QSO 2245+0305 befinden sich die vier Bilder allerdings so nahe am Galaxienkern, daß die Rotationsgeschwindigkeit nur geringen Einfluß hat. Die Streuung der aus den Einzelbildern ermittelten Quellradien bietet ein Maß für die Qualität der Approximation, hängt aber auch entscheidend von einer ausreichenden Länge der Lichtkurve und der Häufigkeit von Messungen ab. Da für die Berechnung von Varianz und Autokorrelationsfunktion nur Längen in Einheiten des Einsteinradius eingehen, ist es prinzipiell nicht möglich, ohne zusätzliche Informationen die effektive Masse der kompakten Objekte und damit eine absolute Längeneinheit zu ermitteln. Dafür müßte z.B. durch einen zweiten, genügend weit entfernten Beobachter der von Refsdal [32] beschriebene Parallaxeneffekt genutzt werden.

3.1 Statistische Analyse gemessener Lichtkurven

Ein zusätzliches Problem bei der Bestimmung der Mikrolinsenparameter besteht darin, daß sowohl Mikrolinseneffekt als auch intrinsische Variabilität der Lichtquelle zur Varianz einer gemessenen Lichtkurve beitragen. Ihre Wirkung kann nur bei Mehrfachbildern im Prinzip unterschieden werden, da der Beitrag der intrinsischen Variabilität sich in der Korrelation zweier entsprechend der unterschiedlichen Lichtlaufzeit zeitversetzt beobachteten Bilder widerspiegelt, während der Mikrolinseneffekt in verschiedenen Bildern unkorreliert ist. Wegen der sehr kleinen Ablenkungswinkel, durchläuft das Licht aller Bilder innerhalb der host-galaxy den gleichen Raumbereich und der Einfluß der Materie auf die Strahlung zeigt sich korreliert in allen Makrobildern entsprechend der Lichtlaufzeitdifferenz zeitversetzt. Lokale Bedingungen in der Linsengalaxie, welche eine Variabilität der hindurchgehenden Strahlung verursachen, wie z.B. Szintillation im Radiofrequenzbereich, die ebenso wie der Mikrolinseneffekt

nur jeweils ein Bild beeinflussen, können demgegenüber das Ergebnis dieser Analyse verfälschen, sofern es nicht gelingt, den Einfluß dieser Effekte auf die Lichtkurven z.B. auf Grund ihrer unterschiedlichen Zeitskalen oder Frequenzabhängigkeit von der Wirkung des Mikrolinseneffektes zu unterscheiden. Dieser Aspekt muß bei der Untersuchung einzelner Lichtkurven berücksichtigt werden, da diese Einflüsse nicht a priori separiert werden können.

3.1.1 Berücksichtigung intrinsischer Variabilität

Wenn die gemessene Intensität als Produkt von Verstärkung durch den Linseneffekt und der davon statistisch unabhängigen intrinsischen Intensität dargestellt werden kann, gilt mit den Ansätzen $I(t) = \mu(t) \cdot I_0(t)$ und den Erwartungswerten $\langle I \rangle = \langle \mu \rangle \cdot \langle I_0 \rangle$ für jedes Bildpaar j, k :

$$\left\langle \frac{I_j(t)I_k(t)}{\langle I_j(t) \rangle \langle I_k(t) \rangle} \right\rangle = \left\langle \frac{I_0^2(t)}{\langle I_0(t) \rangle^2} \right\rangle \equiv 1 + \text{Var} \frac{I_0}{\langle I_0 \rangle}, \quad (3.1.1)$$

da die Verstärkung durch den Mikrolinseneffekt in den verschiedenen Makrobildern unkorreliert ist. Da an Stelle der Erwartungswerte in der Praxis nur Näherungswerte durch Mittelwertbildung aus einer endlichen Datenmenge zur Verfügung stehen, wird diese Beziehung nie exakt erfüllt sein. Die Streuung für die einzelnen Mittelwerte kann dabei aus der Verteilung der Ergebnisse für die Untersuchungen an Teilmengen der verfügbaren Daten abgeleitet werden. Wenn die Datenmenge für eine zuverlässige Statistik nicht ausreichend ist, wird sich die statistische Unabhängigkeit von intrinsischer Variabilität und Verstärkung in den verschiedenen Bildern nicht anhand der Lichtkurven nachweisen lassen können. Eine weitere Möglichkeit zur Überprüfung des Ergebnisses besteht, wenn mehr als zwei Makrobilder existieren, und die Kreuzkorrelation zwischen verschiedenen Bildpaaren verglichen werden kann. Prinzipiell läßt sich mit diesem Ansatz auch die Korrelation zu verschiedenen Zeiten und damit eine Autokorrelationsfunktion für die intrinsische Variabilität ermitteln.

Die Helligkeitsdifferenz zweier Bilder in Magnituden oder der Quotient ihrer Intensitäten nach Berücksichtigung des Time-delays sind demgegenüber unabhängig von der intrinsischen Variabilität der Quelle, können aber mit dem vorgestellten wahrscheinlichkeitstheoretischen Ansatz nicht ausgewertet werden, da Varianz und Autokorrelationsfunktion eines Quotienten von den höheren Momenten der Wahrscheinlichkeitsverteilung abhängen, und eine Berechnung auf numerischem Wege durch zu grossen Speicherplatz- und Rechenzeitbedarf nicht realistisch ist.

Eine weitere Möglichkeit mit der der Mikrolinseneffekt analysiert werden kann, besteht darin, die für die jeweilige Linsensituation geeignet normierten Lichtkurven der einzelnen Bilder auszuwerten und für jedes Bild den Erwartungswert von

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{I^2(t)}{\langle I(t) \rangle^2} \right\rangle &= \left\langle \frac{I_0^2(t)}{\langle I_0(t) \rangle^2} \right\rangle \left\langle \frac{\mu^2(t)}{\langle \mu \rangle^2} \right\rangle \\ \iff (1 + \text{Var} \frac{I}{\langle I \rangle}) &= (1 + \text{Var} \frac{I_0}{\langle I_0 \rangle}) (1 + \text{Var} \frac{\mu}{\langle \mu \rangle}) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

zu bilden.

Die Quotienten dieser Ausdrücke aus verschiedenen Bildern sind dann unabhängig von dem intrinsischen Verhalten der Quelle. Eine derartige Zerlegung kann mit

$$\left\langle \frac{I(t_1)I(t_2)}{\langle I(t) \rangle^2} \right\rangle = \left\langle \frac{I_0(t_1)I_0(t_2)}{\langle I_0(t) \rangle^2} \right\rangle \left\langle \frac{\mu(t_1)\mu(t_2)}{\langle \mu(t) \rangle^2} \right\rangle \quad (3.1.3)$$

für eine Korrelationsfunktion ebenfalls erreicht werden. Um die Modellparameter aus diesen Quotienten zu bestimmen, müssen jeweils zwei Bilder gleichzeitig modelliert werden. Bei der Untersuchung eines einzelnen Makrobildes wird für geeignete Werte von κ_c , R und ψ eine Modellautokorrelationsfunktion nach (1.3.54, 1.3.53) berechnet, um dann durch den Vergleich mit der Autokorrelationsfunktion aus den Daten eine effektive Transversalgeschwindigkeit und die Qualität des gewählten Modelles nach (3.2.6) zu ermitteln. Da die Berechnung der Modellfunktion den größten Anteil der Rechenzeit benötigt, ist eine geeignete Strategie zur Bestimmung der drei Ausgangsparameter (κ_c , R , ψ) notwendig. Bei gleichzeitiger Auswertung von zwei Makrobildern müssen zwei Parameter Tripel für die Berechnung zweier Modellfunktionen gleichzeitig festgelegt werden, was eine Suchstrategie in einem sechsdimensionalen Parameterraum erfordert. Für einen Vergleich mit den vorliegenden Daten ist danach die gleichzeitige Ermittlung der Transversalgeschwindigkeiten in den Bildern erforderlich. Hier sind noch ausgiebige Untersuchungen notwendig, um den Autokorrelationsfunktionen ihren vollständigen Informationsgehalt entnehmen zu können, da bei einem derartigen Ansatz zusätzlich zwei Bestimmungsgleichungen entfallen. Wenn es gelingt die intrinsische Variabilität mit ausreichender Genauigkeit zu ermitteln, dann besteht die Möglichkeit durch Einsetzen des Ergebnisses in (3.1.2, 3.1.3) Varianz und Autokorrelationsfunktion der Verstärkung durch den Mikrolinseneffekt zu berechnen. Bei den in den nächsten Abschnitten untersuchten Lichtkurven der Mehrfachquasare QSO 2245+0305 und B1600+434 kann eine derartige Genauigkeit nicht erreicht werden.

3.1.2 Untersuchung einer idealen Lichtkurve

Ist eine Lichtkurve unabhängig von intrinsischer Variabilität der Quelle, oder wurden entsprechend (3.1.1) ihre Varianz und Autokorrelationsfunktion ermittelt und bei der Auswertung von (3.1.2, 3.1.3) berücksichtigt, dann wird die Autokorrelationsfunktion vor allem durch die Quellgröße und die Richtung der Bewegung gegenüber der Scherung bestimmt. (Bei sehr kleiner Scherung $\gamma \ll 0.1$ hat die Richtung der Bewegung keine meßbare Bedeutung mehr.) Abbildung 9 macht deutlich, daß die Massendichte im Vergleich dazu einen deutlich kleineren Einfluß auf den Funktionsverlauf hat.

Aus (1.3.53, 1.3.54) folgt, daß für eine Autokorrelationsfunktion des Mikrolinseneffektes $q(\vec{\zeta})$ mit $\vec{\zeta} = \vec{\zeta}_2 - \vec{\zeta}_1$ eine Reihenentwicklung nach ζ^2 in der Form

$$q(\vec{\zeta}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} q_j(\psi; \Delta, \kappa) \zeta^{2j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} q_j(\psi; \Delta, \kappa) (Vt)^{2j} \quad (3.1.4)$$

möglich ist. Dabei ist V der Betrag der Geschwindigkeit in Einsteinradien pro Zeiteinheit. Er kann durch die Gleichsetzung des ersten Koeffizienten der Reihe

mit dem entsprechenden Term in der Entwicklung der aus Messungen gewonnenen Autokorrelationsfunktion bestimmt werden. Für diese gilt bei gemessener Flußdichte $I_n := I(t_n)$ für $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots \leq t_{N-k}$

$$f(t_k) := \frac{\sum_{n=1}^{N-k} I_n I_{n+k} - \frac{1}{N-k} \left(\sum_{n=1}^{N-k} I_n \right) \left(\sum_{n=1}^{N-k} I_{n+k} \right)}{\sqrt{\left(\sum_{n=1}^{N-k} I_n^2 \right) \left(\sum_{n=1}^{N-k} I_{n+k}^2 \right) - \frac{1}{N-k} \left(\sum_{n=1}^{N-k} I_n \right) \left(\sum_{n=1}^{N-k} I_{n+k} \right)}}. \quad (3.1.5)$$

Sofern die Variabilität einer gemessenen Lichtkurve nur durch den Mikrolinseneffekt hervorgerufen wird, gibt es für deren Autokorrelationsfunktion eine Reihenentwicklung nach t^2 in der Form

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} f_j t^{2j}. \quad (3.1.6)$$

Der führende Koeffizient kann aus einem Regressionspolynom durch die Funktionswerte $f(t_k)$ ermittelt werden. Durch den Vergleich mit einer vollständigen Reihenentwicklung bei Berücksichtigung der ungeraden Potenzen in t kann der Einfluß abgeschätzt werden, den andere Effekte wie z.B. Meßfehler auf die empirische Autokorrelationsfunktion haben. Besonders ein linearer Term in der Reihe dominiert für kleine t und wird daher auch bei einer graphischen Darstellung der Funktion sichtbar (vgl. Abb. 15). Aus der Normierung folgt $f_0 = q_0 = 1$ und ein Koeffizientenvergleich ergibt

$$V = V(\psi; \Delta, \kappa) = \sqrt{\frac{f_1}{q_1(\psi; \Delta, \kappa)}}. \quad (3.1.7)$$

Das bedeutet gleichzeitig, daß für alle willkürlich gewählten Mikrolinsenparameter ein Wert für die Geschwindigkeit V festgelegt werden kann, mit dem bei kleinen Zeiten t die Autokorrelationsfunktionen aus Messungen und Modellrechnungen übereinstimmen. Für die Berechnung der Norm $\|q(\vec{V}t) - f(t)\|$ folgt durch diesen Ansatz für die Bestimmung der Geschwindigkeit ein größeres Gewicht der Differenzen bei großen Argumenten, da für kleine Zeiten t eine sehr große Übereinstimmung der Funktionen erzwungen wird. Zusätzlich wird dadurch sichergestellt, daß die berechnete Geschwindigkeit nur von der empirischen Autokorrelationsfunktion bei kleinen Argumenten abhängt. Die Anzahl der Daten, aus denen durch Mittelwertbildung die einzelnen Funktionswerte berechnet werden, nimmt mit wachsendem t ab, so daß durch diesen Ansatz die bestmögliche statistische Grundlage für die Ermittlung der Geschwindigkeit gewährleistet wird.

Aussagen über die Quellgröße, die Bewegungsrichtung oder gar die Massendichte können erst getroffen werden, wenn bei ausreichender Länge der Lichtkurve Terme höherer Ordnung in der Reihenentwicklung der Autokorrelationsfunktion relevant werden. Dabei liefern die Differenzen

$$\delta V_j := \left(\frac{f_j}{q_j(\psi; \Delta, \kappa)} \right)^{\frac{1}{2j}} - V \quad \text{für } j > 1 \quad (3.1.8)$$

ein weiteres Maß für die Qualität der Mikrolinsenmodelle, wobei durchgeführte Rechnungen zeigen, daß nur die Approximation bezüglich einer Norm zu einer auch quantitativen Übereinstimmung der Funktionen führt.

Zur Kontrolle wurde für alle Modellfunktionen mit der Geschwindigkeit als freiem Parameter der Minimalabstand zur Autokorrelationsfunktion aus den Meßdaten bestimmt. Als Startwert diente die aus der Reihenentwicklung ermittelte Geschwindigkeit. Dieser Ansatz führt zu einem verringerten Abstand zwischen der Autokorrelationsfunktion aus Daten und den Modellfunktionen, wobei die Mikrolinsenparameter für die Bestapproximation höchstens um wenige Prozent variieren¹¹.

3.2 Der Mikrolinseneffekt beim Einsteinkreuz

Das Einsteinkreuz, welches nach einem seiner Entdecker auch Huchras Linse genannt wird, bietet sehr gute Voraussetzungen für eine Analyse des Mikrolinseneffektes. Der Quasar QSO 2237+0305 mit $z = 1.695$ befindet sich direkt hinter dem Kern einer Spiralgalaxie mit $z = 0.0394$ und seine vier Bilder umgeben diesen in einer regelmäßigen Form als Endpunkte eines Kreuzes, wie der Name andeutet. Durch diese symmetrische Anordnung unterscheiden sich die Längen der einzelnen Lichtwege nur geringfügig und der Unterschied der Lichtlaufzeit, der Time-delay, beträgt weniger als ein Tag (Chae et al. 1998 [4]). Damit ist es möglich innerhalb sehr kurzer Zeit festzustellen, ob Helligkeitsänderungen in allen Bildern auftreten und damit durch die intrinsische Variabilität des Quasars verursacht werden, oder ob es sich um Auswirkungen des Mikrolinseneffektes handelt, bei dem jedes Ereignis nur in jeweils einem der Bilder beobachtet werden kann. Ferner bietet eine Zahl von mehr als zwei Bildern die Möglichkeit, einzelne auffällige Ereignisse hoher Verstärkung eindeutig einem der Bilder zuzuordnen, während bei einem Doppelquasar mit intrinsischen Helligkeitsschwankungen oftmals nur die um den Time-delay korrigierte Differenz der Helligkeiten eindeutig dem Mikrolinseneffekt zugeordnet werden kann, und es unbekannt bleibt, in welchem der Bilder dieser Effekt auftritt. Der entscheidende Vorzug, der QSO 2237+0305 gegenüber allen anderen bisher im optischen Spektralbereich beobachtbaren Gravitationslinsensystemen auszeichnet, besteht jedoch darin, daß sich die Relativbewegung von Beobachter, Linse und Quasar wegen des Entfernungsdifferenzes Beobachter-Quelle gegenüber der Distanz Beobachter-Linse ($D_s \gg D_d$) in einer deutlichen Erhöhung der vom Beobachter wahrnehmbaren Transversalgeschwindigkeit niederschlägt und damit zu einer im Vergleich zu anderen Linsensystemen wesentlich verkürzten Zeitskala der durch den Mikrolinseneffekt verursachten Variabilität führt.

3.2.1 Beobachtungsdaten und Linsenmodelle

Nachdem der Vierfachquasar 2237+0305 in den ersten zwölf Jahren nach seiner Entdeckung nur in unregelmäßigen Zeitabständen und von unterschiedlichen Arbeitsgruppen in den verschiedenen Spektralbereichen beobachtet worden war,

¹¹in einem Fall wurde bei einer um 8.1% kleineren Geschwindigkeit ein um 9° größerer Winkel ermittelt, ansonsten blieb die Änderung der Werte deutlich kleiner.

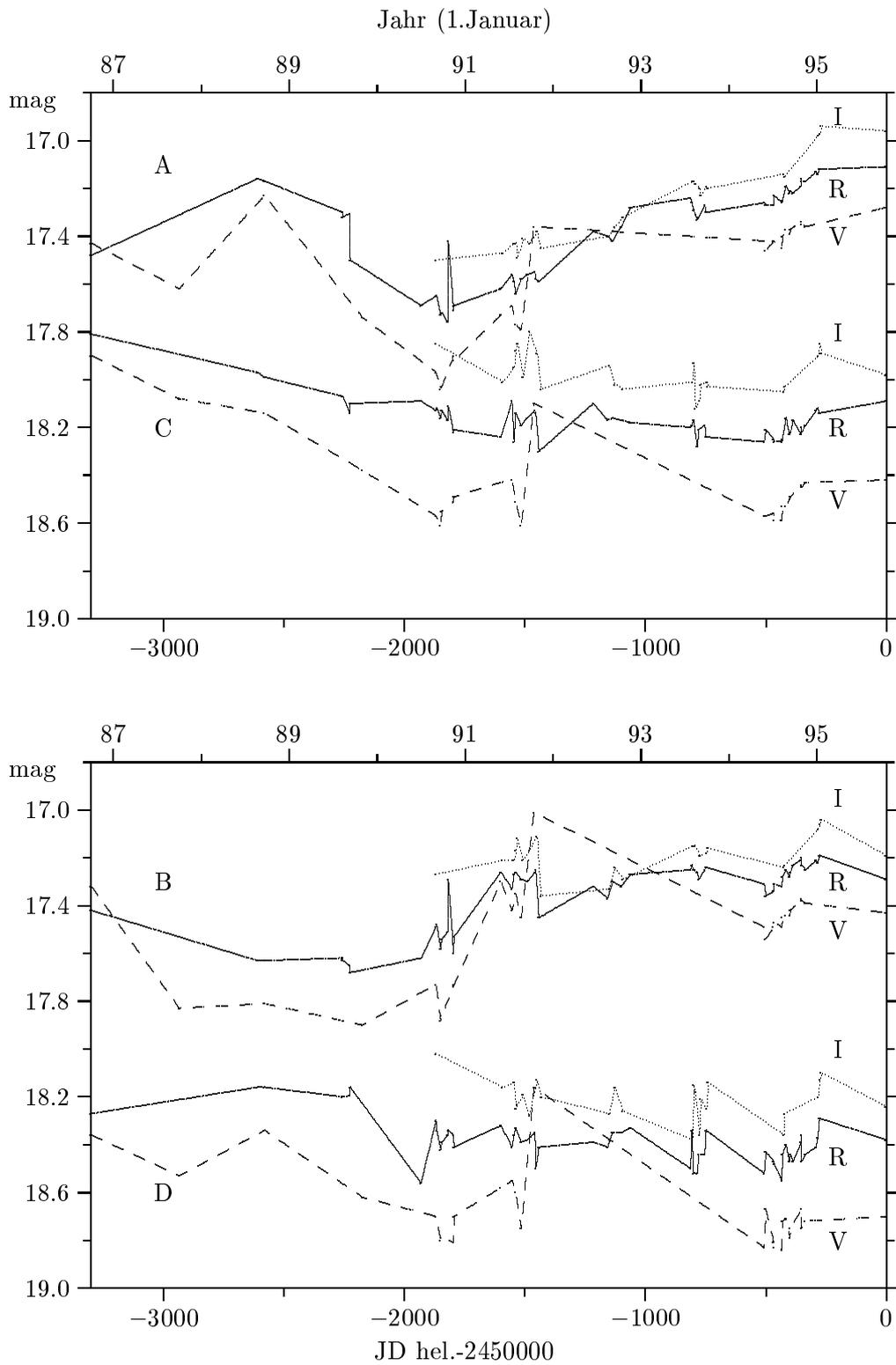


Abbildung 11: Lichtkurven vom Einsteinkreuz im V, R und I-Band (in Magnituden), vom 28.9.1986 bis 10.10.1995, Zeitskala wie original OGLE-Daten; 0 entspricht dem 10.10.1995; oben: Bild A und C; unten Bild B und D

haben Woźniak et al. [49] im Rahmen des OGLE Monitoring Programmes am Las Campanas Observatorium in Chile 1997 begonnen, möglichst regelmäßige photometrische Messungen am Einsteinkreuz durchzuführen, und eine Lichtkurve im visuellen Bereich des Spektrums, welche im Oktober 2000 am Ende der Beobachtungsperiode aus 229 Einzelmessungen bestand, unter der Adresse

`ftp://www.astro.princeton.edu/ogle/ogle2/huchra/phot.dat`

veröffentlicht. Damit handelt es sich um die umfangreichste Meßreihe, welche vom Einsteinkreuz existiert. Weitere 21 Meßwerte, die in die hier vorgestellte Analyse einbezogen werden, entstammen dem Monitoring Programm von Østensen et al. [26] am NOT aus den Jahren 1990-91 sowie 1994 und je einen weiteren Datenpunkt liefern Messungen von Racine [30] im Oktober 1991 und Burud et al. [3] im Oktober 1995. Für die Jahre 1986-89 existiert jeweils eine Messung von Corrigan et al. [8] im visuellen Bereich, so daß die vollständige hier verwendete Lichtkurve aus dem optischen Bereich einen Zeitraum von insgesamt vierzehn Jahren umfaßt. Die OGLE-Daten enthalten jeweils zwei innerhalb weniger Minuten ermittelte Meßwerte (für 1997 sogar drei), deren Mittelwert hier für die weitere Analyse verwendet wird. Damit stehen für die folgenden Untersuchungen 135 zeitlich unregelmäßig über vierzehn Jahre verteilte Meßwerte zur Verfügung. Während die frühen Messungen einen Abstand von zum Teil über einem Jahr haben, wurden die OGLE-Aufnahmen im Mittel alle elf Tage durchgeführt, wobei im ersten Quartal eines jeden Jahres keine Beobachtungen an QSO 2237+0305 möglich sind, und dadurch eine regelmäßige Observation des Quasars verhindert wird.

Von Østensen et al. [26] stammen Lichtkurven im I-Band (24 Werte) und im R-Band (44 Werte). Zusätzlich existiert bei beiden Frequenzen jeweils eine Messung von Burud et al. [3] für Oktober 1995. Weiterhin gibt es aus dem Jahr 1990 im R-Band zwei photometrische Messungen von Houde und Racine [13] und eine von Rix et al. [35]. Zusammen mit weiteren acht Meßwerten von Corrigan et al. [8] von 1986-89 umfaßt diese Lichtkurve etwas mehr als neun Jahre und 48 Datenpunkte. Eine Lichtkurve im blauen Spektralbereich umfaßt 7 Jahre, wobei dieser Wert nur aus der Einbeziehung einer Messung im Jahr 1995 von Burud et al. [3] resultiert, während die übrigen 14 Messungen von Corrigan et al. [8] und eine weitere von Crane et al. [9] innerhalb von zwei Jahren durchgeführt wurden. Ein Vergleich der Lichtkurven verschiedener Farben zeigt deutlich, daß die mittlere Helligkeit mit steigender Wellenlänge zunimmt. Um die Messungen in verschiedenen Frequenzen zu einer einzigen Lichtkurve zusammenfassen zu können, müssen daher die notwendigen Korrekturen für die frequenzabhängige Emission des Quasars und die Absorption entlang des Lichtweges bestimmt werden, wie 1994 von Houde und Racine [13] vorgeschlagen wurde. Da zusätzlich die Möglichkeit besteht, daß der effektive Quellradius ebenfalls von der beobachteten Wellenlänge abhängt, wodurch der Mikrolinseneffekt auf indirektem Wege frequenzabhängig wird, bleibt die folgende Untersuchung auf die, nach Farben getrennten Lichtkurven beschränkt, wobei wegen Kurvenlänge und der Anzahl der Datenpunkte das Hauptaugenmerk auf den V-Band Daten liegt.

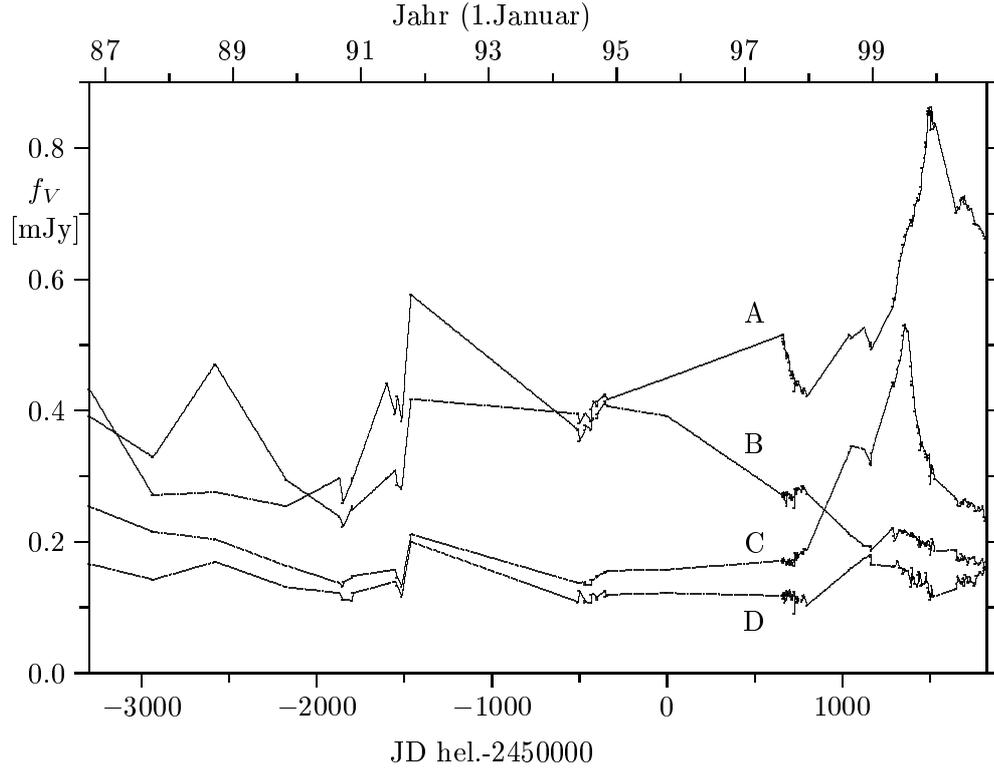


Abbildung 12: Lichtkurve vom Einsteinkreuz im V-Band, vom 28.9.1986 bis 5.10.2000, Intensität in mJy, Zeitskala wie original OGLE-Daten; 0 entspricht dem 10.10.1995, Flußdichte: $f_V = 3.67 \cdot 10^{-0.4m_V+6}$ mJy

Die Lichtkurven vom OGLE-Projekt umfassen 75% aller veröffentlichten photometrischen Messungen am Einsteinkreuz aus dem visuellen Teil des Spektrums. Da diese Arbeit erst 1997 aufgenommen wurde, bedeutet das aber auch, daß für den vorherigen Zeitraum mit insgesamt 27 Messungen im Mittel nur alle fünf Monate eine Beobachtung stattfand. Abbildung 12 zeigt denn auch deutlich, daß die Beobachtungshäufigkeit im Jahr 1999 zu einer nahezu „lückenlosen“ Lichtkurve führt und damit, zumindest dem Augenschein nach, ausreichend ist, während bis 1996 Beobachtungspausen von zum Teil über einem Jahr Länge bewirken, daß Variabilität auf kürzeren Zeitskalen in diesem Zeitraum nahezu unbeobachtet bleibt. Die Lichtkurven der vier Bilder geben nur wenig Aufschluß über intrinsische Variabilität des Quasars; die relativ geringen Variabilitäten von Bild D und C vor 1997 deuten daraufhin, daß die Energieabstrahlung von QSO 2237+0305 nahezu konstant ist. Der Anstieg der Intensität im Oktober 1991 um ca. 50% in allen vier Bildern basiert auf einer einzigen Messung von Racine [30], und daher liegt es nahe, daß die Methode zur Eichung der Helligkeitsmessung sich von dem am NOT [26] verwendeten Verfahren unterscheidet, da sich diese Intensitätszunahme nicht in den Lichtkurven von Østensen et al. [26] im Rot- und Infrarotbereich widerspiegelt. Deshalb wird diese Messung in der folgenden Analyse nicht berücksichtigt.

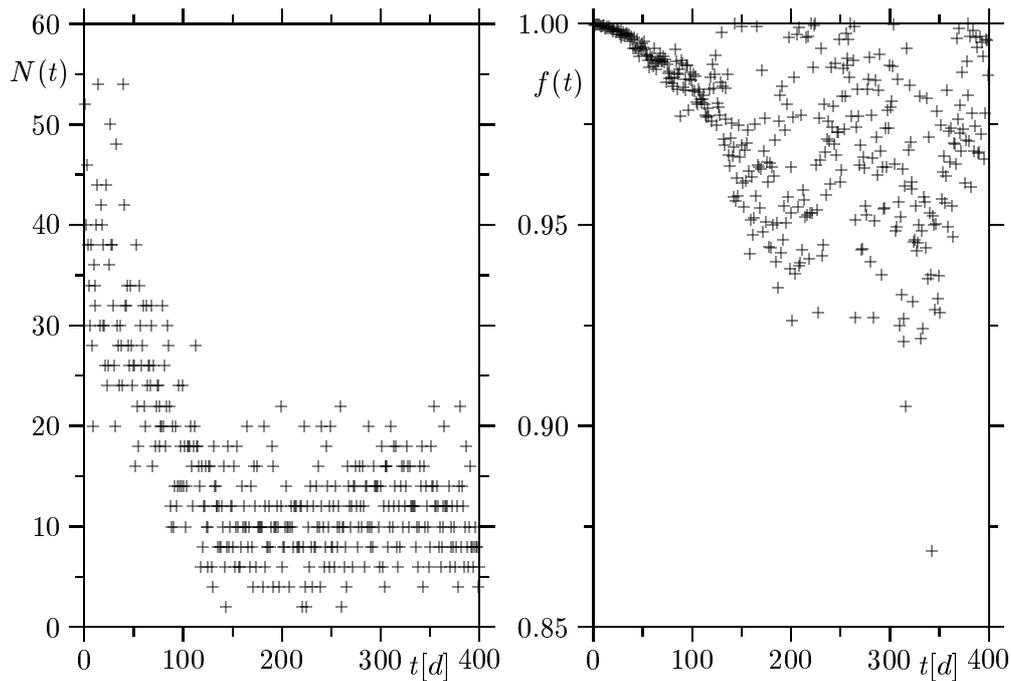


Abbildung 13: QSO 2237+0305, links: Anzahl der Paare $N(t)$ von Meßwerten in der Lichtkurve mit einem zeitlichen Abstand t . rechts: Autokorrelationsfunktion für Bild A unter ausschließlicher Verwendung gemessener Daten.

Beim Versuch aus den vorhandenen Meßwerten Autokorrelationsfunktionen zu berechnen, zeigen große statistische Schwankungen für die Bilder B, C und D, daß es unmöglich ist, den Funktionsverlauf allein aus den vorliegenden Meßwerten zu bestimmen. Abbildung 13 zeigt, daß die Ursache in der geringen Anzahl der Daten liegt, die für die Berechnung der einzelnen Funktionswerte zur Verfügung stehen. Während für kleine Zeitabstände 20-40 Meßwerte für die Mittelwertbildung existieren, basieren die Autokorrelationsfunktionen für $t > 150$ d zum Teil auf weniger als zehn Datenpunkten. Nur in Bild A führt eine anschließende Regressionsanalyse zu einer mit großer statistischer Unsicherheit behafteten Autokorrelationsfunktion, solange $T < 100$ d bleibt (Abb.13). Eine Ergänzung der Lichtkurve durch lineare Interpolation wie in Abbildung 11 und 12 durch Verbindungsgeraden zwischen den Meßwerten angedeutet führt demgegenüber zu stetigen Autokorrelationsfunktionen. Bei einem Abstand von jeweils einem Tag für diese Daten basiert die Statistik bei kleinen Argumenten t für die Autokorrelationsfunktion auf bis zu 5100 Daten, die aber nicht statistisch unabhängig sind. Desweiteren bleibt zu klären, ob eine Lichtkurvenlänge von vierzehn Jahren ausreichend ist, die Variabilität dieses Mehrfachquasars zu repräsentieren. Zur Kontrolle durchgeführte Rechnungen bei Vernachlässigung der ersten vier Messungen von 1986-89 und der daraus resultierenden Interpolationswerte zeigen für die Autokorrelationsfunktionen der Bilder A, B und D deutliche Veränderungen innerhalb der ersten 400 Tage. Bei Verzicht auf nur die

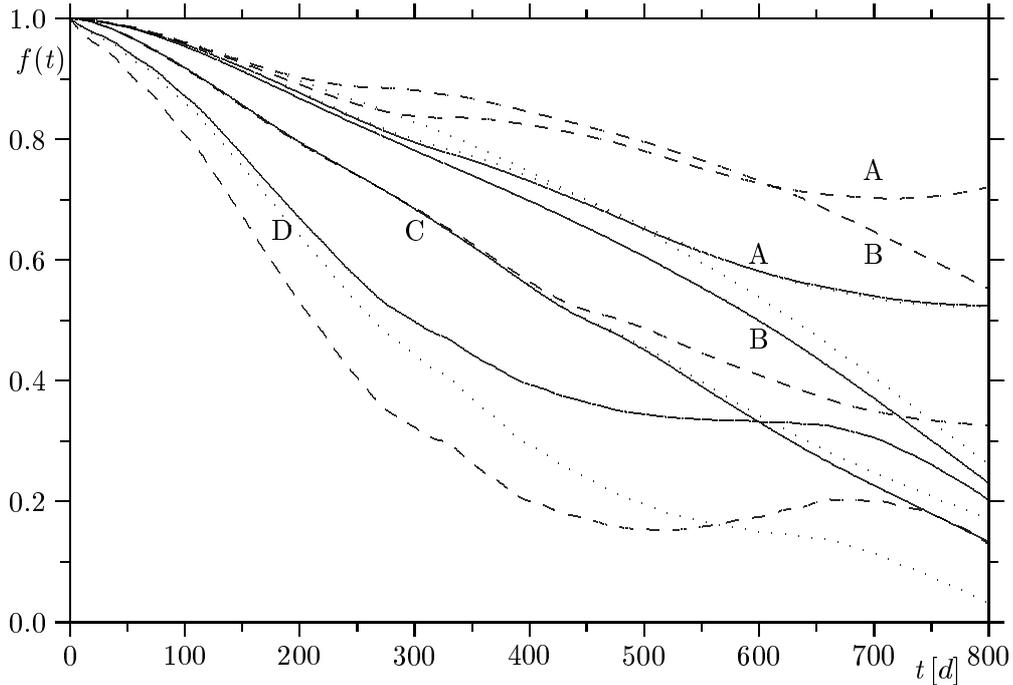


Abbildung 14: Autokorrelationsfunktionen für das Einsteinkreuz aus den vollständigen Lichtkurven A bis D (durchgezogene Linien), ohne Berücksichtigung des ersten Meßwertes von Corrigan et al. [8] aus 1986 (punktiert) und ohne die ersten vier Werte bis 1989 (gestrichelt)

erste Messung von 1986 bleiben die Funktionen für die Bilder A und C nahezu unverändert, während in Bild D selbst für $t < 200$ d deutlich wird, daß der Verlauf der Autokorrelationsfunktion vom Ergebnis einer einzelnen Messung und den damit gebildeten Interpolationswerten abhängt. Auch die Einbeziehung der Messung von Racine [30] aus dem Oktober 1991 verändert die Interpolationsergebnisse der folgenden zwei Jahre und damit auch die Autokorrelationsfunktionen.

Eine weitere Auswirkung der geringen statistischen Grundlage ist in den Autokorrelationsfunktionen von Bild A bis C zu sehen. Im Gegensatz zu den berechneten Modellfunktionen, bei denen die Krümmung nur einmal das Vorzeichen wechselt, haben die zweiten Ableitungen der Funktionen aus Meßergebnissen zwei Nullstellen im Laufe der ersten 400 Tage. Ausserdem wird deutlich, daß die aus den Lichtkurven berechneten Autokorrelationsfunktionen auch von den ungeraden Potenzen der Zeit t in einer Reihenentwicklung abhängen, sofern die Funktion nur für positive Argumente betrachtet wird. Besonders im Bereich sehr kleiner t , wo zu erwarten ist, daß die Lichtkurvenlänge für eine korrekte Statistik ausreichend ist, wird der lineare Term der Reihe für eine zufriedenstellende Approximation benötigt, erst für große Argumente kann sein Einfluß vernachlässigt werden. Auffallend ist auch, daß dieser Effekt in den einzelnen Bildern unterschiedlich stark ausgeprägt ist, so daß ein dominanter Einfluß in-

trinscher Variabilität des Quasars unwahrscheinlich ist. Vielmehr spricht der nahezu lineare Abfall der Autokorrelationsfunktion in Bild D dafür, daß Meßfehler die Variabilität dieses Quasarbildes signifikant beeinflussen. Besonders die Helligkeitsänderungen auf kurzen Zeitskalen in den Jahren 1999 und 2000 sind jeweils nur etwa doppelt so groß wie die aus Woźniak et al. [49] ermittelten mittleren Beobachtungsfehler von $\langle \delta m_V \rangle \approx 0.05$ mag für dieses Bild. Aus den von diesen Autoren verwendeten Zusammenhang zwischen Flußdichte f_V in mJy und der visuellen Helligkeit m_V in Magnituden

$$f_V = 3.67 \cdot 10^{-0.4m_V+6} \text{mJy} \quad (3.2.1)$$

folgt bei einem Fehler δm_V für die Helligkeit eine Änderung des Flusses um δf_V und damit

$$f_V + \delta f_V = 3.67 \cdot 10^{-0.4(m_V+\delta m_V)+6} \text{mJy} \quad (3.2.2)$$

und in einer linearen Näherung gilt für den Fehler des gemessenen Flusses

$$\delta f_V = f_V(10^{-0.4\delta m_V} - 1) \approx -f_V \frac{\ln 10}{2.5} \delta m_V. \quad (3.2.3)$$

Damit folgt dann für die gemessene Varianz der Lichtkurve

$$\begin{aligned} \text{Var} \frac{I}{\langle I \rangle} &= \text{Var} \frac{f_V + \delta f_V}{\langle f_V \rangle} = \frac{\langle f_V^2 \rangle}{\langle f_V \rangle^2} + \frac{\langle \delta f_V^2 \rangle}{\langle f_V \rangle^2} - 1 \\ &\approx \text{Var} \frac{f_V}{\langle f_V \rangle} + \left(\frac{\ln 10}{2.5} \right)^2 \langle \delta m_V^2 \rangle. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Der Anteil der Meßfehler an der Varianz beträgt damit

$$q_f := \frac{\left(\frac{\log 10}{2.5} \right)^2 \langle \delta m_V^2 \rangle}{\text{Var} \frac{I}{\langle I \rangle}}. \quad (3.2.5)$$

Tabelle 1 zeigt am Beispiel von Bild D und für das Jahr 1999 auch besonders deutlich in Bild B, wie in Zeiten geringer Variabilität die Meßfehler einen großen Teil zur Varianz der Lichtkurve beitragen. Die Lichtkurven von Bild C und D unterscheiden sich vor 1997 nur sehr wenig, erst die ausgeprägte

	OGLE (1997-2000)			OGLE 1999			OGLE 99/00		
	Δm_V	$\langle \delta m_V \rangle$	q_f	Δm_V	$\langle \delta m_V \rangle$	q_f	Δm_V	$\langle \delta m_V \rangle$	q_f
A	0.226	0.012	0.002	0.114	0.010	0.006	0.085	0.010	0.008
B	0.174	0.029	0.022	0.044	0.032	0.381	0.089	0.033	0.111
C	0.337	0.025	0.004	0.179	0.018	0.008	0.228	0.020	0.006
D	0.136	0.050	0.100	0.107	0.050	0.171	0.089	0.049	0.220

Tabelle 1: Mittlere Helligkeitsschwankung $\Delta m_V := \langle |m_V - \langle m_V \rangle| \rangle$, mittlerer Fehler der OGLE-Photometrie $\langle \delta m_V \rangle$ und Anteil q_f der Meßfehler an der Varianz der gemessenen Lichtkurve $\text{Var} I / \langle I \rangle$ für verschiedene Zeiträume bei den OGLE Messungen am Einsteinkreuz.

Verstärkungsänderung im Laufe des Jahres 1999 in Bild C drängt (bei einem etwas geringeren Meßfehler als in Bild D) den Einfluß von Beobachtungsfehlern auf die Autokorrelationsfunktion (und die Varianz) gegenüber der Wirkung des Mikrolinseneffektes zurück und reduziert dadurch auch die Abweichung der Autokorrelationsfunktion von der Parabelform. Aus einer Approximation der Lichtkurven durch Polynome 10. Grades wird deutlich, daß die Variabilität hauptsächlich durch langfristige Helligkeitsschwankungen bestimmt wird, welche näherungsweise durch die Polynome wiedergegeben werden können. Die Varianz der Polynome ist für die Bilder A bis C nur um 3.8–6.3% kleiner als die Varianz der Lichtkurven selbst. Nur bei Bild D, wo dieser Unterschied 18.4% beträgt, haben Helligkeitsänderungen auf kleinen Zeitskalen einen deutlichen Einfluß auf die Variabilität der Lichtkurve. Da in den Jahren vor 1997 nur in teilweise sehr großen Zeitabständen beobachtet wurde, gibt es in der Lichtkurve nur wenige Informationen über kurzzeitige Helligkeitsänderungen und diese erhalten dann bei der statistischen Analyse ein zu geringes Gewicht. Besonders bei den lichtschwachen Bildern ist außerdem eine deutlich höhere Meßgenauigkeit notwendig, um den Einfluß von kleinen Massen, welche nur Helligkeitsschwankungen von einigen hundertstel Magnituden hervorrufen, in den Daten erkennen zu können. Eine kurze Phase hoher Verstärkung, wie sie 1999/2000 in Bild C zu beobachten war, genügt, um den Einfluß der Meßfehler deutlich zu reduzieren. Gleichzeitig wird allerdings auch der Einfluß großer massiver Objekte so dominant, daß auch diese Bilder ungeeignet scheinen, Aussagen über das untere Ende des Massenspektrums zu ermöglichen.

Die Korrelationslängen für die Bilder B bis D betragen 600, 450 und 300 Tage, für Bild A zeigt Abbildung 14, daß die Autokorrelationsfunktion nach 800 Tagen wieder ansteigt, aber für alle Makrobilder ist zu erwarten, daß sich die Werte für $t > 300$ d nach zukünftigen Beobachtungen deutlich verändern; bei Bild B und D wird deutlich, daß selbst für $100 \text{ d} < t < 300 \text{ d}$ die Ergebnisse nicht als statistisch abgesichert gelten können. Erst wenn die Autokorrelationsfunktionen für $t < 300$ d nicht mehr von der Berücksichtigung einzelner Messungen aus der ersten Beobachtungsdekade abhängen, sind gesicherte statistische Untersuchungen möglich. Die in Abbildung 10 rechts unten vorgestellten Ergebnisse deuten an, daß wenigstens für Bild A die Autokorrelationsfunktion auch für $t \approx 600$ d mit ausreichender Genauigkeit bestimmt werden muß, um die Bestapproximation ermitteln zu können, womit auch eine deutlich längere Lichtkurve benötigt wird, als zur Zeit zur Verfügung steht. Ein charakteri-

	Modell 1				Modell 2			
	A	B	C	D	A	B	C	D
κ_t	0.36	0.45	0.88	0.61	0.36	0.36	0.69	0.59
γ'	0.44	0.28	0.55	0.66	0.40	0.42	0.71	0.61
$\langle \mu \rangle$	4.63	4.46	-3.47	-3.53	4.01	4.29	-2.45	-4.90

Tabelle 2: Zwei bisher veröffentlichte Makrolinsenmodelle für QSO 2237+0305: Modell 1 nach Schneider et al. [38], Modell 2 von Schmidt et al. [37].

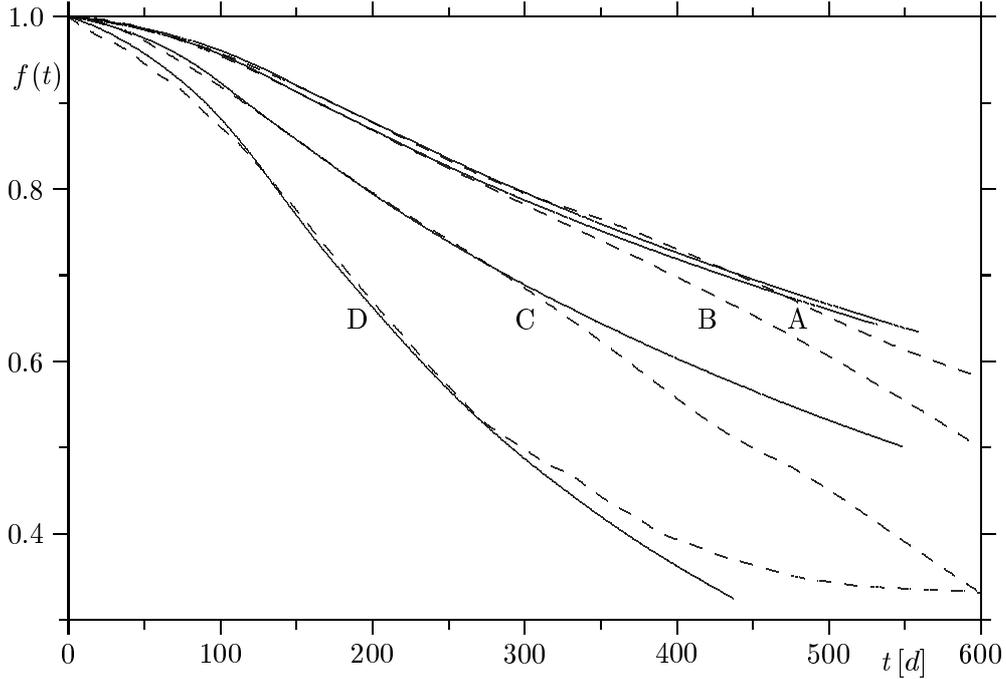


Abbildung 15: Autokorrelationsfunktionen $f(t)$ für das Einsteinkreuz aus den Lichtkurven A–D (gestrichelt) und Modellfunktionen $q(Vt)$ mit $R=0.2$ Einsteinradien und $\kappa_c = 0$, sowie $\psi = \pi/10, \pi/20, 0$, und $\psi = \pi/2$ bei Geschwindigkeiten $V = 2.2, 2.3, 3.0$ und $2.5 \cdot 10^{-3}$ Einsteinradien pro Tag für die Bilder A bis D.

stisches Maß, welches einen Vergleich mit Lichtkurven anderer Linsensysteme ermöglicht, ist das Verhältnis von der Länge der aufgenommenen Kurve zur Autokorrelationslänge, welches beim Einsteinkreuz zwischen unter 6.4 für Bild A und 17.1 bei Bild D liegt. Bei dem, im folgenden Abschnitt untersuchten Doppelquasar B1600+434 liegen diese Quotienten bei 64 und 77, und es wird deutlich, daß die Statistik bei diesem Objekt wesentlich besser ist, als beim Einsteinkreuz. Auch bei der Auswertung von (3.1.1) wird die unzureichende Länge der Lichtkurve offensichtlich. Bei Berücksichtigung aller sechs möglichen Kombinationen von je zwei Bildern für eine statistische Untersuchung folgt für die Varianz der intrinsischen Intensität $\text{Var } I_0 / \langle I_0 \rangle = (0.8 \pm 21.3) \cdot 10^{-3}$, was zwar konsistent mit $I_0 = \text{const}$ ist, aber auf Grund der statistischen Fehler¹² keine eindeutige Aussage über die intrinsische Variabilität zuläßt. Daß diese Methode, die Varianz der intrinsischen Intensität zu bestimmen, zu sinnvollen Ergebnissen führen kann, zeigt eine Analyse der von Fassnacht et al. [12] bei 8.4 GHz aufgenommenen Lichtkurven des Vierfach-Linsensystemes B1608+656. Mit $\text{Var } I_0 / \langle I_0 \rangle = (1.31 \pm 0.19) \cdot 10^{-4}$ ergibt sich eine deutlich höhere Genauigkeit, was bei diesem Objekt zusätzlich zum Verhältnis von Lichtkurvenlänge zu Korrelationszeit (37-72) auf eine bessere statistische Grundlage als beim Einsteinkreuz hinweist.

¹²angegeben ist die Standardabweichung für den Mittelwert

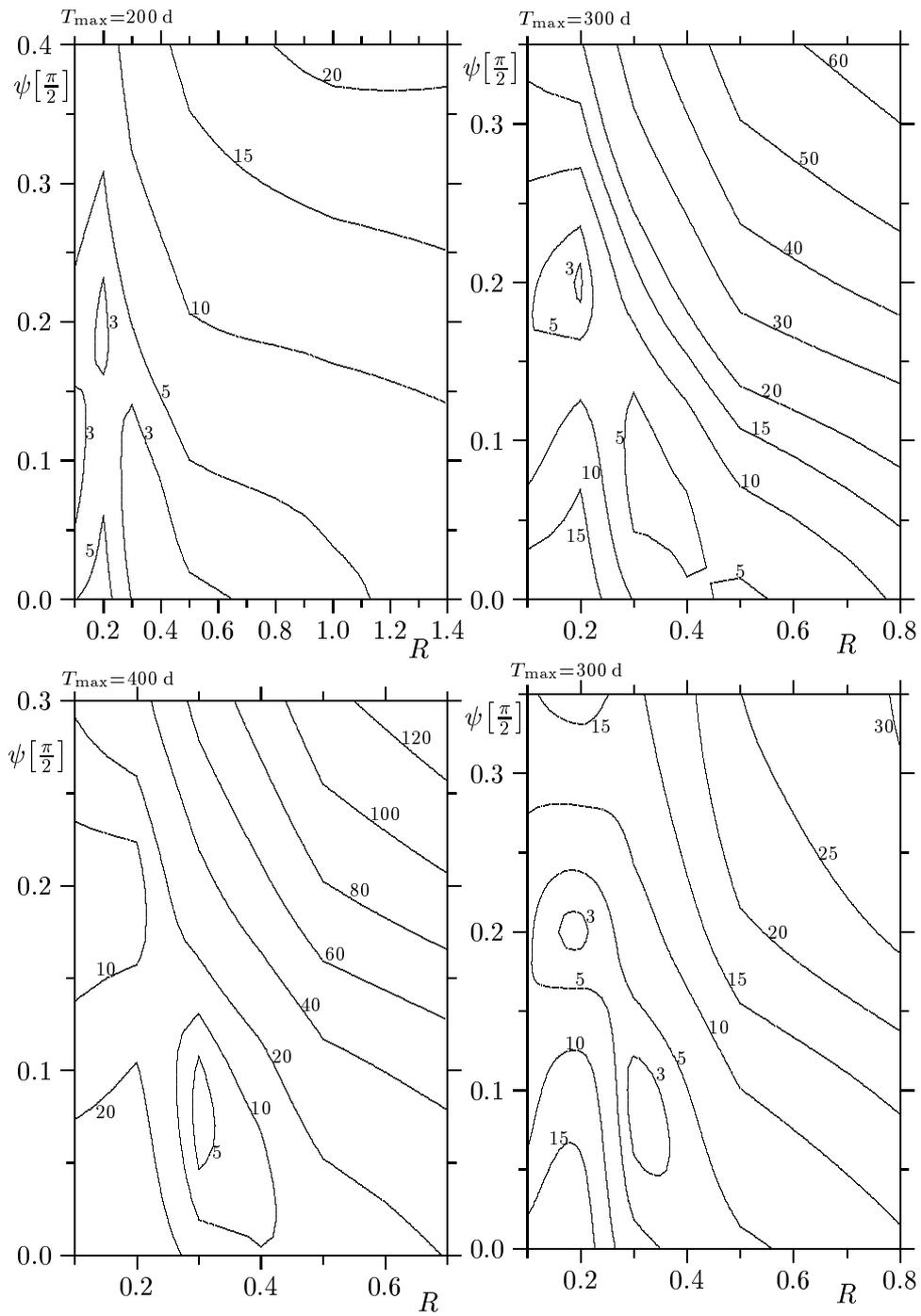


Abbildung 16: QSO 2237+0305A: Konturlinien von $10^2 \cdot \|f(t) - q(\vec{V}t)\|_2$ für $T_{\max} = 200$ d (oben links), $T_{\max} = 300$ d (oben rechts) und $T_{\max} = 400$ d (unten links) mit der Geschwindigkeit V nach (3.1.7) sowie mit V als freiem Parameter bei der Approximation für $T_{\max} = 300$ d (unten rechts). Dargestellt sind charakteristische Ausschnitte in teilweise unterschiedlichen Maßstäben.

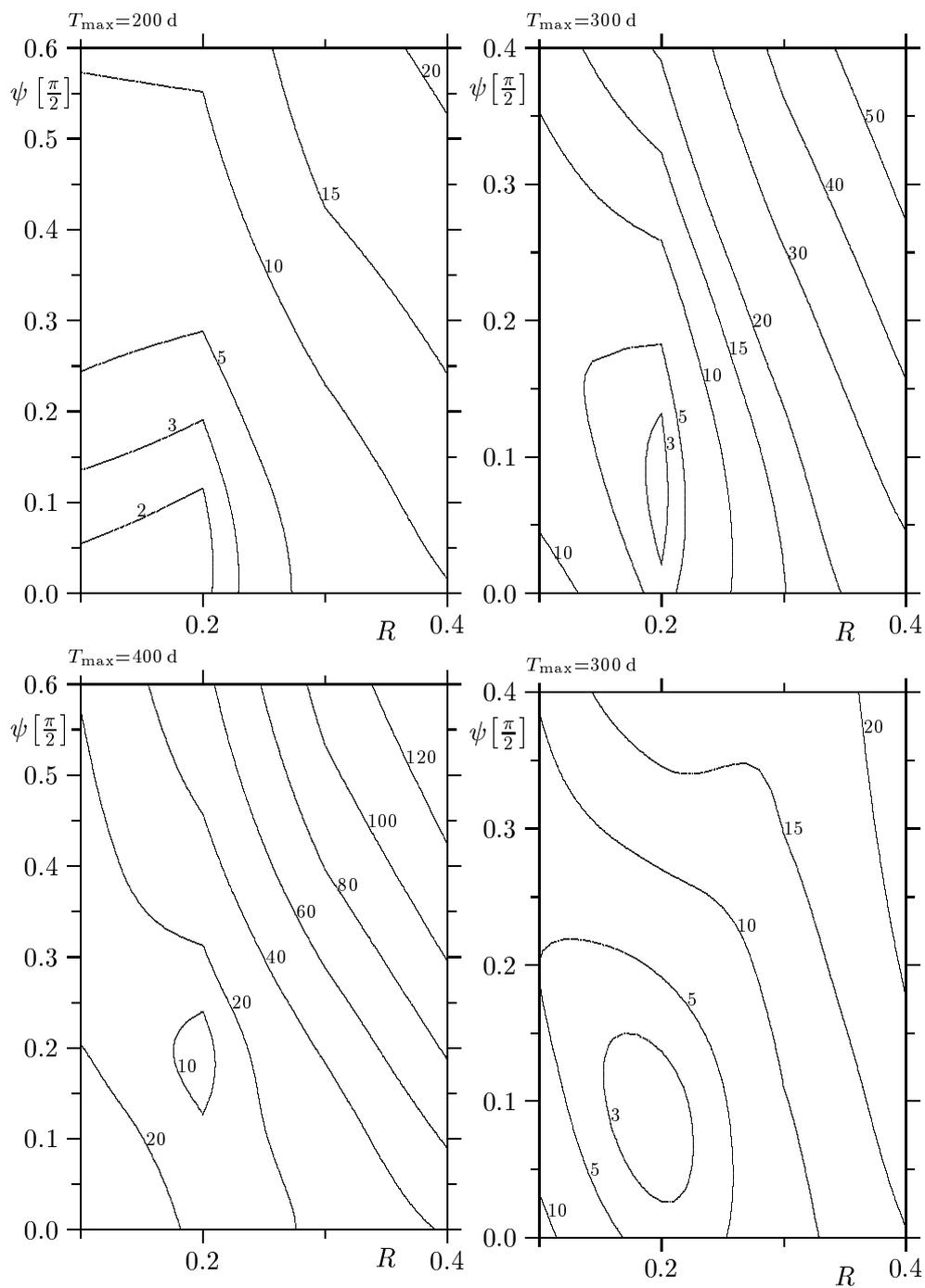


Abbildung 17: QSO 2237+0305B: Erläuterungen siehe Bild A, Abbildung 16.

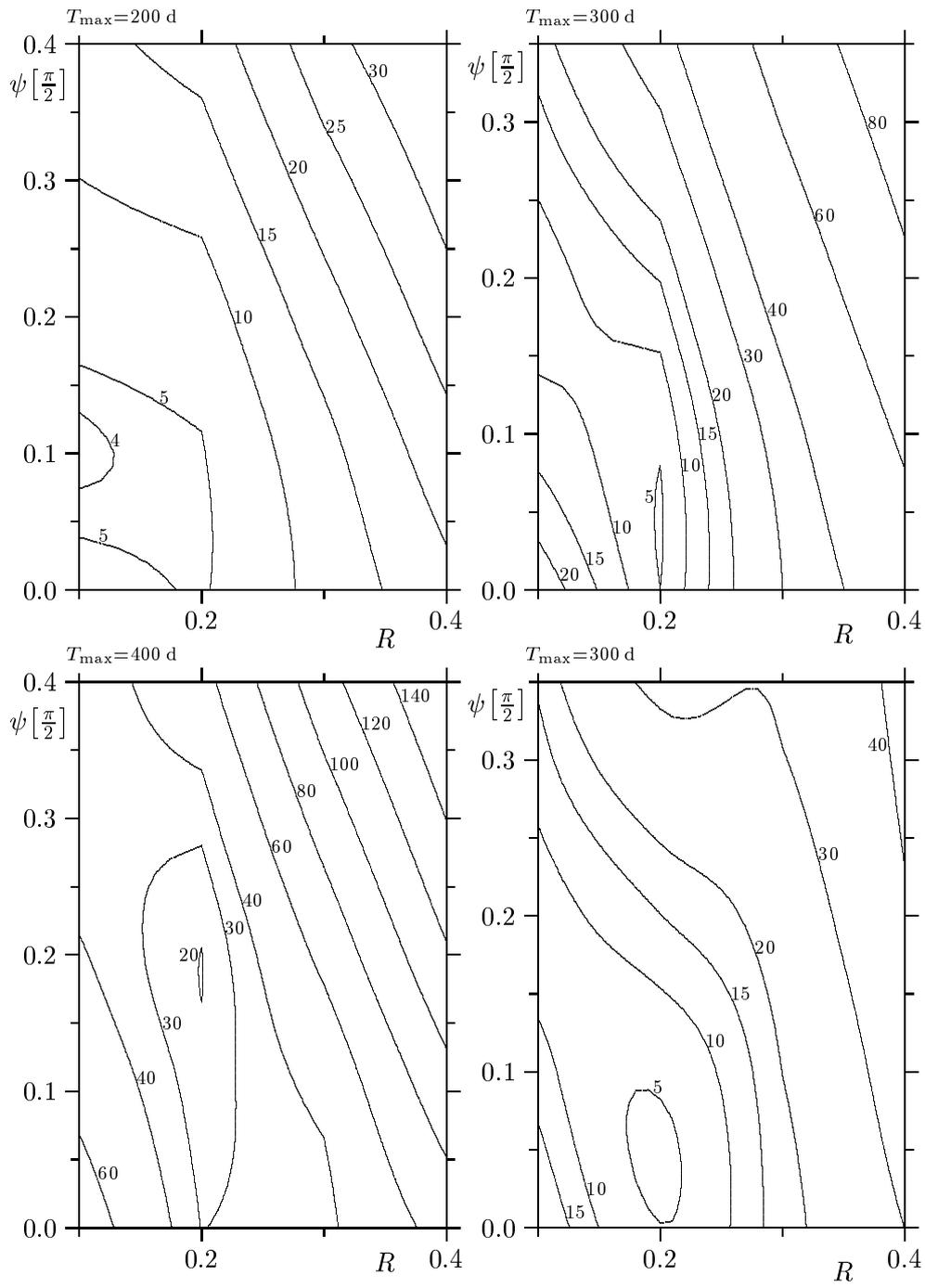


Abbildung 18: QSO 2237+0305C: Erläuterungen siehe Bild A, Abbildung 16.

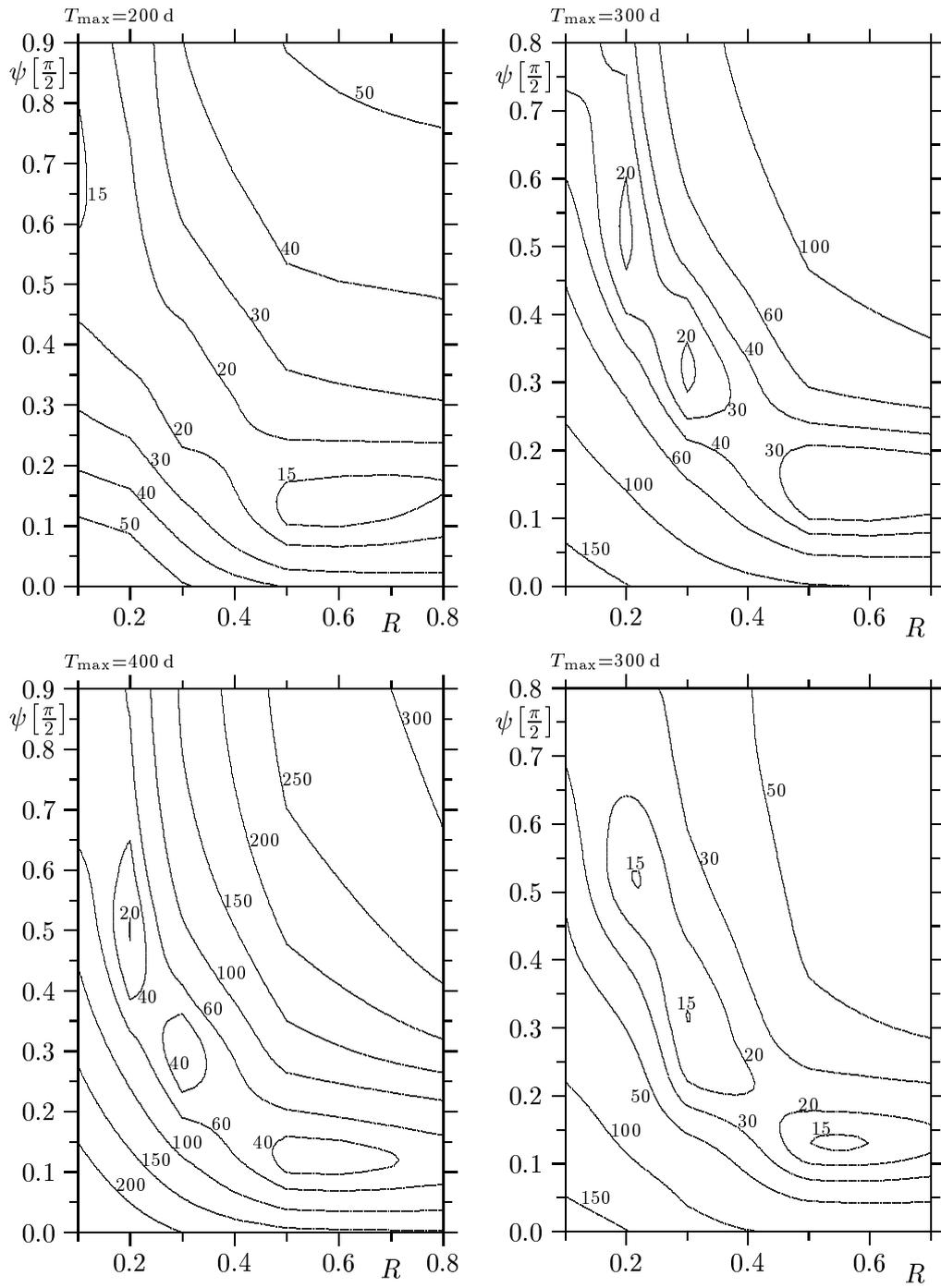


Abbildung 19: QSO 2237+0305D: Erläuterungen siehe Bild A, Abbildung 16.

Modellfunktionen für QSO 2237+0305

	κ_c	R	ψ	V	$\ \cdot\ _1$	$\ \cdot\ _2$	$\ \cdot\ _\infty$	t_h	τ_h
		[ζ_0]	[$\frac{\pi}{20}$]	[$10^{-3}\zeta_0/d$]	[10^{-1}]	[10^{-2}]	[10^{-3}]	[d]	[d]
A 1	0.0	0.2	2	2.160	3.57	2.66	3.11	837	813
1	0.0	0.3	1	3.365	4.70	3.21	3.20	871	944
1	0.0	0.5	0	5.302	6.54	4.32	5.07	888	1006
1	0.18	0.3	1	3.430	4.10	2.79	2.83	820	974
1	0.31	0.2	1	2.387	3.64	2.89	3.34	857	1193
2	0.0	0.2	2	2.080	6.31	3.98	4.62	818	951
2	0.0	0.1	2	1.193	6.13	4.22	5.40	1090	1172
B 1	0.0	0.2	1	2.269	3.50	2.37	3.86	844	1049
1	0.0	0.2	0	2.301	4.64	3.67	6.87	882	1137
2	0.0	0.2	2	2.260	8.95	6.08	5.71	776	836
2	0.0	0.1	2	1.294	6.27	4.37	7.40	1037	1033
C 1	0.0	0.2	0	2.987	6.19	5.03	6.79	561	473
1	0.0	0.2	1	2.936	9.03	5.88	5.87	546	472
1	0.0	0.1	2	1.538	11.73	7.83	11.67	638	607
2	0.0	0.2	0	3.153	6.46	5.20	6.61	571	703
D 1	0.0	0.2	5	2.509	22.55	17.07	20.92	300	312
1	0.0	0.2	6	2.299	31.13	19.92	20.66	289	302
1	0.0	0.1	9	1.236	36.36	24.31	26.54	322	331
1	0.0	0.1	10	1.195	37.29	24.09	23.48	320	338
1	0.0	0.3	3	4.400	25.09	17.88	20.56	301	314
1	0.0	0.5	2	6.486	44.62	28.46	34.09	278	354
2	0.0	0.2	7	2.292	22.71	16.74	20.48	299	206

Tabelle 3: Approximationen an die Autokorrelationsfunktionen der Makrobilder bei $T_{max} = 300$ d in Abhängigkeit von κ_c , R und ψ (in Einheiten von $\pi/20$) für Modell 1 und 2 aus Tabelle 2, die Bestapproximation für Modell 1 jeweils in der ersten Zeile. Angegeben sind alle gerechneten Modelle mit $\|f - q\|_2 \leq 1.5 \min(\|f - q\|_2)$, sowie die Bestapproximationen für Modell 2. t_h bezeichnen die Korrelationszeiten für die Modellfunktionen, τ_h die mit (3.2.7) berechneten Werte.

Die folgenden Untersuchungen basieren auf einem Makrolinsenmodell¹³ von Schneider et al. [38], wie es 1992 von Witt, Kayser und Refsdal [48] verwendet wurde (Modell 1). Modell 2 von Schmidt et al. [37] stammt von 1998 und schließt im Unterschied zu älteren Modellen den Galaxienbalken explizit mit ein. Es ergibt sich ein deutlicher Unterschied von Flächenmassendichte und Scherung in Bild B und C. Zum Vergleich werden auch einige auf diesen Daten basierende Mikrolinsenmodelle herangezogen. Das Modell aus dem Buch von Schneider, Ehlers und Falco [39] basiert auf denselben Daten wie Modell 1, unterscheidet sich von diesem nur durch eine, um 14% kleinere Scherung in Bild C und wird im folgenden nicht berücksichtigt.

¹³ohne explizite Angabe der Scherung, stattdessen wurde die Verstärkung angegeben

3.2.2 Eine vorläufige Lichtkurvenanalyse

Trotz Mangel an Beobachtungsdaten können schon einige Rückschlüsse aus den Autokorrelationsfunktionen gezogen werden. Der quantitative Vergleich von Modellrechnungen mit den aus den Lichtkurven berechneten Funktionen wird durch die Definition einer p -Norm

$$\|f - q\|_p = \left(\int_0^{T_{\max}} [f(t) - q(\vec{V}t)]^p dt \right)^{1/p} \quad (3.2.6)$$

mit $p = 1, 2$ und der durch $p = \infty$ beschriebenen Maximumnorm ermöglicht. Zum Teil hängen die ermittelten Linsenparameter für die Minimallösung von der verwendeten Norm ab, da das Gewicht großer Differenzen zwischen den Funktionen mit wachsendem p zunimmt und damit zu einer Auswahl von qualitativ unterschiedlichen Lösungen führen kann. In diesem Fall müssen dann andere Kriterien, wie zum Beispiel ein Vergleich der graphischen Darstellungen zur Entscheidungsfindung beitragen. Geringe Unterschiede, wie sie bei der Bestimmung von Bestapproximationen mit euklidischer oder Maximumnorm auftreten (vgl. Tabelle 3), sind allerdings nicht signifikant. Eine Reduzierung der Differenz zwischen Modellfunktionen und einer empirischen Autokorrelationsfunktion ist möglich, wenn die Bestimmung der Transversalgeschwindigkeit mittels (3.1.7) als Startwert verwendet wird, um für jedes Linsenmodell durch Variation von V das Minimum von (3.2.6) zu ermitteln. Dieser Ansatz führt dazu, daß die Übereinstimmung der Funktionen für große Argumente verbessert wird, während die Differenz bei kleinen Zeiten t durch die geänderte Geschwindigkeit anwächst. Dieser Effekt wird besonders deutlich bei Modellfunktionen, die wenig Übereinstimmung mit den Daten zeigen, während die Änderungen bei den in Tabelle 3 aufgeführten Modellen so klein sind, daß sie in einer graphischen Darstellung nicht erkennbar sind.

Modellrechnungen wurden für $R = 0.5, 0.7, 1, 2, 3, 5$ und 10 Einsteinradien jeweils mit den Winkeln $\psi = 0, \dots, 10 \cdot \pi/20$ zwischen Bewegungsrichtung und Scherung durchgeführt und damit wurde jeweils $\|f - q\|_2$, der Abstand zur empirischen Autokorrelationsfunktion berechnet. Eine Konturliniendarstellung dieser Größe als Funktion von Quellradius und Winkel folgt dann aus einer zweidimensionalen Interpolation der Ergebnisse. Die Abbildungen 16–19 zeigen Ausschnitte aus den Umgebungen der jeweiligen Bestapproximationen. Die gezeigten Bereiche sind dabei so ausgewählt, daß der Informationsgehalt der einzelnen Diagramme erhalten bleibt. Dabei waren für eine angemessene Darstellung zum Teil unterschiedliche Maßstäbe notwendig. Der Vergleich von Modellfunktionen mit den aus Messungen abgeleiteten Autokorrelationsfunktionen zeigt, daß es bei Berücksichtigung von 300 Tagen Kurvenlänge einen deutlich eingeschränkten Bereich realistischer Mikrolinsenparameter gibt. Modelle, bei denen der Abstand der Funktionen um höchstens 50% grösser ist als bei der Minimallösung des jeweiligen Bildes, sind in Tabelle 3 zusammengefasst. Einige ebenfalls aufgeführte Beispielrechnungen mit $\kappa_c > 0$ und für Modell 2 zeigen keine signifikanten Änderungen der berechneten Norm, und es wird deutlich, daß die Länge der Autokorrelationsfunktionen für die Bestimmung von κ_c ebenso wie für eine genauere Differenzierung zwischen verschiedenen Makrolinsenmo-

dellen nicht ausreichend ist. Bei einer größeren Autokorrelationsfunktionslänge mit $T_{max} \geq 400$ d wächst der Minimalabstand pro Längeneinheit deutlich an, und aus der graphischen Darstellung in Abbildung 15 wird deutlich, wie für große Zeiten t die Funktionen aus Meßdaten $f(t)$ einen vollkommen anderen Verlauf nehmen als eine Modellfunktion $q(\vec{V}t)$. Damit bedeutet eine Übereinstimmung im Sinne der gewählten Norm nicht mehr gleichzeitig eine qualitativ gute Reproduktion der Autokorrelationsfunktion der Lichtkurve. Besonders wenn die Geschwindigkeit auf andere Art definiert oder als freier Parameter bei der Approximation verwendet wird, kann der Abstand $\|f - q\|$ für Modellfunktionen minimal werden, mit denen die Funktion $f - q$ mehrfach das Vorzeichen wechselt und der Unterschied der beiden in Bezug auf Steigung und Krümmung anwächst. Eine Autokorrelationsfunktion mit $T_{max} \leq 200$ d demgegenüber ist zu kurz um signifikante Unterschiede in der Qualität der Approximation durch verschiedene Modellfunktionen nachweisen zu können. Allerdings wird deutlich, daß für Bild B und C nur Modelle mit $R \leq 0.2$ und $\psi \leq \pi/10$ brauchbar sind; für grössere Quellen oder Winkel ist $\|f - q\|$ mindestens doppelt so groß, wie bei der jeweiligen Bestapproximation. Bei Bild A und D hat der Abstand der Funktionen zwar auch ein Minimum bei kleinen Quellradien, aber für $R = 0.5$ oder bei Bild D sogar für $R = 2$ wird $\|f - q\|$ nur um 50% größer, so daß besonders für diese beiden Bilder nur bei deutlich längeren Autokorrelationsfunktionen genauere Einschränkungen für die Mikrolinsenparameter zu erwarten sind.

Bei allen Bildern ergibt die Approximation mit $T_{max} = 300$ d eine Quellgröße von 0.2 Einsteinradien bei einer effektiven Transversalgeschwindigkeit von $V = 2-3 \cdot 10^{-3}$ Einsteinradien pro Tag. Diese Ergebnisse unterstützen die Annahme, daß das Massenspektrum und die Kontinuumsmassendichte κ_c sich für die einzelnen Bilder wegen der regelmässigen Anordnung der Bilder um das Galaxienzentrum herum nicht wesentlich unterscheiden. Eine einfache Testrechnung zeigt keinen Einfluß intrinsischer Variabilität des Quasars auf die Lichtkurven. Für diese Abschätzung wird von der Flußdichte in jedem einzelnen Bild ein viertel der Summe der Flußdichten aller vier Bilder zu diesem Zeitpunkt abgezogen. Beim Einsteinkreuz muß dabei keine Rücksicht auf unterschiedliche Lichtlaufzeiten genommen werden. Mit diesem Ansatz werden gleichzeitige und korrelierte Helligkeitsänderungen aus den Lichtkurven nahezu eliminiert, während unkorrelierte Variabilität bei der Bildung der Summe aus allen vier Bildern unterdrückt wird, so daß ihr Einfluß auf die Lichtkurven durch die Subtraktion nur geringfügig verändert wird. Die Ergebnisse der Approximation durch Modellfunktionen für Bild A bleiben unverändert, bei Bild C und D ergeben sich keine signifikanten anhand der Konturlinien erkennbaren Änderungen und nur bei Bild B führt die Subtraktion der mittleren Flußdichte zu einer deutlichen Ergebnisveränderung mit $R \leq 0.1$ und $\psi \leq 0.1$.

Mit den Positionen des Galaxienzentrums und der vier Quasarbilder von Crane et al. [9] und den Winkeln zwischen Geschwindigkeit und Scherung aus Tabelle 3 ist es nicht möglich, unter der Annahme, die Richtung der Scherung in jedem der Bilder stehe senkrecht auf der Richtung zum Galaxienzentrum, die Richtung der Relativbewegung von Galaxie und Quasar zu bestimmen. Auch eine Berücksichtigung der Rotation der Galaxie führt nur für jeweils zwei Bilder zu einer übereinstimmenden Richtung für die Bewegungsrichtung des Qua-

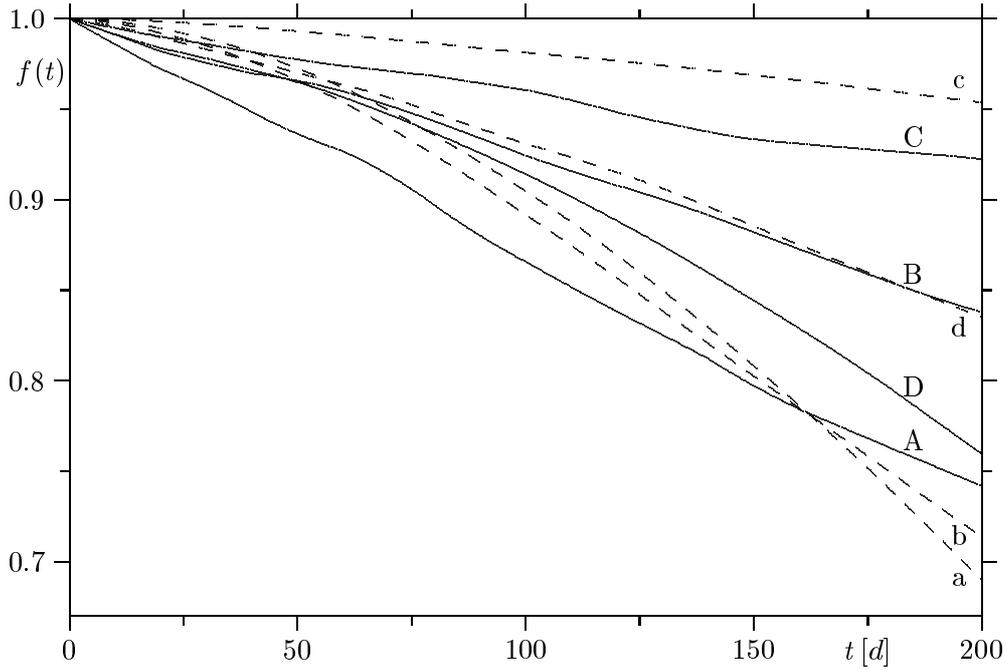


Abbildung 20: Autokorrelationsfunktionen für das Einsteinkreuz aus den Lichtkurven A–D im roten Spektralbereich und zum Vergleich V–Daten aus dem gleichen Zeitraum bis 1995 (gestrichelt, a–d)

sars. Da keine zusätzliche Materiekonzentration bekannt ist, welche eine Abweichung der Scherung von der tangentialen Richtung bewirken könnte, liegt es nahe anzunehmen, daß die Inkonsistenz der berechneten Richtungen der Geschwindigkeiten \vec{V} zeigt, wie groß die Ungenauigkeit bei der Bestimmung der Autokorrelationsfunktionen ist.

Auch die Abhängigkeit der Autokorrelationsfunktionen von der berücksichtigten Lichtkurvenlänge, wie sie in Abb. 14 dargestellt ist, macht sich bei der Auswahl der optimalen Modellfunktion bemerkbar. Bei Vernachlässigung des ersten Jahres in der Lichtkurve und einer Beschränkung auf $T_{max} = 300$ d ergeben sich für Bild A mit $R = 0.3$ und $\psi = 9^\circ$ geringfügige Änderungen der Mikrolinsenparameter für die Bestapproximation. Verzicht auf die ersten vier Meßwerte in der Lichtkurve und damit auf vier Jahre der Beobachtungszeit zeigt auch in der Graphik (Abb. 14) deutlich die Veränderungen der Autokorrelationsfunktion von Bild A. Für Bild C bewirkt die Verkürzung der Lichtkurve um ein, bzw. um vier Jahre keine Änderung der Mikrolinsenparameter. Bei beiden Bildern wird allerdings das Ergebnis statistischer Untersuchungen hauptsächlich durch die Ereignisse hoher Verstärkung 1998/99 bestimmt, so daß der Einfluß der ältesten Daten und der aus ihnen gebildeten Interpolationswerte in diesen beiden Bildern gering bleibt, erst für $T_{max} > 400$ d ergeben sich deutliche Änderungen bei der Approximation. Bei Bild B bewirkt die Verkürzung der Lichtkurve um ein Jahr eine deutliche Veränderung der Autokorrelationsfunktion. Ebenso wie bei Bild A ergibt sich die beste Übereinstimmung mit einer

Modellfunktion für $R = 0.1$ und $\psi = 0^\circ$, allerdings steigt der Minimalabstand auf das sechsfache im Vergleich zu Rechnungen mit der vollständigen Lichtkurve. Weitere Untersuchungen mit $R < 0.1$ sind notwendig, konnten aber wegen numerischer Probleme bei kleinen Quellradien noch nicht durchgeführt werden. Eine weitere Verkürzung der Lichtkurve bei Bild B bewirkt nur eine zusätzliche Vergrößerung des Minimalabstandes um den Faktor vier. Bei Bild D demgegenüber bleibt der Minimalabstand nahezu unverändert, es ergibt sich aber eine deutlich veränderte Bestapproximation mit $R = 0.5$ und $\psi = 18^\circ$, bzw. $\psi = 27^\circ$ bei Verkürzung der Lichtkurve um ein Jahr bzw. vier Jahre. Es gelingt noch weniger die Autokorrelationsfunktion von Bild D für $t < 100$ d durch eine Parabel zu approximieren, und bei den derartig verkürzten Lichtkurven hat auch $\|f - q\|$ als Funktion von R und ψ kein signifikantes globales Minimum mehr in den Bereichen $0.1 \leq R \leq 10$ und $0 \leq \psi \leq \pi/2$. Diese verbliebende Lichtkurvenlänge von zehn Jahren reicht nicht aus, um gesicherte Aussagen über die Mikrolinsenparameter treffen zu können, so daß auch Autokorrelationsfunktionen für die zehn Jahre umfassenden Lichtkurven aus dem roten Spektralbereich keine gesicherten quantitativen Aussagen ermöglichen.

Abbildung 20 zeigt einen Vergleich der Autokorrelationsfunktionen für die R-Daten mit denjenigen für den visuellen Spektralbereich, welche aus den im gleichen Zeitraum von 1986 bis 1995 gemessenen V-Daten berechnet wurden. Bei den R-Daten wird deutlich, daß keine der Autokorrelationsfunktionen die für den Mikrolinseneffekt typische Parabelform zeigt. Dementsprechend gibt es auch keine Mikrolinsenmodellfunktion mit der eine Approximation gelingt, aber auch bei den V-Daten dominiert in einer Reihenentwicklung der Autokorrelationsfunktionen ein linearer Term, so daß auch hier keine gute Übereinstimmung mit Modellfunktionen erreicht werden kann.

Von Wambsganß et al. [46] stammt eine Abschätzung der Autokorrelationszeiten für das Einsteinkreuz. Durch statistische Auswertung einer großen Zahl numerischer Simulationsrechnungen mittels Strahlenschießen haben die Autoren einen empirischen Zusammenhang zwischen Quellgröße, Geschwindigkeit, Richtung der Bewegung und Korrelationszeit τ_h ermittelt. Nach einer Transformation der Geschwindigkeit von der Beobachterebene auf die Quellebene, folgt in der in der vorliegenden Arbeit verwendeten Notation nach einer Umformung des winkelabhängigen Teiles der Gleichung

$$\tau_h = 25a \frac{C}{h_{75}} \sqrt{\frac{R \zeta_0}{0.01 \sqrt{2} \text{ pc}} \frac{600 \text{ km/s } \frac{D_{\text{ds}}}{1+z_{\text{d}}} \frac{D_{\text{d}}}{D_{\text{d}}}}{V \zeta_0}} \frac{1 - \kappa + \gamma}{\sqrt{1 + \frac{4\gamma(1-\kappa)}{(1-\kappa-\gamma)^2} \sin^2 \psi}} \quad (3.2.7)$$

mit den von Wambsganß et al. [46] angegebenen dimensionslosen Konstanten $C = 1.15, 1.16, 0.80, 0.78$ für die vier Bilder. Für das Weltmodell wurde ein Friedmann Universum mit $\Omega = 1$ und $\Lambda = 0$ angenommen. Bei einer Hubble-Konstanten von $H_0 = 75 h_{75} \text{ km/s Mpc}^{-1}$ folgt für die *apparent size distances*

$$\begin{aligned} D_{\text{d}} &= 146.0 \text{ Mpc}/h_{75}, & D_{\text{s}} &= 1160.4 \text{ Mpc}/h_{75} \\ D_{\text{ds}} &= 1104.0 \text{ Mpc}/h_{75}, & D &= 153.5 \text{ Mpc}/h_{75} \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

und die Einheitslänge in der Quellebene lautet

$$\zeta_0 = 4.11 \sqrt{\frac{|1 - \kappa_c| M_{\text{eff}}}{h_{75} M_\odot}} 10^{-2} \text{pc}. \quad (3.2.9)$$

Im Winkelmaß beträgt der Einsteinradius damit

$$\theta_0 = 7.31 \sqrt{\frac{|1 - \kappa_c| h_{75} M_{\text{eff}}}{M_\odot}} \mu\text{as}. \quad (3.2.10)$$

Bei Verwendung eines Salpeter-Massenspektrums mit einer Wahrscheinlichkeitsdichte $\phi(M) \sim M^{-2.35}$ bei Sternmassen $0.1 < M/M_\odot < 1$ gilt dann $M_{\text{eff}} = 0.3374$; mit $\kappa_c = 0$ beträgt der Einsteinradius $\zeta_0 = 2.39 \cdot 10^{-2} \text{pc}/\sqrt{h_{75}}$ und für die Korrelationszeit folgt

$$\tau_h = 7.44 a \frac{C}{h_{75}^{3/4}} \sqrt{\frac{R}{0.2}} \left(\frac{10^{-3}/\text{d}}{V} \right) \frac{1 - \kappa + \gamma}{\sqrt{1 + \frac{4\gamma(1-\kappa)}{(1-\kappa-\gamma)^2} \sin^2 \psi}}. \quad (3.2.11)$$

Die letzten beiden Spalten in Tabelle 3 zeigen die so berechneten Korrelationszeiten τ_h für verschiedene Mikrolinsenmodelle im Vergleich zu den Werten t_h , welche direkt aus den mit (1.3.53, 1.3.54) ermittelten Autokorrelationsfunktionen abgelesen sind. Bei diesem Vergleich ist zu berücksichtigen, daß alle Längeneinheiten bei der Bestimmung der t_h auf einen in der Größe unbekanntem Einsteinradius normiert sind, während die Berechnung von τ_h nach (3.2.7) explizit von dessen Wert abhängt. Aus der Allgemeingültigkeit dieser Gleichung würde dann folgen, daß es möglich wäre, aus den Ergebnissen der vorgestellten Modellrechnungen die Größe des Einsteinradius und damit die effektive Masse zu bestimmen, obwohl diese in den Bestimmungsgleichungen nicht explizit auftritt. Da weiterhin für große Quellen ($R > 10$) die Korrelationszeit proportional zum Quellradius ist, handelt es sich bei (3.2.7) um eine, in einem begrenzten Parameterbereich gültige Näherung. Die Konstanten C sind dabei vom gewählten Massenspektrum ebenso abhängig, wie von der Kontinuumsmassendichte, für die $\kappa_c = 0$ gesetzt wurde. Die Beispielrechnungen zu Bild A zeigen besonders große Unterschiede zwischen τ_h und t_h bei $\kappa_c \neq 0$. Bei den übrigen Bildern B–D, bei denen die beiden vorgestellten Makrolinsenmodelle deutlich unterschiedliche Werte für κ_t und γ' liefern, wird auch deren Einfluß auf die Ergebnisse für τ_h deutlich.

Die Ergebnisse für Modell 1 nach Schneider et al. [37] stimmen für die Bestapproximation bei Bild A und besonders für Bild D sehr gut überein. Abbildung 14 zeigt, daß aus der Auswertung der Lichtkurve für Bild D ebenso wie aus den Modellrechnungen und aus Gleichung (3.2.7) eine Korrelationszeit von 300 Tagen ermittelt wird, wobei gerade für dieses Bild die Bestimmung der Autokorrelationsfunktion auch für kleine Zeiten t mit einem großen Fehler behaftet ist, und daher eine zufällige Übereinstimmung nicht auszuschließen ist. Da die Statistik für die Autokorrelationsfunktionen bei $t > 300 \text{d}$ unzureichend ist, können die Ergebnisse für τ_h und t_h bei den übrigen Bildern nicht weiter anhand der Beobachtungsdaten überprüft werden. Zwar suggeriert die

abgebildete Autokorrelationsfunktion von Bild C, daß hier die Korrelationszeit 450 Tage beträgt und somit das Ergebnis nach (3.2.7) bestätigt, aber die im Vergleich zu Bild A und B wesentlich schlechtere Qualität der Approximation durch Modellfunktionen deutet an, daß Fehler in der Photometrie und eine ungenügende Statistik das Ergebnis verfälschen. Abbildung 15 zeigt die geringe Übereinstimmung der Autokorrelationsfunktionen bei Bild C für $t < 100$ d.

Es wird deutlich, daß die hier errechnete Transversalgeschwindigkeit in der Beobachterebene mit 2900–3500 km/s vier- bis sechsmal so groß ist, wie die Modellannahme von Wambsganß et al. [46] mit 600 km/s, welche auch von der gleichen Größenordnung ist, wie der von Kayser, Refsdal und Stabell [18] verwendete Wert für v_d . Demgegenüber stimmen die Quellgrößen in den beiden Arbeiten mit dem hier ermittelten Wert überein und die, im Rahmen dieser Arbeit bestimmten Zeitskalen sind sehr viel kleiner. Während Wambsganß et al. [46] Korrelationszeiten zwischen 6 (Bild D) und 100 (Bild A) Jahren ermitteln, führt die Berechnung der Autokorrelationsfunktionen aus gemessenen Lichtkurven ebenso wie die mit (1.3.54, 1.3.53) ermittelten Modellfunktionen zu deutlich kleineren Werten.

Weitere Ergebnisse folgen aus einer Analyse der Varianz der Intensität. Die aus Modellrechnungen ermittelten Helligkeitsschwankungen auf Grund des Mikrolinseneffektes sind für Quellradien $R \leq 1$ deutlich größer als in den Lichtkurven von QSO 2237+0305 außer bei großen κ_c und einem Massenanteil von weniger als 10% in Sternen und kompakten Objekten. Allerdings sind die Ergebnisse aus Modellrechnungen für Bild A bis C um 25% kleiner als die von Wambsganß et al. [46] veröffentlichten Resultate¹⁴ für $R = 0.2$. Ein großer Anteil dieser Diskrepanz kann durch die unterschiedliche Berechnungsweise erklärt werden. Während die Autoren die Varianz der Helligkeit aus $m = 2.5 \log I$ berechnet haben, wird in der vorliegenden Arbeit die Varianz der Intensität nach (2.3.1) in Magnituden umgerechnet. Kontrollrechnungen mittels Strahlenschießen ergeben einen mit wachsendem Quellradius abnehmenden Unterschied der Resultate, welche bei $R = 5$ für Rechnungen mit (2.3.1) um etwa 10% und bei $R = 1$ um 25% kleiner sind als bei der von Wambsganß et al. verwendeten Vorgehensweise. Mit der Annahme, daß durch die geringe Beobachtungshäufigkeit eine untere Schranke für die Variabilität der Quasarbilder bestimmt wird, folgt für die Bilder A und C eine maximale Quellgröße von $R = 2$, sowie $R = 3$ bzw. $R = 5$ in den Bildern B und D. Verglichen mit der Qualität der Informationen aus den Autokorrelationsfunktionen sind diese Werte allerdings bedeutungslos, da sie zu keiner weiteren Einschränkung der Mikrolinsenparameter führen.

Damit wird deutlich, daß auch nach 15 Jahren Beobachtung am Einsteinkreuz, die bisher gewonnene Lichtkurve nicht repräsentativ für die Variabilität des Quasars ist, und damit viel zu kurz, um eine umfassende statistische Analyse durchführen zu können, für die zusätzlich eine wesentlich größere Beobachtungshäufigkeit erforderlich ist, als für die Jahre vor 1997 vorliegt.

¹⁴für die von Wambsganß et al. verwendete Quellgröße σ_s gilt $\sigma_s \equiv \sqrt{2}R\zeta_0$ in der hier verwendeten Notation

3.3 Die Radioquelle B1600+434

Ein völlig anderes Bild ergibt sich bei dem Quasar B1600+434, von dem Koopmans et al. [20] von Februar bis Oktober 1998 eine Lichtkurve im Radiobereich 8.5-GHz am VLA in New Mexico aufgenommen haben. Bei einer Länge von 243 Tagen und einem Abstand der Messungen von 1-6 Tagen (3.33 Tage im Mittel), handelt es sich hier um eine kurze aber regelmässig aufgenommene Lichtkurve eines Doppelquasars. Eine scheinbar überlichtschnelle Transversalbewegung der Quelle verkürzt die für den Mikrolinseneffekt relevante Zeitskala und bei Autokorrelationslängen von 3.15 bzw. 3.82 Tagen für Bild A und B beträgt das Verhältnis von Lichtkurvenlänge zu diesen Werten 77 und 64, was deutlich größer ist als bei QSO 2237+0305, bei dem dieses Verhältnis zwischen weniger als 6 (Bild A) und 17 (Bild D) liegt. Der Unterschied, auch zu anderen im optischen Bereich beobachteten Linsensystemen besteht darin, daß der Mikrolinseneffekt nicht durch die Bewegung der gesamten Quelle gegenüber den Kaustiken hervorgerufen wird, sondern daß sich ein Teil der Strahlungsquelle in einem emittierten Radiojet befindet. Elektronen in diesem Jet bewegen sich beinahe mit Lichtgeschwindigkeit in einem Magnetfeld und senden Synchrotronstrahlung aus. Erstreckt sich der Jet nahezu in die Richtung zum Beobachter, sieht dieser auf Grund eines Projektionseffektes eine überlichtschnelle Transversalbewegung der Strahlungsquelle¹⁵ und die Zeitskalen für die Variabilität durch den Mikrolinseneffekt sind deshalb sehr viel kleiner als bei anderen bekannten Objekten.

Weiterhin ist auffällig, daß die Autokorrelationsfunktion nicht, wie nach der Theorie des Mikrolinseneffektes zu erwarten ist, gegen null strebt, sondern nach Erreichen eines lokalen Minimums beginnt zu oszillieren. Das gleiche Verhalten ist bei den Autokorrelationsfunktionen für die von Fassnacht et al. [12] aufgenommenen Lichtkurven des Vierfachbildes vom Kern der Radiogalaxie B1608+656 zu beobachten (Abbildung 30). Die Ursache dafür liegt vor allem darin, daß die direkte Berechnung von Autokorrelationsfunktionen aus einer Meßreihe nicht die optimale Vorgehensweise ist, um gesicherte statistische Informationen zu erhalten, sondern nur dazu dienen kann, auf sehr schnellem Wege erste Ergebnisse aus den Daten abzuleiten.

Um abschätzen zu können, bis zu welcher Länge eine Autokorrelationsfunktion zuverlässig aus einer Lichtkurve bestimmt werden kann, hilft ein Vergleich mit QSO 2237+0305. Bei diesem Linsensystem mit einer Lichtkurvenlänge von 5200 Tagen weichen die mit (1.3.53, 1.3.54) berechneten Modellfunktionen trotz der großen Datenmenge (nach der Interpolation in der Lichtkurve) für $t > 300$ d deutlich von den Autokorrelationsfunktionen der Lichtkurven ab, wobei die Autokorrelationsfunktionslänge 5.8% der Lichtkurvenlänge beträgt. Bei B1600+434 entspricht 5.8% der Lichtkurvenlänge einem Zeitraum von 15 Tagen und so ist zu erwarten, daß auch hier für größere Zeiten keine zufriedenstellende Approximation möglich ist. Da dieser Vergleich die Unterschiede der beobachteten Objekte und ihrer Lichtkurven nicht berücksichtigt, sondern nur auf der Anzahl der Meßwerte basiert, kann es sich hierbei allerdings nur um eine Abschätzung der Größenordnung für die Zuverlässigkeit empirischer Autokorre-

¹⁵ Ausführliche Beschreibungen finden sich in den Büchern von LANG [23] S.217ff, oder PEACOCK [29] S.419ff.

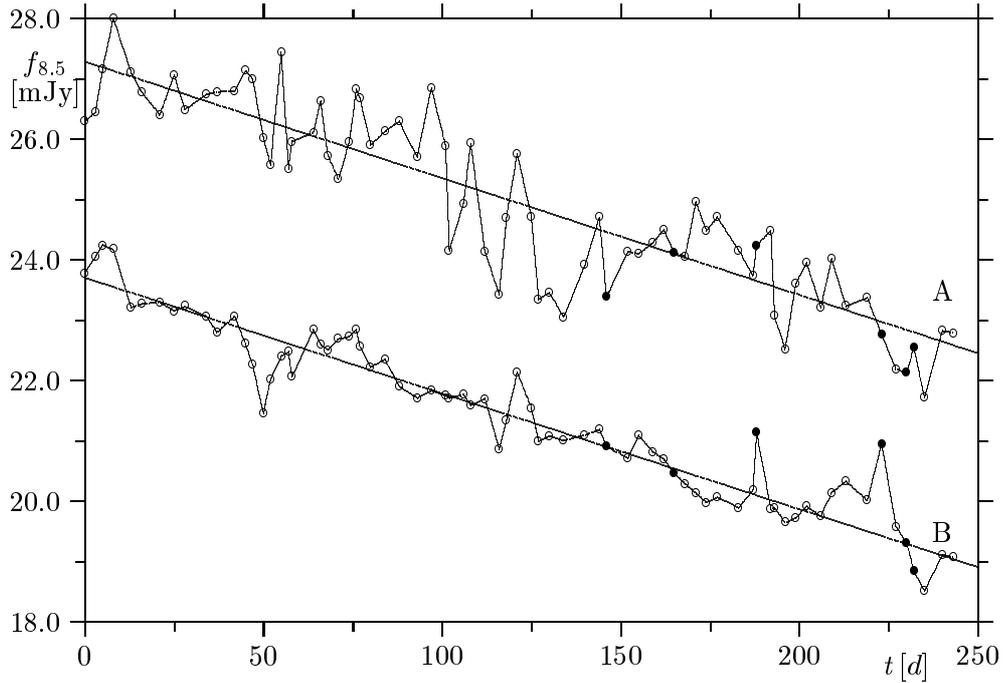


Abbildung 21: Lichtkurven für den Quasar B1600+434A,B mit dem zur Normierung verwendeten gleitenden Mittelwert. Messungen mit überdurchschnittlich großem Fehler (nach Koopmans et al. [20]) sind mit • gekennzeichnet. Beginn der Beobachtungen am 13.2.1998 (Tag Nr. 0)

lationsfunktionen handeln. Abbildung 22 zeigt, daß für Bild A sogar bei $t > 6$ d der Verlauf der Autokorrelationsfunktion nicht mehr durch den Mikrolinseneffekt erklärt werden kann, wobei die Ursache dafür bisher unbekannt ist. Daher wird für die folgenden Untersuchungen die Länge der Autokorrelationsfunktionen auf sechs Tage für Bild A und zehn Tage für Bild B reduziert. Um glatte Autokorrelationsfunktionen zu erhalten, müssen auch bei diesem Objekt die Meßwerte durch lineare Interpolation zu einer regelmäßigen Lichtkurve ergänzt werden. Vergleichsrechnungen zeigen, daß mindestens zwei Daten pro Tag notwendig sind, da bei einer geringeren Anzahl der Verlauf der Autokorrelationsfunktionen für kleine Zeiten t von der Punktdichte in der Lichtkurve abhängt. Der statistische Einfluß dieser künstlichen Daten ist geringer als bei den Lichtkurven von QSO 2237+0305, bei denen auf diese Weise hauptsächlich die geringe Beobachtungsdichte der ersten zehn Jahre ausgeglichen wurde. Auf jeden Fall enthalten die Lichtkurven nur sehr wenig Information über Variabilität auf kleinen (< 3 d) Zeitskalen, wodurch bei Korrelationslängen von der gleichen Größenordnung mit Sicherheit auch die Autokorrelationsfunktionen verfälscht werden. Da diese Funktionen aber für kleine Zeiten durch eine quadratische Näherung beschrieben werden können und sich bei weiterer Vergrößerung der Punktdichte in der Lichtkurve nicht mehr ändern, kann auch das Ergebnis für kleine t mit ausreichender Genauigkeit bestimmt werden. Bezogen auf die etwa hundertfachen Korrelationslängen gegenüber B1600+434 ist die zeitliche Dichte

der Daten im Mittel beim Einsteinkreuz größer als bei diesem Doppelquasar. Der signifikante Unterschied der Lichtkurven besteht vor allem in der deutlich größeren relativen Länge (bezogen auf die Korrelationszeit) der Meßperiode bei dieser Radioquelle.

3.3.1 Beobachtungsdaten

Nach Koopmans und de Bruyn [21] und den darin enthaltenen Quellenangaben liegt der Quasar B1600+434 mit einer Rotverschiebung von $z = 1.59$ hinter einer von der Kante (edge-on) sichtbaren Spiralgalaxie mit $z = 0.41$. Der Bildabstand beträgt 1.39 arcsec, Bild B erscheint nahe am Zentrum der Galaxie, Bild A ist durch den Halo hindurch sichtbar. Für $H_0 = 75 h_{75} \text{ km/s Mpc}^{-1}$ gilt in einem Friedman-Universum mit $\Omega = 1$ und $\Lambda = 0$:

$$D_d = 895.6 \text{ Mpc}/h_{75}, \quad D_s = 1169.5 \text{ Mpc}/h_{75} \quad \text{und} \quad D_{ds} = 682.0 \text{ Mpc}/h_{75}. \quad (3.3.1)$$

Damit ist $D = 522.2 \text{ Mpc}/h_{75}$ und der Einsteinradius in der Quellebene beträgt

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= 1.30 \sqrt{\frac{|1 - \kappa_c| M_{\text{eff}}}{h_{75} M_\odot}} 10^{-2} \text{ pc} \\ \theta_0 &:= \frac{\zeta_0}{D_s} = 2.30 \sqrt{\frac{|1 - \kappa_c| h_{75} M_{\text{eff}}}{M_\odot}} \mu\text{as}. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Eine zweite Spiralgalaxie G2 ist bei gleicher Rotverschiebung in der Aufsicht (face-on) zu sehen und liegt in einem Winkelabstand von 4.5 arcsec von G1 entfernt, was in der Projektion einer Distanz von etwa 30 kpc entspricht. Die Autoren schließen daraus, daß der Halo dieser Galaxie ebenfalls zur Massendichte an den Bildpositionen beiträgt. Tabelle 4 zeigt die Parameter für das von Koopmans et al. [19] ermittelte Linsenmodell bei einer Massenverteilung in der Form eines nichtsingulären isothermen Ellipsoids. Für Gesamtmassendichte und Scherung folgt aus dem Makrolinsenmodell $\kappa_t = \gamma' = 0.2$ für Bild A sowie $\kappa_t = \gamma' = 0.9$ für Bild B und aus der Beobachtung der Laufzeitdifferenz des Lichtes [20] resultiert mit $\Delta t_{B-A} = 47 \text{ d}$ ein deutlich längerer Lichtweg für Bild B. Das Verhältnis der durch den Makrolinseneffekt in den beiden Bildern hervorgerufenen Verstärkung beträgt mit diesen Linsenparametern $\mu_A/\mu_B = 4/3$. Der Quotient der Flußdichten aus den um den Time-Delay gegeneinander verschobenen Lichtkurven ist im Mittel nur 10% kleiner. Beim Einsteinkreuz demgegenüber weichen relative Flußdichte und Verstärkungsverhältnis für die einzelnen Bildpaare um mehr als 50% voneinander ab, wodurch nochmals bestätigt wird, daß die Länge der Lichtkurve bei diesem Vierfachquasar nicht ausreicht, um daraus gesicherte statistische Aussagen über Mikrolinsenparameter ableiten zu können.

Da bei B1600+434 die gemessene Intensität im Laufe der Beobachtungskampagnen nahezu linear abnahm, muß zur Normierung der Lichtkurven anstatt eines globalen Mittelwertes der momentane Erwartungswert (running mean) der Intensität herangezogen werden. Zur Bestimmung dieser Werte werden die Lichtkurven mittels linearer Regression jeweils durch eine Gerade approximiert, welche die mittlere Intensitätsabnahme während der Messungsperiode wiedergibt (Koopmans et al. [20]). Um aus den derart normierten Lichtkurven die

einzelnen Varianzen zu ermitteln, muß allerdings berücksichtigt werden, daß fast ausschließlich der Anteil des Jets, nach Modellrechnungen von Koopmans und de Bruyn [21] zwischen 5 und 11% der Gesamtintensität, als Bemessungsgrundlage dient, während die Winkelgeschwindigkeit des Quasarkerns so klein ist, daß der Einfluß des Mikrolinseneffektes auf diesen deutlich größeren Teil der Quelle innerhalb des Beobachtungszeitraumes vernachlässigt werden kann.

Sechs Datenpunkte, welche nach Koopmans et al. [20] mit einem überdurchschnittlich großen Meßfehler behaftet sind, werden in der folgenden Analyse nicht berücksichtigt. Dieses führt insbesondere bei Bild B zu einem deutlich flacheren Verlauf der Autokorrelationsfunktion, zu einer Verkleinerung der Varianz um 30%, sowie zu einer Verlängerung der Autokorrelationszeit auf 4.28 Tage (3.28 Tage für Bild A). Zusätzlich wird deutlich, daß besonders in Bild B der statistische Einfluß dieser einzelnen Meßwerte groß ist, was ein Indiz für eine zu geringe Messungsdichte in der Lichtkurve dieses Objektes ist. Eine Kontrollrechnung zeigt, daß in Bild A die Vernachlässigung einzelner Meßwerte mit besonders hoher Intensität (Messung von den Tagen Nr. 55, 108 und 121) einen ebenso großen Einfluß auf die Autokorrelationsfunktion hat, während das Fehlen der beiden ersten dieser Werte in der Lichtkurve von Bild B durch die lineare Interpolation wieder ausgeglichen wird. Durch die Interpolation auf zwei Daten pro Tag wird außerdem in beiden Bildern die Abweichung der Autokorrelationsfunktion von der Parabelform für kleine t weiter reduziert und die Korrelationszeit steigt auf 3.36 bzw. 4.36 für Bild A und B.

3.3.2 Ein Mikrolinsenmodell

Anders als beim Einsteinkreuz muß ein Mikrolinsenmodell für das Linsensystem B1600+434 zwei verschiedene Komponenten der Quelle berücksichtigen. Zusätzlich zum Quasarkern mit der mittleren Intensität $\langle I_Q \rangle := (1 - f) \langle I_t \rangle$ trägt hier der Radiojet einen Anteil $\langle I_J \rangle := f \langle I_t \rangle$ zur Gesamtintensität $\langle I_t \rangle$ bei. Dabei ist zu erwarten, daß die intrinsische Variabilität der Komponenten unterschiedlich ist, da es sich um zwei physikalisch unterschiedliche Objekte handelt und Intensitätsänderungen beim kleineren Jet schneller ablaufen können. Die mittlere Verstärkung $\langle \mu \rangle$ ist innerhalb jedes Makrobildes für beide Quellkomponenten im Rahmen der Linearisierung des Makrolinseneffektes gleich; durch den Mikrolinseneffekt verursachte Helligkeitsschwankungen allerdings sind beim kleineren Jet wesentlich stärker und finden durch die hohe Transversalgeschwindigkeit auch auf einer deutlich kürzeren Zeitskala statt. Für die Gesamtintensität als Funktion der Zeit gilt dann

$$I_t(t) = (\langle I_{Q0} \rangle + \delta I_{Q0}(t)) (\langle \mu \rangle + \delta \mu_Q(t)) + (\langle I_{J0} \rangle + \delta I_{J0}(t)) (\langle \mu \rangle + \delta \mu_J(t)), \quad (3.3.3)$$

Bild	κ_t	γ'	A	x''	y''
A	0.2	0.2	1.67	-0.33	1.09
B	0.9	0.9	-1.25	0.07	-0.24

Tabelle 4: Die Makrolinsenparameter für den Radio-Doppelquasar B1600+434A,B: Konvergenz und Scherung aus [21], Bildkoordinaten aus [19]; Galaxienzentrum (G1) im Koordinatenursprung.

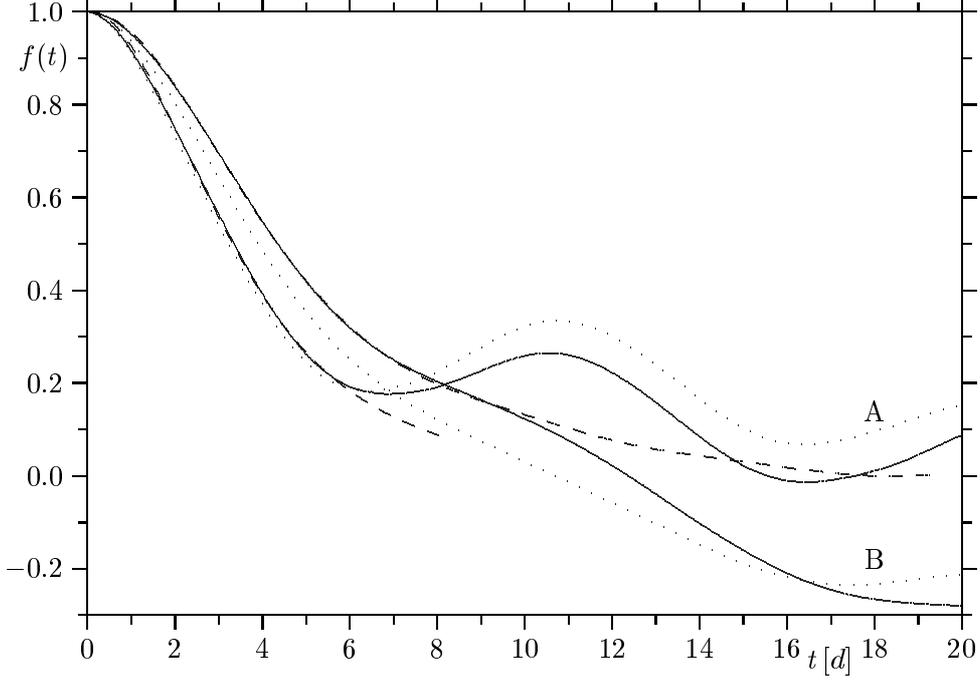


Abbildung 22: Autokorrelationsfunktionen für den Quasar B1600+434A,B unter Verzicht auf sechs Datenpunkte (durchgezogene Linien), aus den vollständigen Lichtkurven (punktiert) und Modellfunktionen für $R = 0.7 \zeta_0$, $V = 0.497 \zeta_0/d$ bei Bild A und $R = 2.0 \zeta_0$, $V = 1.03 \zeta_0/d$ bei $\kappa_c = 0.84$ für Bild B. (gestrichelt)

wobei der Index 0 wieder die ungelinste Intensität des Quasars kennzeichnet. Wegen der Kürze der Lichtkurve ist zu erwarten, daß nach der Normierung mit dem zeitabhängigen Erwartungswert der Intensität nur die Helligkeitsschwankungen des Jets berücksichtigt werden müssen und Variabilität durch den Mikrolinseneffekt für den Quasarkern selbst vernachlässigt werden kann. In dieser Näherung gilt für die Gesamtintensität nach der Elimination der linearen Intensitätsabnahme durch Normierung mit dem gleitenden Mittelwert der Intensität

$$\frac{I_t(t)}{\langle I_t \rangle} = 1 + \frac{\delta I_{t0}(t)}{\langle I_{t0} \rangle} + \frac{\delta \mu_J(t)}{\langle \mu \rangle} \left(f + \frac{\delta I_{J0}(t)}{\langle I_{t0} \rangle} \right), \quad (3.3.4)$$

woraus folgt

$$\frac{\langle I_t(t_1)I_t(t_2) \rangle}{\langle I_t \rangle^2} - 1 = \frac{\langle \delta I_{t0}(t_1)\delta I_{t0}(t_2) \rangle}{\langle I_{t0} \rangle^2} + \frac{\langle \delta \mu_J(t_1)\delta \mu_J(t_2) \rangle}{\langle \mu \rangle^2} \left(f^2 + \frac{\langle \delta I_{J0}(t_1)\delta I_{J0}(t_2) \rangle}{\langle I_{t0} \rangle^2} \right). \quad (3.3.5)$$

Damit ist es ohne Kenntnis von f , dem Anteil des Jets an der Gesamtintensität, nicht möglich, durch Berechnung des Quotienten der Autokorrelationsfunktionen oder von (3.3.5) für zwei verschiedene Bilder die intrinsische Variabilität aus der Lichtkurve zu eliminieren. Falls die Variabilität abgesehen von der linearen Intensitätsabnahme nur durch den Mikrolinseneffekt verursacht wird und

damit nach der Normierung $\delta I_{J_0}(t) \equiv 0$ ist, folgt

$$\text{Var} \frac{I_t(t)}{\langle I_t \rangle} = f^2 \frac{\langle \delta \mu_J(t)^2 \rangle}{\langle \mu \rangle^2} \quad (3.3.6)$$

und für die Korrelationsfunktion gilt

$$\frac{\langle I_t(t_1) I_t(t_2) \rangle}{\langle I_t \rangle^2} - 1 = f^2 \frac{\langle \delta \mu_J(t_1) \delta \mu_J(t_2) \rangle}{\langle \mu \rangle^2}, \quad (3.3.7)$$

so daß eine Autokorrelationsfunktion als Quotient dieser beiden Ausdrücke ebenso von f unabhängig ist, wie der Quotient der Varianzen für zwei verschiedene Makrobilder. Durch diesen zusätzlichen Parameter f gelingt es nicht mehr nach Ermittlung des Quellradius R aus den Autokorrelationsfunktionen die Kontinuumsmassendichte κ_c durch den Vergleich der Varianzen aus Modellrechnungen und Daten zu bestimmen und es muß also zumindestens in einem Bild neben der Quellgröße auch die Kontinuumsmassendichte κ_c aus der Autokorrelationsfunktion ermittelt werden, um durch Vergleich der Varianzen aus Modell und Lichtkurven in diesem Bild den Beitrag f des Jets zur Gesamtstrahlung bestimmen zu können. Im zweiten Bild kann dann aus der Varianz κ_c ermittelt werden. Falls dieser Wert schon aus der Untersuchung der Autokorrelationsfunktion bekannt war, ist eine zweite unabhängige Berechnung von f möglich.

3.3.3 Lichtkurvenanalyse

Obwohl neben dem Mikrolinseneffekt auch eine zu geringe Beobachtungshäufigkeit den Verlauf der aus den beobachteten Lichtkurven berechneten Autokorrelationsfunktionen bestimmt, gelingt es mittels Mikrolinsenmodell, die Autokorrelationsfunktion des schwächeren Bildes B in der Nähe des Galaxienzentrums für $t \leq 10$ d mit großer Genauigkeit zu reproduzieren. Die Lichtkurven enthalten nach linearer Interpolation zwei Daten pro Tag. Mit einer Schaar von Modellfunktionen für $R = 0.5, 0.7, 1, 2, 3, 5$ und 10 Einsteinradien jeweils mit den Winkeln $\psi = 0, \dots, 10 \cdot \pi/20$ zwischen Bewegungsrichtung und Scherung wurde $\|f - q\|_2$, der Abstand zur empirischen Autokorrelationsfunktion berechnet. Durch zweidimensionale Interpolation entstehen daraus Konturliniendarstellungen als Funktion von Quellradius und Winkel zwischen Bewegungsrichtung und Scherung. Ausschnitte aus den jeweiligen Umgebungen der Bestapproximationen zeigen die Abbildungen 25–28. Abbildung 28 zeigt zusätzlich für konstantes $R = 2$ die Norm $\|f - q\|_2$ in Abhängigkeit von der normierten Massendichte in kompakten Objekten κ_s und dem Winkel ψ . Entsprechende Ergebnisse für Bild A des Doppelquasars sind in den Abbildungen 23 und 24 dargestellt.

Bei Bild B gelingt die beste Approximation bei einer Kontinuumsmassendichte von $\kappa_c = 0.86$ für einen Quellradius von $R = 2$, die Geschwindigkeit $V = 1.069/\text{d}$ und den Winkel $\psi = 18^\circ$. Die Verdopplung der Punktdichte in der Lichtkurve durch lineare Interpolation führt zu einer Reduktion der Geschwindigkeit auf $V = 1.057/\text{d}$. Bei einer Approximation mit der Geschwindigkeit V als freiem Parameter folgt $V = 1.104/\text{d}$ bei $\kappa_c = 0.84$, $R = 2.2$ und $\psi = 17^\circ$.

Modellfunktionen für B1600+434

Bild	κ_c	R	ψ	V	$\ \cdot\ _1$	$\ \cdot\ _2$	$\ \cdot\ _\infty$	t_h
		$[\zeta_0]$	$[\pi/20]$	$[\zeta_0/d]$	$[\cdot 10^{-3}]$	$[\cdot 10^{-3}]$	$[\cdot 10^{-3}]$	$[d]$
A	0.00	0.7	2	0.539	51.88	24.19	15.75	3.28
	0.00	0.7	3	0.518	101.39	47.42	29.76	3.19
	0.00	0.5	3	0.423	59.00	28.77	20.69	3.28
	0.00	1.0	0	0.711	71.93	35.82	27.27	3.21
	0.05	1.0	0	0.725	103.35	56.25	43.10	3.12
B	0.86	2.0	2	1.069	30.06	11.55	6.72	4.33
	0.87	2.0	2	1.080	33.08	12.58	7.79	4.37
	0.85	2.0	2	1.058	44.19	16.42	8.97	4.31
	0.84	2.0	2	1.048	63.69	22.67	10.96	4.28
	0.84	2.2	1.9	1.129	85.72	30.96	16.02	4.24
	0.84	1.0	3	0.626	117.57	52.60	33.35	4.50
	0.84	3.0	1	1.499	133.36	53.46	30.49	4.34
	0.82	2.0	2	1.030	99.03	34.99	15.71	4.25
	0.74	1.0	2	0.642	88.12	32.57	18.30	4.36
	0.70	1.0	2	0.617	60.29	24.69	16.29	4.38

Bild	κ_c	R	ψ	V	$\ \cdot\ _1$	$\ \cdot\ _2$	$\ \cdot\ _\infty$	t_h
		$[\zeta_0]$	$[\pi/20]$	$[\zeta_0/d]$	$[\cdot 10^{-3}]$	$[\cdot 10^{-3}]$	$[\cdot 10^{-3}]$	$[d]$
A	0.00	0.7	3	0.497	62.00	13.08	4.57	3.32
	0.00	0.7	4	0.461	165.62	25.02	8.30	3.34
	0.00	0.7	2	0.536	99.26	23.38	8.33	3.30
	0.00	0.5	4	0.387	64.79	16.60	6.00	3.32
	0.00	0.5	5	0.359	120.67	17.14	5.69	3.33
	0.00	1.0	2	0.645	73.96	16.56	5.82	3.31
	0.05	1.0	0	0.689	154.88	33.22	11.06	3.28
	0.05	1.0	2	0.637	73.72	16.79	5.90	3.30
B	0.84	2.2	1.9	1.104	52.16	7.94	2.14	4.33
	0.85	2.0	2	1.047	55.93	8.98	2.48	4.35
	0.84	2.0	2	1.033	56.16	9.12	2.45	4.35
	0.86	2.0	2	1.064	55.20	9.86	2.71	4.35
	0.82	2.0	2	1.005	75.47	11.95	2.99	4.36
	0.87	2.0	2	1.083	66.00	12.23	3.29	4.36

Tabelle 5: Approximationen an die Autokorrelationsfunktionen der Makrobilder in Abhängigkeit von κ_c , R und ψ bei einer Länge von 6 (10) Tagen für Bild A (B).

Angegeben sind Ergebnisse für diejenigen Modelle, für die der Abstand $\|f - q\|_2 < 1.5 \min(\|f - q\|_2)$ ist, sowie einige Vergleichswerte. Die erste Zeile eines Abschnittes zeigt die Parameter für die jeweilige Bestapproximation.

Oben: Geschwindigkeit nach (3.1.7) berechnet.

Unten: Geschwindigkeit V als freier Parameter bei der Approximation.

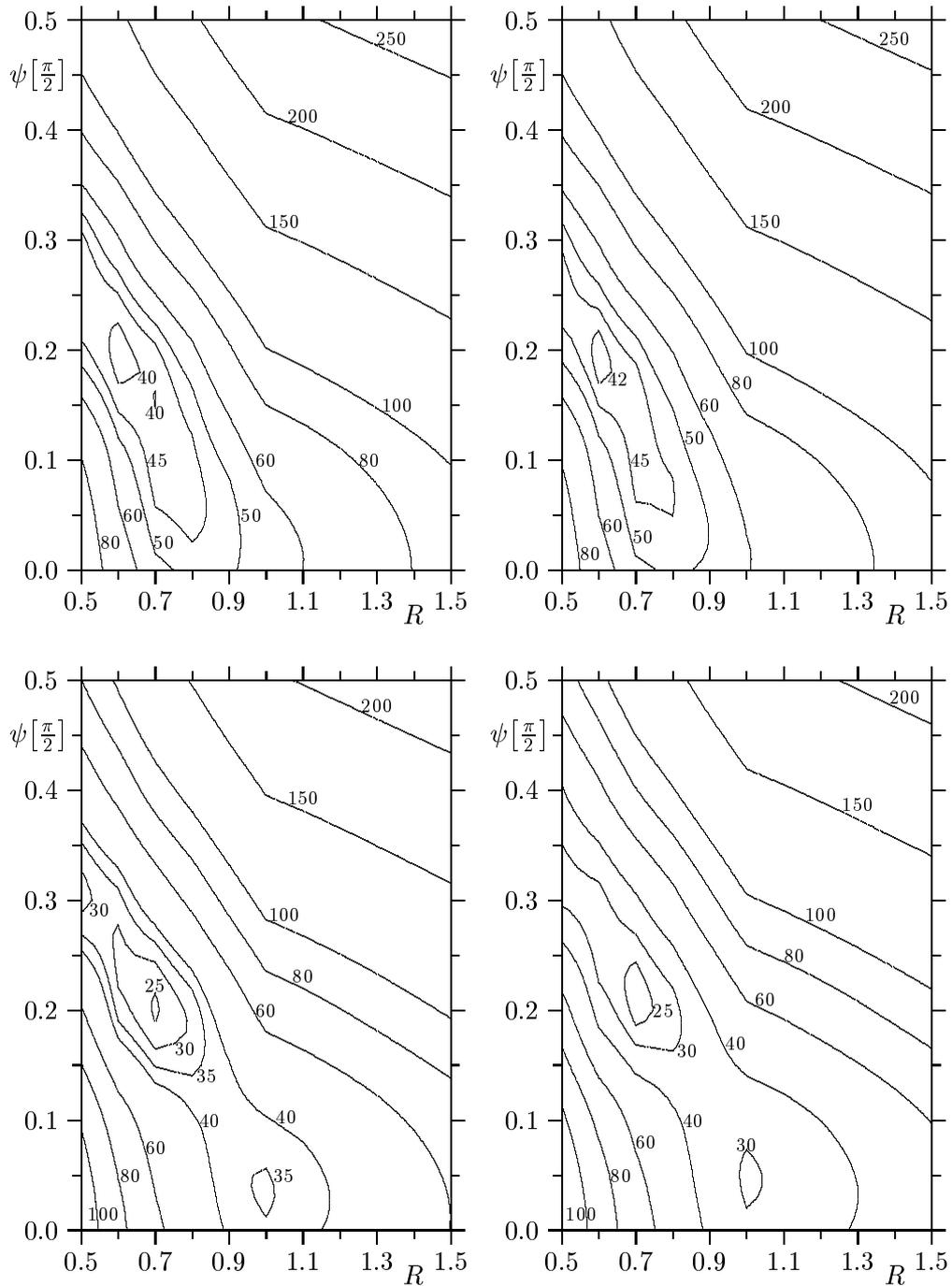


Abbildung 23: B1600+434A: Konturlinien von $10^3 \cdot \|f(t) - q(\vec{V}t)\|_2$ für $T_{\max} = 6$ d und $\kappa_c = 0$; vollständige Lichtkurve interpoliert auf ein Datum pro Tag (oben links) und nach Elimination von sechs Messungen mit großem Meßfehler (oben rechts). Die derart verkürzte Lichtkurve interpoliert auf zwei Daten pro Tag (unten links) und auf vier Daten pro Tag (unten rechts), alle mit der effektiven Transversalgeschwindigkeit V nach (3.1.7) berechnet.

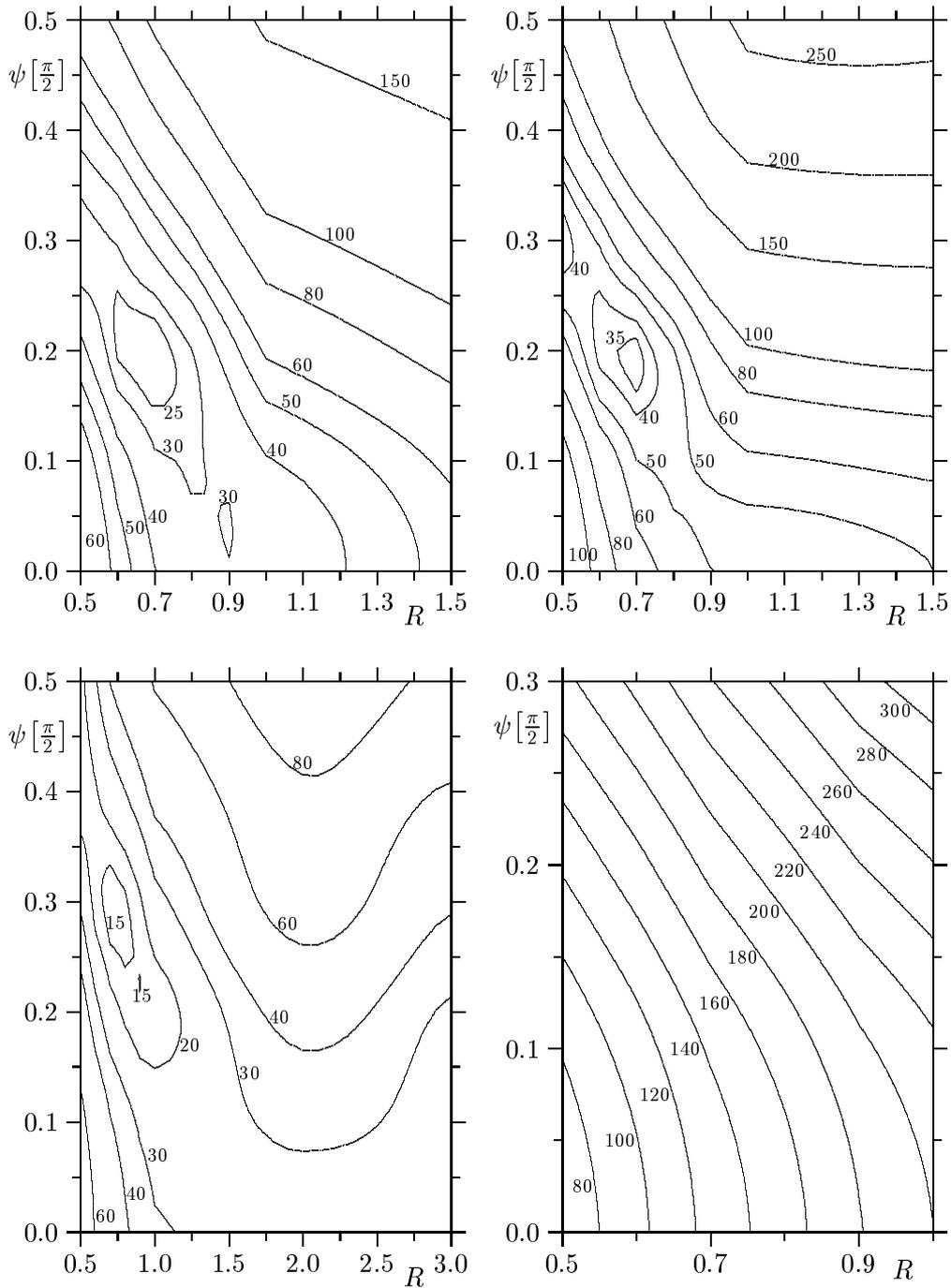


Abbildung 24: B1600+434A: Konturlinien von $10^3 \cdot \|f(t) - q(\vec{V}t)\|_2$ für die um sechs Messungen verkürzte Lichtkurve, interpoliert auf zwei Daten pro Tag mit der Geschwindigkeit V nach (3.1.7) für $T_{\max} = 5$ d (oben links), $T_{\max} = 7$ d (oben rechts), sowie mit V als freiem Parameter bei der Approximation und $T_{\max} = 6$ d (unten links) und eine Beispielrechnung mit V nach (3.1.7), $T_{\max} = 6$ d nach zusätzlicher Streichung der Messungen von den Tagen Nr. 55, 108 und 121 vor der Interpolation. (unten rechts).

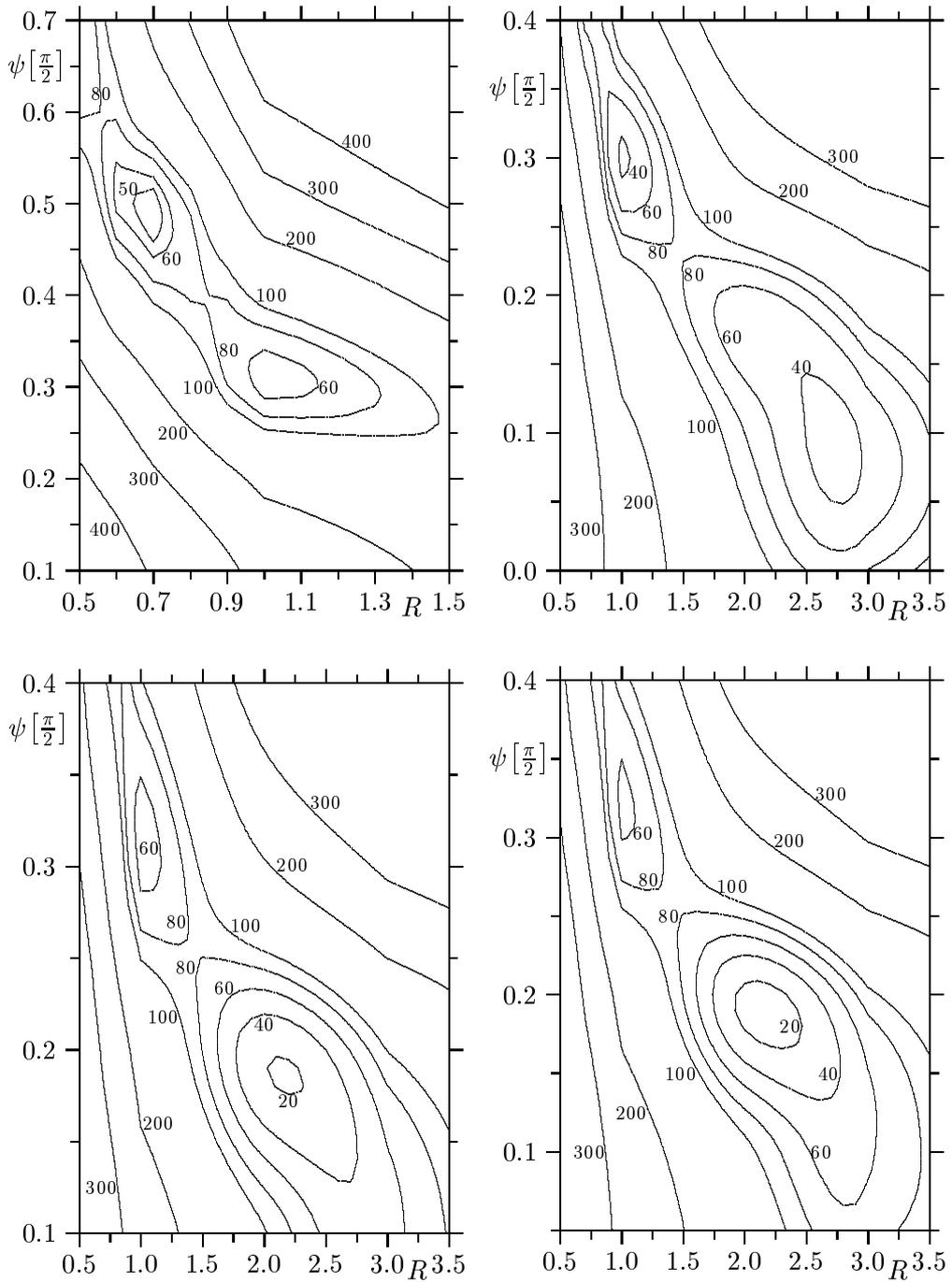


Abbildung 25: B1600+434B: Konturlinien von $10^3 \cdot \|f(t) - q(\vec{V}t)\|_2$ für $T_{\max} = 10$ d mit der Geschwindigkeit V nach (3.1.7) und $\kappa_c = 0.84$. Vollständige Lichtkurve interpoliert auf ein Datum pro Tag (oben links) und nach Elimination von sechs Messungen mit großem Meßfehler (oben rechts). Die derart verkürzte Lichtkurve interpoliert auf zwei Daten pro Tag (unten links) und auf vier Daten pro Tag (unten rechts).

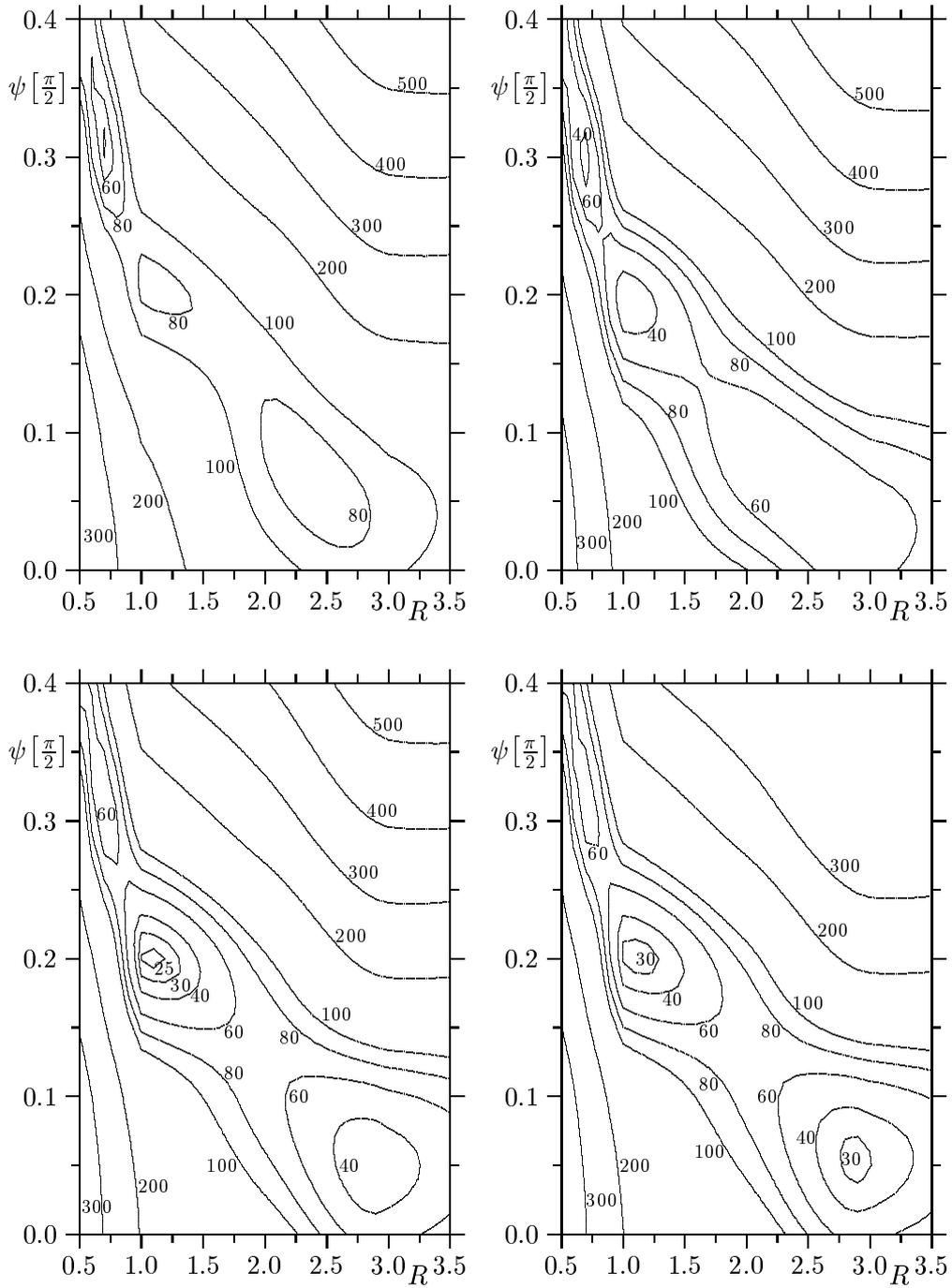


Abbildung 26: B1600+434B: $\kappa_c = 0.7$, Erläuterungen siehe Abbildung 25.

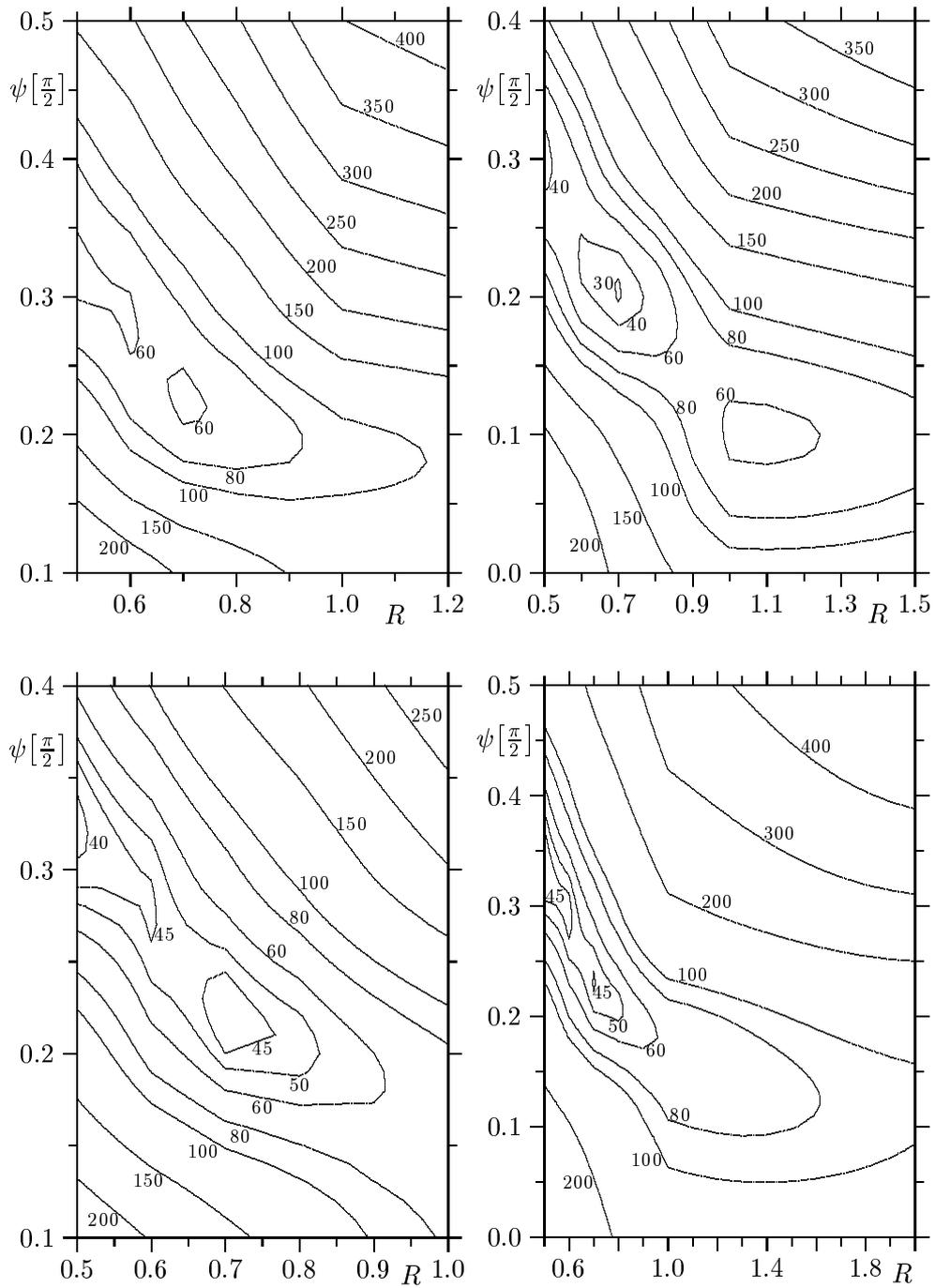


Abbildung 27: B1600+434B: $\kappa_c = 0$, Erläuterungen siehe Abbildung 25.

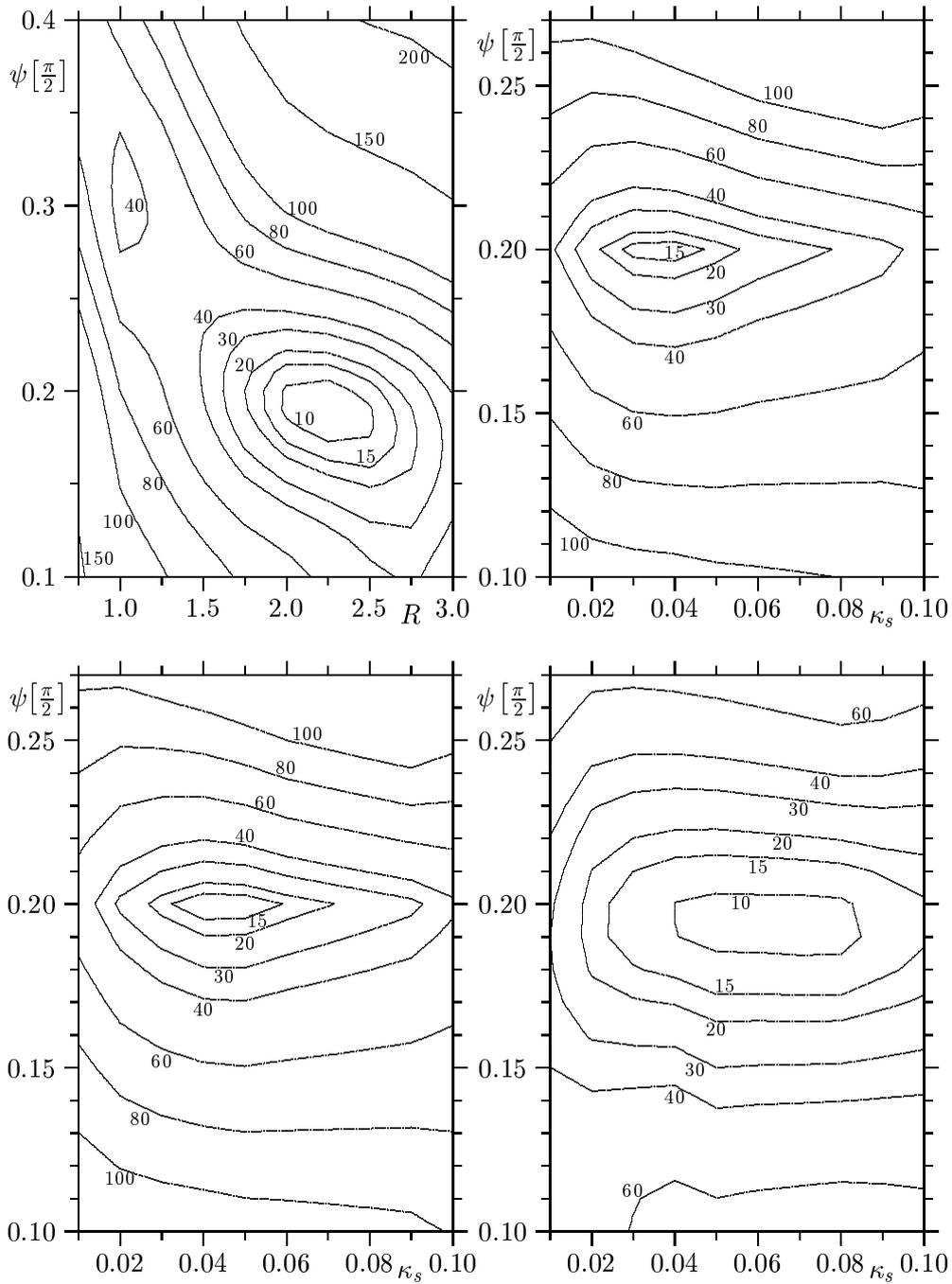


Abbildung 28: B1600+434B: Konturlinien von $10^3 \cdot \|f(t) - q(\vec{V}t)\|_2$ für $T_{\max} = 10$ d und $\kappa_c = 0.84$, zwei Daten pro Tag und Geschwindigkeit V als freier Parameter (oben links). Als Funktion von $\kappa_s = \kappa_t - \kappa_c$ für $R = 2$ bei zwei Daten pro Tag (oben rechts) und vier Daten pro Tag (unten links) jeweils mit der Geschwindigkeit V nach (3.1.7) und bei zwei Daten pro Tag mit V als freiem Parameter bei der Approximation (unten rechts).

Auch hier führt eine Verdopplung der Punktdichte auf vier Daten pro Tag nur zu einer auf $V = 1.099/d$ verringerten Geschwindigkeit. Bei einer Lichtkurve mit einem Wert pro Tag führen Rechnungen mit V nach Gleichung (3.1.7) zu völlig anderen Ergebnissen, da diese Punktdichte nicht ausreicht, um die empirische Autokorrelationsfunktion durch Polynomapproximation auch für kleine Zeiten t mit ausreichender Genauigkeit wiederzugeben, so daß die Geschwindigkeit V nicht korrekt bestimmt werden kann. Bei V als freiem Parameter hat die Halbierung der Punktdichte in der Lichtkurve keinen signifikanten Einfluß auf das Ergebnis.

B1600+434A

κ_c	R	V	ψ	Var	f
0.0	0.7	0.54	18°	0.198	5.5%
0.0	0.7	0.50	27°		

Tabelle 6: Die Bestapproximationen für den Radio-Doppelquasar B1600+434A: oben mit V nach (3.1.7), unten mit V als freiem Parameter. $\text{Var} \equiv \text{Var} \frac{1}{\langle I \rangle}$

Der Versuch zur Einsparung von Rechenzeit zusätzliche Autokorrelationsfunktionen mittels Interpolation zu erzeugen zeigt, daß die benötigte Genauigkeit nicht erreicht wird und dieser Ansatz nur geeignet ist, Hinweise für die weitere Auswahl geeigneter Modellfunktionen zu liefern. Änderungen des Quellradius um mehr als 20% oder des Winkels ψ um über 10% vergrößern den Minimalabstand allerdings jeweils um mehr als 50% und können daher für realistische Mikrolinsenmodelle ausgeschlossen werden. Diese Qualität der Approximation wird unter anderem erreicht, weil für Bild B die Autokorrelationsfunktion auch für kleine Zeiten t mit großer Genauigkeit durch eine gerade Funktion dargestellt werden kann, und eine gute Anpassung erreicht wird, da die Modellfunktionen als Funktionen von $(Vt)^2$ ebenfalls gerade sind.

Für Bild A demgegenüber kann der lineare Term in der Reihenentwicklung der empirischen Autokorrelationsfunktion nicht vernachlässigt werden und die Autokorrelationsfunktion kann auch nur für $t \leq 6$ d durch eine Modellfunktion approximiert werden, da der in Abbildung 22 dargestellte Anstieg der Funktion

B1600+434B

κ_c	R	R_N	V	V_N	ψ	Var	f	q_M	q_S
0.86	2.0	0.75	1.07	0.40	18°	0.0473	6.7%	1.82	2.0467
0.84	2.2	0.88	1.10	0.44	17°	0.0585	6.0%	1.27	1.8398
0.85	2.0	0.77	1.05	0.41	18°	0.0566	6.1%	1.50	1.8703
0.84	2.0	0.80	1.03	0.41	18°	0.0651	5.7%	1.45	1.7439

Tabelle 7: B1600+434B: Bestapproximation mit V nach (3.1.7) und mit V als freiem Parameter, darunter zwei von der Norm her nahezu gleichwertige Modelle ebenfalls mit V als freiem Parameter. R_N und V_N entstehen durch Multiplikation von R und V mit $\sqrt{|1 - \kappa_{cB}|}$, so daß der Vergleich mit Bild A möglich wird. Theoretisch dürfen sich die entsprechenden Größen in den beiden Bildern nur noch bei verschiedenen effektiven Massen unterscheiden.

für größere Zeiten t durch den Mikrolinseneffekt nicht erklärt werden kann und eine Approximation durch Mikrolinsenmodellfunktionen daher nicht möglich ist. Die Bestapproximation wird hier mit $R = 0.7$, $V = 0.54/d$ und $\psi = 18^\circ$ bei $\kappa_c = 0$ erreicht. Der Ansatz mit der Geschwindigkeit V als freiem Parameter ergibt demgegenüber $\psi = 27^\circ$ und $V = 0.50/d$ bei unverändertem Quellradius $R = 0.7$ und mit $\kappa_c = 0$. Bei Rechnungen mit von Null verschiedener Kontinuumsmassendichte $\kappa_c = 0.05$ und $\kappa_c = 0.15$ bleibt $\|f - q\|_2$ bei Bestimmung von V nach (3.1.7) mindestens doppelt so groß wie bei der Bestapproximation für $\kappa_c = 0.0$ und $R = 0.7$. Das beste Ergebnis wird hierbei mit $\kappa_c = 0.05$ und $R = 1$ erzielt (Tabelle 5, oberer Teil). Mit V als freiem Parameter ergeben sich für $R = 1$, $\psi = 18^\circ$ sehr gute Näherungen sowohl mit $\kappa_c = 0$ als auch mit $\kappa_c = 0.05$. Allerdings ist bei diesen Modellfunktionen für alle $t \leq 6d$ der Abstand $|f(t) - q(Vt)|$ größer als bei der Bestapproximation mit $R = 0.7$ und $\kappa_c = 0$ und eine Verdopplung der Punktdichte in der Lichtkurve durch lineare Interpolation auf vier Daten pro Tag reduziert die Differenz von Bestapproximation und empirischer Autokorrelationsfunktion deutlicher als bei den anderen Modellfunktionen. Es scheint damit gerechtfertigt zu sein, von $\kappa_c = 0$ auszugehen, aber um genauere Aussagen treffen zu können, ist es notwendig, eine größere Datenmenge zur Verfügung zu haben oder eine präzisere Bestimmung der Autokorrelationsfunktion einschließlich einer zuverlässigen Fehlerabschätzung aus den Messungen abzuleiten.

Auffallend ist die gute Übereinstimmung der Winkel ψ , welche aus den Modellrechnungen folgt. Dieses Ergebnis zeigt, daß ein Einfluß der Galaxie G2 auf die Richtung der Scherung an den beiden Bildpositionen im Rahmen der erzielten Genauigkeit dieser Untersuchung nicht nachgewiesen werden kann. Da die Bewegungsrichtung nur durch die effektive Transversalgeschwindigkeit der Quelle bestimmt wird, wäre dieses Ergebnis bei einer ausschließlich durch die Galaxie G1 verursachten Scherung zu erwarten gewesen. Der große Unterschied zwischen den in den beiden Bildern ermittelten Quellradien und Geschwindigkeiten beruht zum überwiegenden Teil auf den verschiedenen Längeneinheiten, die aus den unterschiedlichen Kontinuumsflächenmassendichten κ_c resultieren. Multiplikation von R und V mit $\sqrt{|1 - \kappa_{cB}|}$ macht diese Normierung für Bild B rückgängig und ergibt die in Tabelle 7 aufgeführten Werte R_N und V_N , die von der gleichen Größenordnung sind wie die Ergebnisse bei Bild A. Verantwortlich für die verbleibenden Unterschiede in den Resultaten für die beiden Bilder können neben den Fehlern bei der Abschätzung der Modellparameter auch eine mögliche Streuverbreiterung von Bild B (Koopmans und de Bruyn [21]) und unterschiedliche effektive Massen in den verschiedenen Regionen der Linsengalaxie sein. Das Verhältnis der effektiven Massen kann ohne Kenntnisse über eine eventuelle Streuverbreiterung aus den ermittelten Geschwindigkeiten hergeleitet werden. Da die physikalische Geschwindigkeit in beiden Bildern dieselbe sein muß, gilt $V_A \zeta_{0A} = V_B \zeta_{0B}$ und daraus folgt für das Verhältnis der effektiven Massen

$$q_M := \frac{M_{\text{effB}}}{M_{\text{effA}}} = \frac{|1 - \kappa_{cA}| V_A^2}{|1 - \kappa_{cB}| V_B^2}. \quad (3.3.8)$$

Mit den Ergebnissen aus den Tabellen 6 und 7 folgt für diesen Quotienten $M_{\text{effB}}/M_{\text{effA}} = 1.82$, wenn V durch (3.1.7) bestimmt wird und bei Verwendung der Geschwindigkeit V als freien Parameter bei der Approximation gilt $M_{\text{effB}}/M_{\text{effA}} = 1.27$. Bei Fehlern von 0.02 für κ_{CB} und 5% für V_B und jeweils doppelten Werten für Bild A ergibt die Fehlerfortpflanzung eine Unsicherheit von 23% für den Quotienten $M_{\text{effB}}/M_{\text{effA}}$, so daß die Gleichheit der effektiven Massen bei der angenommenen Genauigkeit nicht auszuschließen ist. Um allerdings eine derartige Reduktion von $M_{\text{effB}}/M_{\text{effA}}$ zu erreichen, müssen zusätzlich R_A um ebenfalls 10% kleiner und R_B um etwa 5% größer sein als die Ergebnisse aus der Approximation, da sonst die so erhaltenen Modellfunktionen keine Näherungen an die Autokorrelationsfunktionen aus Meßwerten sein können. Da die effektive Transversalgeschwindigkeit für B1600+434 durch die Bewegung relativistischer Elektronen im Jet bestimmt wird und die Bewegung einzelner Sterne oder der Linsengalaxie als ganzem vernachlässigt werden kann, gibt es keinen Anhaltspunkt für einen systematischen Fehler bei der Geschwindigkeitsberechnung in der Näherung einer nur durch den Linseneffekt hervorgerufenen Variabilität. Im Rahmen der Genauigkeit dieser Untersuchung ist es damit sehr wahrscheinlich, daß $M_{\text{effB}} > M_{\text{effA}}$ gilt; ein Befund, der auch durch Untersuchungen von Sternpopulationen in Galaxienzentren und Halos¹⁶ unterstützt wird. Völlig auszuschließen ist ein gegenteiliges Ergebnis auf der Grundlage der hier vorgestellten Untersuchung allerdings nicht.

Die Streuung von Photonen an Elektronen in der Umgebung des Zentrums der Linsengalaxie kann zu einer scheinbaren Vergrößerung von Bild B um bis zu einer μas führen (Koopmans und de Bruyn [21]), womit aus den Modellrechnungen für dieses Bild ein zu großer Quellradius bestimmt werden würde. Da in den beiden Bildern dasselbe physikalische Objekt beobachtet wird, kann die Differenz

$$\delta\theta_B := \frac{1}{D_s}(R_B \zeta_{0B} - R_A \zeta_{0A}) \quad (3.3.9)$$

eine Abschätzung für die Streuverbreiterung liefern. Mit $\zeta_{0A} = \zeta_{0B} V_B/V_A$ läßt sich $\delta\theta_B$ bis auf die unbekannte Längeneinheit ζ_{0B} aus den geschätzten Modellparametern berechnen und es folgt

$$\delta\theta_B = \frac{\zeta_{0B}}{D_s} \delta R_B \quad \text{für} \quad \delta R_B := R_B - R_A \frac{V_B}{V_A}. \quad (3.3.10)$$

Wird die Geschwindigkeit durch (3.1.7) bestimmt, dann ist $\delta R_B = 0.61$ und mit (3.3.2) folgt $\delta\theta_B = 0.53 \sqrt{h_{75} M_{\text{effB}}/M_{\odot}} \mu\text{as}$; mit V als freiem Parameter bei der Approximation gilt $\delta R_B = 0.65$ und $\delta\theta_B = 0.59 \sqrt{h_{75} M_{\text{effB}}/M_{\odot}} \mu\text{as}$ für $R = 2.2$. Der wahrscheinliche Fehler für $\delta\theta_B$ beträgt 50% unter der Annahme, daß die Unsicherheit bei der Bestimmung der Quellradien 10% beträgt. Eine Streuverbreiterung von Bild B um bis zu einer μas kann daher nicht ausgeschlossen werden, aber um ein genaueres Ergebnis erzielen zu können, sind die erwarteten Fehler zu groß.

¹⁶Bei der Halo-Population handelt es sich überwiegend um alte und kleine Sterne, während im Galaxienzentrum größere und jüngere Sterne häufig sind. (Weigert, Wendker [47] S.228f oder Karttunen et al. [16] S.393ff)

Ein alternativer Ansatz basiert auf der Annahme, daß die für die beiden Bilder unterschiedlichen Quotienten R/V nur aus Fehlern bei der Berechnung der einzelnen Größen resultieren. Bei einer Ausgleichsrechnung, bei der V_A und R_B proportional zu den oben angegebenen wahrscheinlichen Fehlern von jeweils 10% verkleinert werden und R_A (10%) und V_B (5%) entsprechend vergrößert, wird gefordert, daß für $0 < a \leq 1$ gilt

$$R_B(1 - 0.1a) - R_A(1 + 0.1a) \frac{V_B(1 + 0.05a)}{V_A(1 - 0.1a)} = 0. \quad (3.3.11)$$

Im Mittel folgt für Rechnungen mit den in den Tabellen 6 und 7 aufgeführten Modellen $a = 0.94 \pm 0.09$, so daß eine derartige Korrektur an der Obergrenze der erwarteten Fehlerbereiche zum Erfolg führen könnte. Allerdings bedeutet eine Verkleinerung von R_B bei gleichzeitiger Vergrößerung der Geschwindigkeit V_B , daß die resultierende Modellfunktion für $t > 0$ immer kleiner ist als die empirische Autokorrelationsfunktion und daher die Übereinstimmung deutlich schlechter ist als bei der Bestapproximation. Das gleiche gilt mit entgegengesetzten Vorzeichen für Bild A, so daß es nicht möglich ist, ohne die Annahme einer Streuverbreiterung von Bild B den Unterschied der ermittelten Quellradialen zu erklären.

	Var I [$\cdot 10^{-4}$]			
	interpoliert		nur Daten	
	komplett	ohne 6	komplett	ohne 6
A	6.204	6.124	7.569	7.695
B	2.970	2.113	3.636	2.665
q_s	1.445	1.702	1.443	1.699

Tabelle 8: Varianz aus den Lichtkurven, mit und ohne Interpolation, jeweils mit vollständigem Datensatz und bei Verzicht auf sechs Messungen mit großem Fehler; Verhältnis der Standardabweichungen q_s

Mit den Modellparametern $R_A = 0.7$ und $R_B = 2$ folgt für die Varianz der Intensität nach (1.3.55) $\text{Var}(I/\langle I \rangle) = 0.198$ bei Bild A ($\kappa_c = 0$, $R = 0.7$) bzw. 0.065 bei Bild B ($\kappa_c = 0.84$, $R = 2$). Damit kann dann der Quotient der Standardabweichungen

$$q_s := \sqrt{\frac{\text{Var} \frac{I_A}{\langle I_A \rangle}}{\text{Var} \frac{I_B}{\langle I_B \rangle}}} \quad (3.3.12)$$

gebildet werden. Das Ergebnis ist mit $q_s = 1.74$ nur um 2.4% größer als der Wert aus den Lichtkurven (Tabelle 8), wenn die sechs mit einem großen Meßfehler behafteten Werte nicht berücksichtigt werden. Bei Verwendung aller Messungen ist die Varianz in Bild B um 40% größer und der Quotient q_s sinkt auf 1.45, da die Varianz bei Bild A von der Berücksichtigung dieser sechs Werte nicht abhängt. Die gute Übereinstimmung dieser Quotienten (ohne die sechs Datenpunkte) bestätigt die Annahme, die Variabilität der normierten Lichtkurven würde nur durch den Mikrolinseneffekt hervorgerufen. Für die in den ersten beiden Zeilen von Tabelle 7 aufgeführten Bestapproximationen ist die Übereinstimmung geringer, aber ohne eine quantitative Fehlerabschätzung für Varianzen und Autokorrelationsfunktionen aus den Messungen ist es nicht möglich zu beurteilen, wie die verschiedenen Ergebnisse zu gewichten sind.

Der im Jet enthaltende Anteil f der Strahlung von B1600+434 beträgt mit Gleichung (3.3.6) in Bild A 5.5%, wobei wiederum eine durch lineare Interpolation ergänzte Lichtkurve untersucht wurde. Bei Beschränkung auf die Meßwerte ist die ermittelte Varianz der Lichtkurve um 22% größer (Tabelle 8), und der berechnete Anteil der Strahlung im Jet steigt damit auf 6.2% an. Die Rechnungen führen bei Bild B für $\kappa_c = 0.84$ und $R = 2$ zu einem nur um 3% größeren Ergebnis, womit die aus den Autokorrelationsfunktionen ermittelten Quellradien und Massendichten sehr gut bestätigt werden, obwohl bei der Ermittlung der Varianz für Bild B das Ergebnis durch Ungenauigkeiten bei der Bestimmung von κ beeinflusst wird, da hier bei konstantem κ_t die Division mit dem kleinen Wert $1 - \kappa_c$ (vgl. 1.1.10) die Abhängigkeit der effektiven Massendichte κ von der Kontinuumsdichte κ_c verstärkt.

Nach (3.1.1) beträgt die Varianz der intrinsischen Quellintensität des Jets ohne Einbeziehung der linearen Intensitätsabnahme $\text{Var } I_0 / \langle I_0 \rangle = 1.07 \cdot 10^{-4}$. Dieses Ergebnis kann bei nur zwei Makrobildern allerdings nicht durch eine unabhängige Berechnung überprüft werden, es ist aber von der gleichen Größenordnung wie bei dem im folgenden Abschnitt vorgestellten Vierfachsystem B1608+656 und scheint daher nicht unrealistisch zu sein. Kreuzkorrelation der beiden gemessenen und normierten Lichtkurven ergibt eine Näherung für die Autokorrelationsfunktion der intrinsischen Variabilität und (3.3.5) ist gleichbedeutend

$$\begin{aligned} & \text{cor}(I_t(t_1), I_t(t_2)) - \text{cor}(I_{t0}(t_1), I_{t0}(t_2)) \\ &= f^2 \text{cor}(\mu_J(t_1), \mu_J(t_2)) \left(1 + \text{cor}(I_{J0}(t_1), I_{J0}(t_2))\right). \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Für $t_1 = t_2$ folgt daraus

$$\text{Var} \frac{I_t(t)}{\langle I_t \rangle} - \text{Var} \frac{I_{t0}(t)}{\langle I_{t0} \rangle} = f^2 \text{Var} \frac{\mu_J(t)}{\langle \mu_J \rangle} \left(1 + \text{Var} \frac{I_{J0}(t)}{\langle I_{J0} \rangle}\right) \quad (3.3.14)$$

und für den Quotienten dieser beiden Gleichungen gilt dann

$$\begin{aligned} & \frac{\text{cor}(I_t(t_1), I_t(t_2)) - \text{cor}(I_{t0}(t_1), I_{t0}(t_2))}{\text{Var} \frac{I_t(t)}{\langle I_t \rangle} - \text{Var} \frac{I_{t0}(t)}{\langle I_{t0} \rangle}} \\ &= \text{ACF}(\mu_J(t_1), \mu_J(t_2)) \frac{1 + \text{cor}(I_{J0}(t_1), I_{J0}(t_2))}{1 + \text{Var} \frac{I_{J0}(t)}{\langle I_{J0} \rangle}}. \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

Während bei Bild A für $t \leq 6$ d die linke Seite der Gleichung mit der Autokorrelationsfunktion aus Meßwerten nahezu übereinstimmt, so daß bei diesem Bild die intrinsische Variabilität vernachlässigt werden kann, fällt die resultierende Funktion für Bild B nahezu quadratisch mit der Zeit bis auf den Wert -0.32 bei $t = 10$ d ab und ist damit nicht mehr durch Modellfunktionen für den Mikrolinseneffekt darstellbar. Da die Varianz dieses Bildes nur etwa doppelt so groß ist, wie die durch Kreuzkorrelation ermittelte Varianz der ungelinsten Quelle, machen sich Ungenauigkeiten bei der Normierung der Autokorrelationsfunktionen besonders deutlich bemerkbar. Da Mittelwerte aus Messungen nur asymptotisch

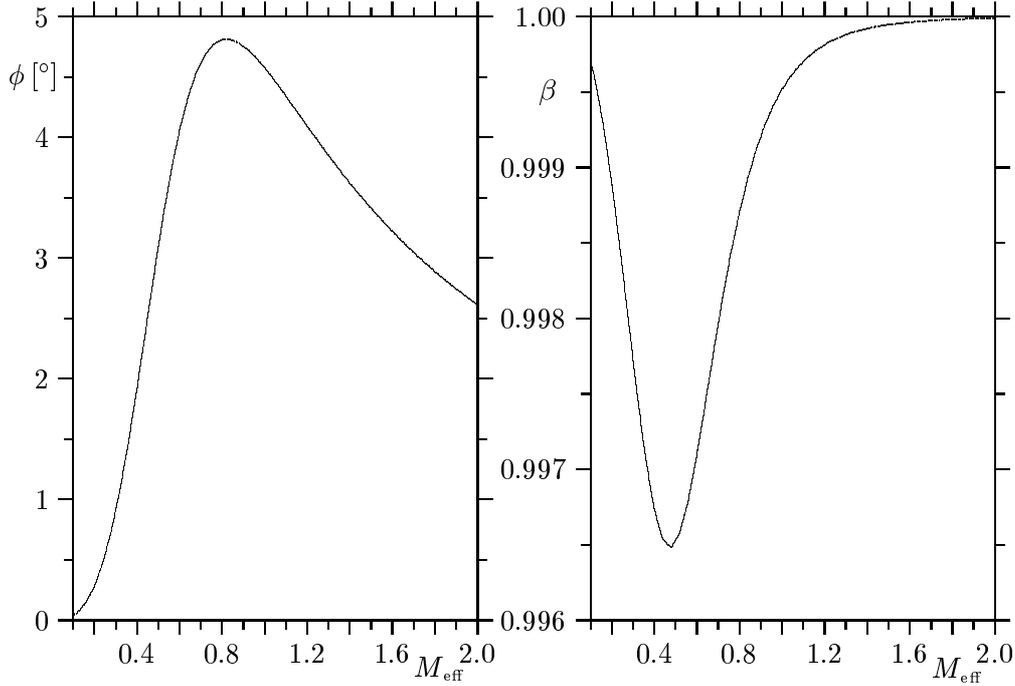


Abbildung 29: Winkel ϕ zwischen Richtung des Radiojets und der optischen Achse (links) und Materiegeschwindigkeit im Jet β (in Einheiten von c , rechts).

für sehr große Datensätze gegen die entsprechenden Erwartungswerte konvergieren, werden entweder deutlich mehr Daten für diese Untersuchung benötigt, oder es muß gelingen, mittels eines besser geeigneten statistischen Ansatzes zu genaueren Ergebnissen zu kommen.

Erstreckt sich der Jet unter einem kleinen Winkel ϕ zur optischen Achse in Richtung auf den Beobachter, folgt aus der relativistischen Materiegeschwindigkeit $v_m = \beta c < c$ nach Blandford und Königl [1] und (1.1.21) für die gemessene scheinbare Transversalgeschwindigkeit in der Quellebene

$$\beta_T \equiv (1 + z_s) \zeta_0 \frac{V}{c} = \frac{\beta \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi} \iff \beta = \frac{\beta_T}{\sin \phi + \beta_T \cos \phi} \quad (3.3.16)$$

und der Dopplerfaktor ist durch

$$\mathcal{D} := \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \phi} = \sqrt{1 + 2\beta_T \cot \phi - \beta_T^2} \iff \phi = \arctan \frac{2\beta_T}{\mathcal{D}^2 + \beta_T^2 - 1} \quad (3.3.17)$$

gegeben. Nach einer Abschätzung von Koopmans und de Bruyn [21] für die Flußdichte einer radialsymmetrischen Radioquelle gilt für den Radius der Strahlungsquelle im Jet

$$\Delta\theta_{\text{knot}} \equiv \frac{\zeta_0 R}{D_s} \approx 20 \sqrt{\frac{f}{\mathcal{D}}} \mu\text{as}. \quad (3.3.18)$$

Sind R , V und f aus Modellrechnungen bestimmt worden, kann dann bei bekanntem ζ_0 zuerst \mathcal{D} und damit dann die Materiegeschwindigkeit β und die Richtung des Jets ϕ ermittelt werden.

Mit den Bestapproximationen für Bild A, $R = 0.7$, $\kappa_c = 0$ und mit $f = 0.055$ folgt für den Dopplerfaktor $\mathcal{D} = 8.47M_\odot/(M_{\text{eff A}} h_{75})$ bei einem auf Grund der Fehlerfortpflanzung zu erwartenden Fehler von 22%, wenn die Genauigkeit für f und R jeweils 10% beträgt. Für die scheinbare Transversalgeschwindigkeit β_T folgt mit $V = 0.54/d$ (berechnet nach (3.1.7)) und $\psi = 18^\circ$: $\beta_T = 21.719\sqrt{M_{\text{eff A}}/M_\odot}$ mit einem Fehler von 11%. Mit diesen Größen ist es jetzt möglich bei bekannter effektiver Masse den Winkel zwischen Sichtlinie und Jet sowie die Elektronengeschwindigkeit in diesem zu berechnen. Für $M_{\text{eff A}} = M_\odot$ und $h_{75} = 1$ ist $\phi = 4.578^\circ$ und $\beta = 0.9995$. Die zu erwartenden Fehler sind dabei 9.4% für ϕ und $1.7 \cdot 10^{-4}$ für β . Mit einer Salpeter-Massenverteilung $0.1 \leq M/M_\odot \leq 1.0$ und Exponenten $\alpha = -2.35$ ist $M_{\text{eff A}} = 0.3374M_\odot$ und es folgt $\mathcal{D} = 25.10/h_{75}$, $\phi = 1.83^\circ$ sowie $\beta = 0.9980$. Dabei beträgt der relative Fehler für den Winkel ϕ jetzt 26% bei einem nahezu unverändertem absoluten Fehler von 0.5° und für β sinkt der erwartete Fehler mit $\delta\beta = 1.4 \cdot 10^{-4}$ auf achtzig Prozent seines Wertes bei $M_{\text{eff A}} = M_\odot$ ab.

Der Vergleich mit den Ergebnissen von Koopmans und de Bruyn [21] zeigt eine gute Übereinstimmung bei den meisten dieser Werte. Der von den beiden Autoren angegebene Wertebereich für die scheinbare Transversalgeschwindigkeit der Strahlungsquelle wird hier ebenso bestätigt wie das Ergebnis für den Anteil f des Radiojets an der Gesamtintensität. Allerdings ist die hier berechnete Quellgröße für Bild A auch für $M_{\text{eff A}} = M_\odot$ mit $R \zeta_0/D_s = 1.61 \mu\text{as}$ um zwanzig Prozent kleiner als die bei Koopmans und de Bruyn angegebene untere Schranke. Auch der Winkel zwischen dem Jet und der optischen Achse ist nur bei einer großen effektiven Masse innerhalb des erwarteten Bereichs. Demgegenüber ist der Dopplerfaktor berechnet nach (3.3.18) mehr als doppelt so groß wie die von Koopmans und de Bruyn ermittelte Obergrenze für diesen Wert. Eine Ursache für diese Diskrepanz kann darin liegen, daß die beiden Autoren von $\kappa_c = 0$ in beiden Bildern und von einer größeren effektiven Masse in Bild A ausgegangen sind, während sich aus dem Vergleich mit Modellfunktionen eine große Kontinuumsmassendichte in Bild B ergibt, deren reduzierender Einfluß auf die Variabilität zum Teil durch die in Bild B größere effektive Masse kompensiert wird. Durch eine weitere Meßreihe mit erhöhter Beobachtungsdichte kann eine genauere Bestimmung der Mikrolinsenparameter erreicht werden. Damit besteht auch die Möglichkeit zu klären, ob die Abschätzung einer Streuverbreiterung von Bild B und die Annahme, die effektiven Massen wären unterschiedlich in den verschiedenen Regionen der Linsengalaxie, realistisch sind, oder ob ein größerer Anteil der Diskrepanzen in den ermittelten Quellradien und Geschwindigkeiten auf den Einwirkungen der verschiedenen Fehlerquellen bei der Rechnung beruht. Gleichzeitige Beobachtungen bei unterschiedlichen Frequenzen ermöglichen es ausserdem, die Wirkungen von Mikrolinseneffekt und Szintillation anhand ihrer Frequenzabhängigkeit zu unterscheiden.

3.4 Die Radioquelle B1608+656

Die Radioquelle B1608+656 besteht aus vier Bildern vom Kern einer Radiogalaxie bei $z = 1.394$ (Fassnacht et al. [11]) hinter einer Gravitationslinse, bestehend aus zwei Galaxien bei $z = 0.6304$ (Myers et al. [24]). Der obere Teil von Abbildung 30 zeigt die von Fassnacht et al. [12] vom 10.10.1996 bis zum 26.5.1997 am VLA bei einer Frequenz von 8.5-GHz aufgenommenen Lichtkurven, normiert mit der jeweiligen mittleren Flußdichte und zur übersichtlicheren Darstellung um die in der Graphik angegebenen Beträge nach oben (bei negativen Werten nach unten) verschoben. Zusätzlich wurden die Lichtkurven um die in [12] angegebenen Laufzeitdifferenzen¹⁷ relativ zu Bild B entlang der Zeitachse verschoben.

Mit einem Makrolinsenmodell ausreichender Genauigkeit (Koopmans und Fassnacht [22]) ist es nach einer Bestimmung der normierten Gesamtflächenmassendichte κ_t und der Scherung γ' möglich, auch für dieses Objekt Autokorrelationsfunktionen für verschiedene Mikrolinsenmodelle zu berechnen. Es gibt bisher keinen konkreten Hinweis darauf, daß der Mikrolinseneffekt mitverantwortlich für die Variabilität der einzelnen Bilder ist, aber die Varianzen der Lichtkurven sind mit $3.5\text{--}4.5 \cdot 10^{-4}$ ebenso wie die Zeitskalen und die Varianz der Quelle mit $\text{Var } I_0 / \langle I_0 \rangle = (1.3 \pm 0.2) \cdot 10^{-4}$ von der gleichen Größenordnung wie beim Doppelquasar B1600+434. Konsistente Ergebnisse aus Modellrechnungen aller vier Bilder wären dann ein deutliches Indiz für einen dominanten Einfluß des Mikrolinseneffektes auf die vier Lichtkurven von B1608+656.

¹⁷ $\Delta t_{BA} = 31 \pm 7\text{d}$, $\Delta t_{BC} = 36 \pm 7\text{d}$ und $\Delta t_{BD} = 76_{-10}^{+9}\text{d}$.

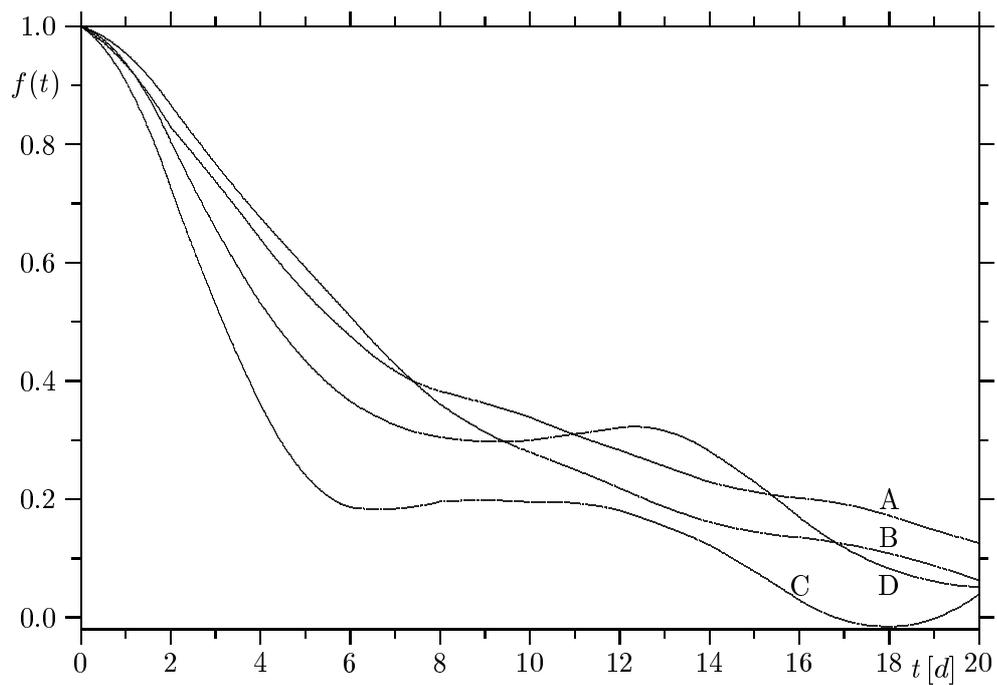
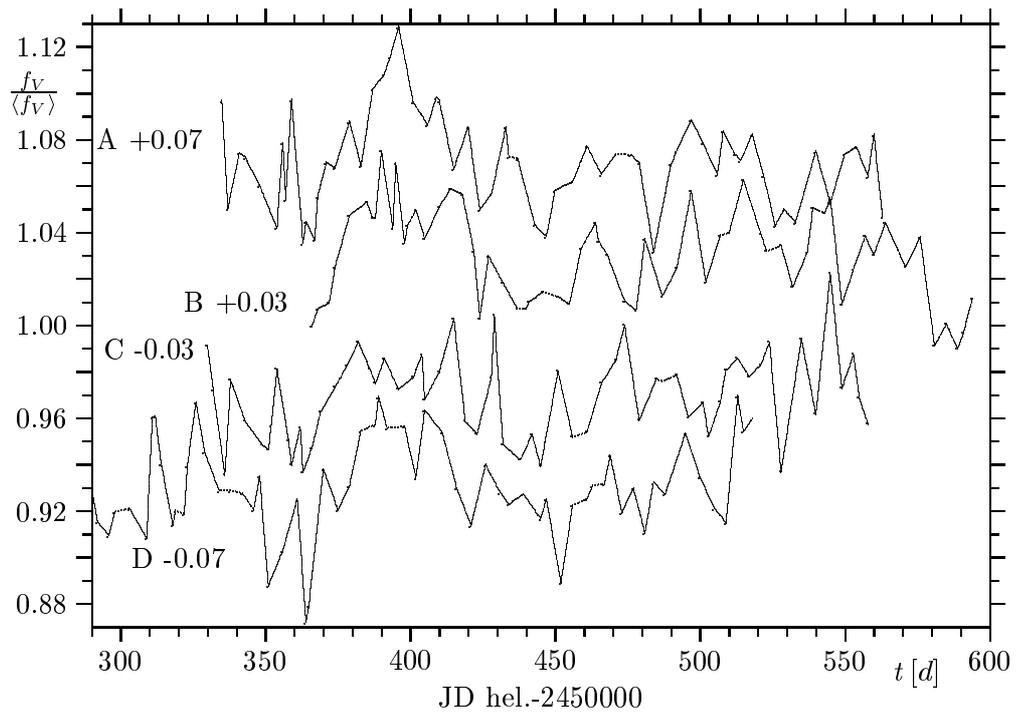


Abbildung 30: B1608+656A–D: Lichtkurven, vom 10.10.1996 bis zum 26.5.1997 am VLA aufgenommen, normiert mit der jeweiligen mittleren Flußdichte, für eine deutlichere Darstellung um die angegebenen Beträge parallelverschoben und zusätzlich um die von Fassnacht et al. [12] ermittelten Laufzeitdifferenzen relativ zu Bild B entlang der Zeitachse versetzt (oben); aus diesen Daten nach Interpolation der Lichtkurve auf einen Wert pro Tag bestimmte empirische Autokorrelationsfunktionen (unten)

Schlußbemerkung und Ausblick

Ausgehend von der Theorie des Gravitationslinseneffektes wurde ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Verfahren entwickelt, mit dem es möglich ist, die Wirkung des Mikrolinseneffektes auf ein beobachtetes Quasarbild zu analysieren. Für eine statistische Untersuchung einer photometrischen Meßreihe eignen sich die Varianz und die Autokorrelationsfunktion der Lichtkurve. Nachdem es bisher notwendig war, mittels Strahlenschießen eine große Anzahl künstlicher Lichtkurven zu erzeugen, welche die Grundlage für statistische Modellrechnungen bildeten, ermöglicht das hier vorgestellte wahrscheinlichkeitstheoretische Verfahren eine direkte numerische Berechnung von Autokorrelationsfunktion und Varianz. Damit kann gewährleistet werden, daß die berechneten Modellfunktionen von sonst unvermeidbaren statistischen Fehlern frei sind.

Die Analyse der Radiodaten vom Doppelquasar B1600+434 (Koopmans et al. [20]) zeigt, wie es mit dem wahrscheinlichkeitstheoretischen Ansatz gelingt, Informationen über die Systemparameter bei diesem Objekt zu erlangen. Dabei reicht die erzielte Genauigkeit aus, um den Wertebereich für daraus abgeleitete Daten wie die Elektronengeschwindigkeit im Radiojet, dessen Winkel mit der optischen Achse und das Verhältnis der effektiven Massen in der Linsengalaxie einzugrenzen. Eine genauere Bestimmung dieser Größen scheitert an einer zu geringen Beobachtungsdichte, wodurch Variabilität auf Zeitskalen von weniger als drei Tagen nahezu unbeobachtet bleibt und auch die Autokorrelationsfunktionen von der Berücksichtigung oder Nichtberücksichtigung einzelner Meßwerte abhängig werden.

Koopmans und de Bruyn [21] haben durch den Nachweis externer Variabilität bei B1600+434 die Möglichkeit aufgezeigt, den Mikrolinseneffekt anhand von Jets aktiver Galaxienkerne zu untersuchen. Damit ist zu erwarten, daß es gelingt, weitere Mehrfachbilder mit scheinbar überlichtschneller Transversalgeschwindigkeit der Lichtquelle zu entdecken.¹⁸ Diese hohe Geschwindigkeit verkürzt die für den Mikrolinseneffekt relevanten Zeitskalen, und reduziert den Einfluß der Pekuliarbewegung der einzelnen Sterne in der Linsengalaxie auf die Variabilität der Bilder. Da zur Ermittlung eines Makrolinsenmodelles auch die Bestimmung von Laufzeitdifferenzen für das Licht der Einzelbilder angestrebt wird, können bei diesen Linsensystemen mit relativ geringem Zusatzaufwand an Beobachtungszeit innerhalb von ungefähr einem Jahr Lichtkurven erstellt werden, die eine auch für die Berechnung von Autokorrelationsfunktionen ausreichende Beobachtungsdichte aufweisen. Daher kann sich mit der Entdeckung weiterer radiolauter und variabler Linsensysteme ein weites Anwendungsgebiet für das hier vorgestellte Verfahren zur Analyse des Mikrolinseneffektes mittels Modellautokorrelationsfunktionen eröffnen.

Die 1995 von Myers et al. [24] entdeckte vierfach Radiogalaxie B1608+656 zeigt ebenso wie der Doppelquasar B1600+434 starke Variabilität auf einer vergleichbaren Zeitskala. Wenn der Vergleich der empirischen Autokorrelationsfunktionen von B1608+656 mit berechneten Modellfunktionen konsisten-

¹⁸Patnaik und Kemball [28] bezweifeln die Annahme, es handele sich um überlichtschnelle Transversalbewegung und favorisieren Streuverbreiterung als Ursache für die unterschiedliche Variabilität der beiden Makrobilder.

te Ergebnisse für Linsenparameter in allen vier Bildern liefert, wäre das ein überzeugendes Indiz für den Mikrolinseneffekt als Ursache und es würde bedeuten, daß auch bei diesem Objekt ein Teil der empfangenen Strahlung von einem Richtung Beobachter emittierten Radiojet stammen müßte. Zusätzliche Informationen lassen sich gewinnen, wenn dieses Objekt (und auch andere) bei verschiedenen Wellenlängen beobachtet wird, so daß auch der Einfluß der Szintillation auf die Lichtkurven abgeschätzt werden kann.

Die Untersuchungen am Einsteinkreuz QSO 2237+0305 zeigen, daß durch den Vergleich der Autokorrelationsfunktionen aus Modellrechnungen und Meßwerten auch bei zu kurzen Lichtkurven mit zu geringer und unregelmäßiger Messungsdichte konsistente Ergebnisse für Quellgröße und effektive Transversalgeschwindigkeit erzielt werden können. Bei einer Fortsetzung der Beobachtungsreihe durch die OGLE-Arbeitsgruppe sind innerhalb der nächsten zehn Jahre deutliche Verbesserungen der Genauigkeit zu erwarten. Dann kann der Vergleich der empirischen Autokorrelationsfunktionen mit Modellfunktionen unterschiedlicher Makromodelle auch herangezogen werden, um anhand der Qualität der Approximationen Aussagen über die Gültigkeit der verschiedenen Makrolinsenmodelle zu treffen.

Für weitere im optischen Bereich des Spektrums entdeckte Mehrfachquasare existieren keine Lichtkurven von ausreichender Länge. Bei diesen Objekten ist es erforderlich, über mehrere Jahrzehnte hinweg regelmäßige photometrische Messungen durchzuführen, um auch diese Linsensysteme für statistische Untersuchungen nutzen zu können. Die OGLE Meßreihe zeigt, daß bei guten Sichtbedingungen ein 1.3 m Spiegelteleskop ausreichen kann, um zufriedenstellende Ergebnisse zu erzielen. Die notwendige Beobachtungsdichte ist dabei abhängig von der angestrebten Genauigkeit. Während Helligkeitsänderungen von mehreren zehntel Magnituden sich über Zeiträume von mehreren Monaten oder gar Jahren erstrecken können, laufen Fluktuationen von wenigen hundertstel Magnituden auf Zeitskalen von einigen Tagen oder Wochen ab. Allerdings ist es auch bei Ereignissen hoher Verstärkung erstrebenswert Maxima und Minima der Lichtkurve zu erfassen, so daß tägliche Beobachtungen wünschenswert sind. Der Doppelquasar QSO 0957+961 wurde sogar über mehrere Tage hinweg rund um die Uhr von zehn verschiedenen Observatorien beobachtet (Colley et al. 2001 [7]), um die Laufzeitdifferenz mit einer Unsicherheit von weniger als einer Stunde zu bestimmen und einen Nachweis für sehr schnelle Mikrolinsenvariabilität zu erhalten.

Da die Autokorrelationsfunktionen von dem Anteil Sterne und kompakter Objekte an der Gesamtmasse in der Linsengalaxie abhängen, können aus dem vorgestellten wahrscheinlichkeitstheoretischen Ansatz auch Informationen über die Massenverteilung in Galaxien abgeleitet werden. Nur in einem der hier untersuchten Makrobilder (B1600+434B) ist für die erfolgreiche Approximation die Einbeziehung einer signifikanten Kontinuumsmasse erforderlich. Daß bei diesem Bild der Lichtweg parallel zur Galaxienscheibe nahe am Kern vorbei verläuft, während B1600+434A durch den Halo hindurch und die vier Bilder vom Einsteinkreuz aus einer Richtung senkrecht zur Galaxienscheibe beobachtet werden, weist darauf hin, daß ein großer Teil der Materie in der Galaxienebene aus Staub und Gas besteht und die Materie im Halo überwiegend in

Sternen und kompakten Objekten konzentriert ist. Systematische Untersuchungen an den verschiedenen Linsensystemen können unter diesem Gesichtspunkt auch dazu beitragen, Informationen über die Art eventuell vorhandener dunkler Materie zu gewinnen. Um die Größe der effektiven Massen und damit auch den Einsteinradius ermitteln zu können, werden zusätzliche Informationen benötigt; mit der Analyse des Mikrolinseneffektes allein kann innerhalb einer Galaxie nur das Verhältnis der effektiven Massen in den einzelnen Bildern bestimmt werden.

Ein alternativer Ansatz besteht darin, statt der Autokorrelationsfunktionen die Fouriertransformierte von Gleichung (1.3.53, 1.3.54) zu berechnen und die Analyse des Mikrolinseneffektes in einer Spektraldarstellung durchzuführen. Da es sich gezeigt hat, daß die empirischen Autokorrelationsfunktionen bei der gegebenen Länge der Lichtkurven nicht mit ausreichender Genauigkeit bestimmt werden können, ist es nicht möglich, für eine Fehlerrechnung Abschätzungen für die einzelnen Funktionswerte aus unterschiedlichen Abschnitten einer Lichtkurve zu berechnen, um daraus dann einen Mittelwert und dessen wahrscheinlichen Fehler zu ermitteln. Der Abstand der Modellfunktionen von einer Autokorrelationsfunktion aus Daten nach (3.2.6) berücksichtigt nicht die Qualität der empirischen Werte. Der Vorteil der direkten numerischen Berechnung der Autokorrelationsfunktionen liegt darin, daß sie sehr schnell durchzuführen ist und ein qualitatives Bild von der zeitlichen Entwicklung der gemessenen Helligkeit und dem Einfluß des Mikrolinseneffektes auf eine Lichtkurve bietet. Geeigneter für eine quantitative Untersuchung ist eine Berechnung des Spektrums des Zufallsprozesses aus der gemessenen Lichtkurve durch ein stabiles statistisches Verfahren, mit dem auch eine Fehlerabschätzung möglich ist. Thomson [43] (1982) beschreibt einen nichtparametrischen Ansatz, mit dem das Spektrum durch eine Reihenentwicklung abgeschätzt wird. Dabei wird ausdrücklich festgestellt, daß dieses Verfahren für kleine Datenmengen geeignet ist, und nicht auf einer Theorie basiert, welche vom Grenzfall einer unendlichen Datenmenge ausgeht. Es bleibt zu klären, inwiefern eine Separation von Mikrolinseneffekt und intrinsischer Variabilität im Fourierraum erzielt werden kann, oder ob der Vergleich mit Modellrechnungen weiterhin in der Zeitdarstellung durchgeführt werden muß, wie in der vorliegenden Arbeit dargestellt wird, und nur die Berechnung der empirischen Autokorrelationsfunktionen durch ein stabiles Verfahren ersetzt werden kann. Ein derartiger Ansatz eröffnet dann die Möglichkeit auch aus kürzeren Lichtkurven oder bei Linsensystemen mit geringer effektiver Transversalgeschwindigkeit wie z.B. dem Doppelquasar QSO 0957+961 statistische Informationen zu gewinnen.

Literatur

- [1] BLANDFORD, R. D., KÖNIGL, A., *Relativistic Jets as compact Radio Sources*, ApJ. **232**, 34 (1979)
- [2] BLANTON, M., TURNER, E. L., WAMBSGANSS, J., *Ultraviolet images of the gravitationally lensed quadruple quasar Q2237+0305 with the HST*, MNRAS **298**, 1223 (1998)
- [3] BURUD, I., STABELL, R., MAGAIN, P., COURBIN, F., ØSTENSEN, R., REFSDAL, S., REMY, M., TEUBER, J., *Three photometric methods tested on ground-based data of Q 2237+0305*, A&A **339**, 701 (1998)
- [4] CHAE, K.-H., TURNSHEK, D. A., KHERSONSKY, V. K., *A realistic grid of models for the gravitational lensed Einstein cross (Q2237+0305) and its relation to observational constraints*, ApJ. **495**, 609 (1998)
- [5] CHANDRASEKHAR, S., *Stochastic Problems in Physics and Astronomy*, Rev.Mod.Phys. **15**, 1 (1943)
- [6] CHANG, K., REFSDAL, S., *Flux variations of QSO 0957+561 A, B and image splitting by stars near the light path*, Nature **282**, 561 (1979)
- [7] COLLEY, W. N., SCHILD, R. E., ABAJAS, C., ALCALDE, D., ASLAN, Z., BARRENA, R., DUDINOV, V., KHAMITOV, I., KJERNSMO, K., LEE, H. J., LEE, J., LEE, M. G., LICANDRO, J., MAOZ, D., MEDIAVILLA, E., MOTTA, V., MUNOZ, J., OSCOZ, A., SERRA-RICART, M., SINELNIKOV, I., STABELL, R., TEUBER, J., ZHELEZNYAK, A., *Round the Clock Observations of the Q0957+561 A,B Gravitationally Lensed Quasar*, astro-ph/0103146
- [8] CORRIGAN, R. T., IRWIN, M. J., ARNAUD, J., FAHLMAN, G. G., FLETCHER, J. M., HEWETT, P. C., HEWITT, J. N., LE FEVRE, O., MCCLURE, R., PRITCHET, C. J., SCHNEIDER, D. P., TURNER, E. L., WEBSTER, R. L., YEE, H. K. C., *Initial light curve of Q2237 + 0305*, AJ **102**, 34 (1991)
- [9] CRANE, P., ALBRECHT, R., BARBIERI, C., BLADES, J. C., BOKENSENBERG, A., DEHARVENG, J. M., DISNEY, M. J., JAKOBSEN, P., KAMPERMAN, T. M., KING, I. R., MACCHETTO, F., MACKAY, C. D., PARESCE, F., WEIGELT, G., BAXTER, D., GREENFIELD, P., JEDRZEJEWSKI, R., NOTA, A., SPARKS, W. B., *First results from the Faint Object Camera - Images of the gravitational lens system G2237 + 0305*, ApJ. **369**, L59 (1991)
- [10] DEGUCHI, S., WATSON, W. D., *Statistical Treatment of Fluctuations in the Gravitational Focusing of Light due to Stellar Masses within a Gravitational Lens*, Phys.Rev.Lett. **59**, Nr.24, 2814 (1987)

- [11] FASSNACHT, C. D., WOMBLE, D. S., NEUGEBAUER, G., BROWNE, I. W. A., READHEAD, A. C. S., MATTHEWS, K., PEARSON, T. J., *1608+656: A Gravitationally Lensed Poststarburst Radio Galaxy*, Ap.J. **460**, L103 (1996)
- [12] FASSNACHT, C. D., PEARSON, T. J., READHEAD, A. C. S., BROWNE, I. W. A., KOOPMANS, L. V. E., MYERS, S. T., WILKINSON, P. N., *A Determination of H_0 with the CLASS Gravitational Lens B1608+656. I. Time Delay Measurements with the VLA*, Ap.J. **527**, 498 (1999)
- [13] HOUDE, M., RACINE, R., *Image restoration and photometric monitoring of the gravitational lens Q2237+0305*, AJ, **107**, 446 (1994)
- [14] HUCHRA, J., GORENSTEIN, M., KENT, S., SHAPIRO, I., SMITH, G., HORINE, E., PERLEY, R., *2237+0305: A new and unusual gravitational lens*, AJ, **90**, 691 (1985)
- [15] IRWIN, M. J., WEBSTER, R. L., HEWETT, P. C., CORRIGAN, R. T., JEDRZEJEWSKI, R. T., *Photometric Variations in the Q 2237+0305 System, first detection of a microlens event*, Astron J. **98** (1989)
- [16] KARTTUNEN, H., KRÖGER, P., OJA, H., POUTANEN, M., DONNER, K. J., (HRSG.), *Astronomie, Eine Einführung*, Springer 1990
- [17] KAYSER, R., *Macro and Micromodels for gravitational Lenses*, ApJ. **357**, 309 (1990)
- [18] KAYSER, R., REFSDAL, S., STABELL, R., *Astrophysical applications of gravitational micro-lensing*, A&A **166**, 36 (1986)
- [19] KOOPMANS, L. V. E., DE BRUYN, A. G., JACKSON, N., *The edge-on spiral gravitational lens B1600+434*, MNRAS **295**, 534 (1998)
- [20] KOOPMANS, L. V. E., DE BRUYN, A. G., XANTHOPOULOS, E., FASSNACHT, C. D., *A time-delay determination from VLA light curves of the CLASS gravitational lens B1600+434*, A&A **356**, 391 (2000)
- [21] KOOPMANS, L. V. E., DE BRUYN, A. G., *Microlensing of multiply-imaged compact radio sources: Evidence for compact halo objects in the disk galaxy of B1600+434*, A&A **358**, 793 (2000)
- [22] KOOPMANS, L. V. E., FASSNACHT, C. D., *A Determination of H_0 with the CLASS Gravitational Lens B1608+656: II. Mass models and the Hubble constant from lensing*, Ap.J. **527**, 513 (1999)
- [23] LANG, K. R., *Astrophysical Formulae Vol.2, 3rd Ed.*, Springer 1999
- [24] MYERS, S. T., FASSNACHT, C. D., DJORGOVSKI, S. G., BLANDFORD, R. D., MATTHEWS, K., NEUGEBAUER, G., PEARSON, T. J., READHEAD, A. C. S., SMITH, J. D., THOMPSON, D. J., WOMBLE, D. S., BROWNE, I. W. A., WILKINSON, P. N., NAIR, S., JACKSON, N., SNELLEN, I. A.

- G., MILEY, G. K., DE BRUYN, A. G., SCHILIZZI, R. T., ,1608+656: A Quadruple-Lens System Found in the CLASS Gravitational Lens Survey Ap.J. **447**, L5 (1995)
- [25] NITYANANDA, R., OSTRIKER, J. P., *Gravitational Lensing by Stars in a Galaxy Halo: Theory of Combined Weak and Strong Scattering*, J.Ap.Astr. **5**, 235 (1984)
- [26] ØSTENSEN, R., REFSDAL, S., STABELL, R., TEUBER, J., EMANUELSEN, P. I., FESTIN, L., FLORENTIN-NIELSEN, R., GAHM, G., GULLBRING, E., GRUNDAHL, F., HJORTH, J., JABLONSKI, M., JAUNSEN, A. O., KAAS, A. A., KARTTUNEN, H., KOTILAINEN, J., LAURIKAINEN, E., LINDGREN, H., MAEHOENEN, P., NILSSON, K., OLOFSSON, G., OLSEN, Ø., PETTERSEN, B. R., PIROLA, V., SORENSEN, A. N., TAKALO, L., THOMSEN, B., VALTAOJA, E., VESTERGAARD, M., AV VIANBORG, T., *Monitoring of the Einstein Cross with the Nordic Optical Telescope*, A&A **288**, 19 (1994)
- [27] PACZYŃSKI, B., *Gravitational microlensing at large optical depth*, Ap.J. **301**, 2 (1986)
- [28] PATNAIK, A. R., KEMBALL A. J., *Sub-milliarcsec-scale structure of the gravitational lens B1600+434*, astro-ph/0106101 v1 (2001)
- [29] PEACOCK, J. A., *Cosmological Physics*, Cambridge University Press 1999
- [30] RACINE, R., *Continuum and semiforbidden C III microlensing in Q2237 + 0305 and the quasar geometry*, Ap.J. **395**, L65 (1992)
- [31] REFSDAL, S., *On the possibility of determining the Hubble's Parameter and the masses of Galaxies from the gravitational lens effect*, MNRAS **128**, 307 (1964)
- [32] REFSDAL, S., *On the possibility of determining the distances and masses of stars from the gravitational lens effect*, MNRAS **134**, 315 (1966)
- [33] REFSDAL, S., STABELL, R., *Gravitational micro-lensing for large sources*, A&A **250**, 62 (1991)
- [34] REFSDAL, S., STABELL, R., *Gravitational micro-lensing of large sources including shear term effects*, A&A **325**, 877 (1997)
- [35] RIX, H.-W., SCHNEIDER, D. P., BAHCALL, J. N., *Hubble Space Telescope Wide Field Camera imaging of the gravitational lens 2237 +0305*, AJ **104**, 3 (1992)
- [36] ROZANOW, Y. A., *Introduction to random Processes*, Springer 1987
- [37] SCHMIDT, R. W., WEBSTER, R. L., LEWIS, G. F., *Weighing the galaxy bar in the lens Q2237+0305*, MNRAS **295**, 488 (1998)
- [38] SCHNEIDER, D. P., TURNER, E. L., GUNN, J. E., HEWITT, J. N., SCHMIDT, M., LAWRENCE, C. R., *High-resolution CCD imaging and derived gravitational lens models of 2237+0305*, AJ **95**, 1619 (1988)

- [39] SCHNEIDER, P., EHLERS, J., FALCO, E. E., *Gravitational Lenses*, Springer 1992
- [40] SEITZ, C., SCHNEIDER, P., *Variability of microlensing light curves*, A&A **288**, 1 (1994)
- [41] SEITZ, C., WAMBSGANSS, J., SCHNEIDER, P., *Variability of microlensing light curves*, A&A **309**, 59 (1996)
- [42] SOBCZYK, K., *Stochastic Differential Equations*, Kluwer 1991
- [43] THOMSON, D. J., *Spectrum Estimation and Harmonic Analysis*, Proceedings of the IEEE **70**, 1055 (1982)
- [44] WALSH, D., CARSWELL, R. F., WEYMANN, R. J., *QSO 0957+961 A,B: twin QSO's or gravitational lens?*, Nature, **279**, 381 (1979)
- [45] WAMBSGANSS, J., *Gravitational Microlensing*, report MPA 550 Garching 1990
- [46] WAMBSGANSS, J., PACZYŃSKI, B., KATZ, N., *A Microlensing Model for QSO 2237+0305*, Ap.J. **352**, 407 (1990)
- [47] WEIGERT, A., WENDKER, H. J., *Astronomie und Astrophysik 2. Aufl.*, Physik-Verlag Weinheim 1989
- [48] WITT, H. J., KAYSER, R., REFSDAL, S., *Microlensing Predictions for the Einstein Cross 2237+0305*, A&A **268**, 501 (1993)
- [49] WOŹNIAK, P., ALARD, C., UDALSKI, A., SZYMAŃSKI, M., PIETRZYŃSKI, G., ŻEBRUŃ, K., *The Optical Gravitational Lensing Experiment. Monitoring of QSO 2237+0305*, Ap.J. **529**, 88 (2000)
- [50] GRADSHTEIN, I., RYZHIK, I., *Tables of Series, Products and Integrals*, Academic Press 1994