QCD-Instantonen und Saturation bei kleinem Bjorken-x

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereiches Physik
der Universität Hamburg

vorgelegt von

Andre Utermann

aus Kiel

Hamburg
2003

Gutachter der Dissertation:	Dr. F. Schrempp Prof. Dr. J. Bartels
Gutachter der Disputation:	Dr. F. Schrempp Prof. Dr. B. Kniehl
Datum der Disputation:	15.7.2003
Vorsitzender des Prüfungsausschusses:	Prof. Dr. G. Heinzelmann
Vorsitzender des Promotionsausschusses:	Prof. Dr. R. Wiesendanger
Dekan des Fachbereichs Physik:	Prof. Dr. G. Huber

QCD-Instantonen und Saturation bei kleinem Bjorken-x

Zusammenfassung

Instantonen stellen einen wesentlichen nichtperturbativen Aspekt der Theorie der starken Wechselwirkung dar. Dies macht es interessant, die Bedeutung von Instantonen in der tiefinelastischen Streuung bei kleinem Bjorken-$x_{\rm Bj}$ und abnehmendem Q^2 zu untersuchen. Insbesondere wird gezeigt, daß Instantonen aufgrund ihrer intrinsischen, mit der Ausdehnung $\langle\rho\rangle$ verknüpften Skala zum vieldiskutierten Phänomen der Saturation bei kleinem Bjorken-$x_{\rm Bj}$ beitragen.

Untersucht wird die Saturation im Farbdipol-Bild, da sich in diesem Rahmen der mögliche Übergang zur Saturation in einem Wettbewerb zwischen der Dipolgröße r und der spezifischen Instantonskala $\langle\rho\rangle$ sehr anschaulich manifestieren sollte. Die Saturation entspricht hier einen Abflachen des Anstiegs des Dipolwirkungsquerschnitts mit größer werdenen Dipolen.

In einem ersten Zugang werden die bekannten Resultate der bei großen Impulsenüberträgen gültigen Instanton-Störungstheorie zu kleineren Impulsen mittels Gitterdaten fortgesetzt und ins Farbdipol-Bild transformiert. Tatsächlich zeigt sich, daß für $r \gtrsim \langle\rho\rangle$ der Anstieg des Dipolwirkungsquerschnitts gebremst wird und er schließlich einem konstanten, saturierten Wert zustrebt, der proportional zu $\langle\rho\rangle^2$ ist.

In einem zweiten Zugang wird der Dipolwirkungsquerschnitt in der nichtabelschen Eikonalnäherung berechnet, in der der Farbdipol durch einen Wilson-Loop dargestellt wird, der die Wechselwirkung mit dem Instantoneichfeld beschreibt. Auch in diesem Zugang läßt sich ein Saturationsverhalten des Dipolwirkungsquerschnitts beobachten.

QCD-Instantons and Saturation at Small Bjorken-x

Abstract

An essential non-perturbative aspect of the theory of strong interactions is represented by instantons. Thus, it is of special interest, to investigate their impact in deep inelastic scattering for small values of Bjorken-$x_{\rm Bj}$, towards decreasing Q^2. In particular, it is shown that due to the intrinsic extension scale $\langle\rho\rangle$ of instantons, the latter yield a significant contribution to the much discussed saturation phenomenon.

The question of saturation is studied in the colour dipole picture, where one expects an important competition between the dipole size r and the intrinsic instanton scale $\langle\rho\rangle$. The saturation phenomenon corresponds in this approach to a flattening out of the dipole cross section for larger dipole sizes.

A first approach, starts from the known results of instanton perturbation theory and crucially uses information from lattice simulations to continue towards the softer regime. The resulting expressions are then transformed to the colour dipole picture. It is indeed found that in the instanton background, for $r \gtrsim \langle\rho\rangle$, the rise of the dipole cross section flattens out and tends towards a constant, saturated value $\propto \langle\rho\rangle^2$ asymptotically.

In a second approach, the dipole cross section is investigated within the non-abelian eikonal approximation, where the colour dipole is associated with a Wilson loop describing the interaction with the classical instanton gauge field. The results obtained turn out to be consistent with the first approach and notably, one also observes an analogous saturation behaviour of the dipole cross section. Again, the instanton size $\langle\rho\rangle$ sets the scale for the cross section.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung und Überblick

Instantonen stellen einen wesentlichen nichtperturbativen Aspekt der Theorie der starken Wechselwirkung dar. Dies macht es interessant, die Bedeutung von Instantonen in der tiefinelastischen Streuung im Bereich kleiner werdender Q^2 zu untersuchen[1]. Insbesondere wird gezeigt, daß Instantonen aufgrund ihrer intrinsischen Ausdehnungsskala zum vieldiskutierten Phänomen der Saturation bei kleinem Bjorken-x_{Bj} beitragen.

Der am Teilchenbeschleuniger HERA beobachtete starke Anstieg der Protonstrukturfunktion [1] bei kleinem x_{Bj} bestätigt auf eindrucksvolle Weise die von den DGLAP-Gleichungen [2] vorhergesagte Dynamik [3] und stellt damit einen Nachweis der QCD als Theorie der starken Wechselwirkung dar. Offenbar kann dieser Anstieg nicht unbegrenzt anhalten, da die Wirkungsquerschnitte dann bei hohen Energien, also kleinen x_{Bj}, die Unitarität verletzen würden. Auch die in den BFKL-Gleichungen [4] enthaltene Summation von bei kleinen x_{Bj} relevanten Logarithmen löst dieses Problem nicht.

Ursache dieses Verhalten bildet der von den DGLAP-Gleichungen vorausgesagte Anstieg der Gluonverteilung. Wird die Anzahl der Gluonen im Proton immer größer, so ist die Annahme von quasi-freien Partonen nicht mehr gerechtfertig und die DGLAP-Gleichungen müssen um einen nichtlinearen, die Wechselwirkung beschreibenden Term erweitert werden [5]. Die zusätzliche nichtlineare Wechselwirkung führt zum Ausflachen der Gluonverteilung für weiter abnehmende Werte von x_{Bj}; die Gluonverteilung „saturiert".

Der Bereich, in dem die nichtlinearen Effekte relevant werden, hängt sowohl von x_{Bj} als auch Q^2 ab. Mit abnehmenden x_{Bj} steigt die Anzahl der Partonen an. Diese werden sich schneller überlappen, wenn die durch die „Auflösung" $\frac{1}{Q^2}$ gegebenen effektive „Größe" der Partonen anwächst (siehe dazu z.B. den Übersichtsartikel [6] oder [5, 7, 8]). Beschrieben wird der Punkt, an dem die Wechselwirkung einsetzt, durch die Saturationsskala $Q_s(x_{\mathrm{Bj}})$.

In den nach Balitsky [9] und Kovchegov [10] benannten BK-Gleichungen sind die nichtlinearen Effekte realisiert. Sie wurden mit numerischen [11–13] und semianalytischen [14, 15] Methoden studiert. Dabei konnte die gewünschte Unterdrückung der Partonverteilungen nachgewiesen und überdies die damit verknüpfte Saturationsskala $Q_s(x_{\mathrm{Bj}})$ abgeschätzt werden.

Ein weiterer Zugang zur Beschreibung der Saturation ist eine Entwicklung um das sogenannte „Farbglaskondensat" [15]. Dieser Vielteilchen-Quantenzustand kann aufgrund der hohen Beset-

[1] Ist q der Impuls des ausgetauschten Photons und P der Protonimpuls, so ist $Q^2 = -q^2$ und $x_{\mathrm{Bj}} = \frac{Q^2}{2\,q\cdot P}$.

zungszahlen der beteiligten Zuständen als klassisches Feld behandelt werden. Die stark ansteigende Gluonverteilung übersetzt sich in diesem Bild in eine hohe Feldstärke $\propto \frac{1}{\sqrt{\alpha_s}}$ des Hintergrundfeldes. Trotz der nichtlinearen Effekte ist für nicht zu kleine Q^2 die Eichkopplung α_s klein.

Saturationseffekte werden tendentiell bei kleinen Q^2 relevant. Für eine geeignete Beschreibung in diesem Bereich ist es wichtig, neben den beschriebenen störungstheoretischen Zugängen auch nichtperturbative Konzepte zu berücksichtigen. Im Lichte der erwarteten Eigenschaften des Farbglaskondensats erscheint es gerechtfertigt, insbesondere die explizit bekannten Instantoneichfelder [16, 17] zu untersuchen, die den klassischen, Euklidischen Feldgleichungen genügen und proportional zu $\frac{1}{\sqrt{\alpha_s}}$ sind.

Es gibt gute Gründe anzunehmen, daß Instantonen für die Saturation relevant werden: Zum einen bringen sie als ausgedehnte nichtperturbative Fluktuationen des Gluonfeldes eine intrinsische Längenskala $\langle\rho\rangle \approx 0.5$ fm mit, die unmittelbar mit der Saturationsskala verknüpft sein könnte. Das Auftreten dieser Skala $\langle\rho\rangle$ äußert sich in einem ausgeprägten Maximum der auf dem Gitter simulierten Instanton-Größenverteilung $D(\rho)$. Zum anderen steigen die Beiträge instantoninduzierter Prozesse für kleiner werdende $x_{\rm Bj}$ und Q^2 an, welches auch der Bereich ist, in dem nichtlineare Saturationseffekte erwartet werden.

Die Beiträge instantoninduzierter Prozesse zur tiefinelastischen Streuung wurden im Bereich großer Q^2 und moderater $x_{\rm Bj}$ im Rahmen der „Instanton-Störungstheorie“ ausführlich analysiert [18, 19]. Es konnte dabei gezeigt werden [20–22], daß QCD-Instantonen Prozesse induzieren, die eine charakterische Signatur aufweisen und relevante Beiträge zum Wirkungsquerschnitt liefern. Diese Erkenntnisse bilden die Grundlage einer zielgerichteten Suche nach Instantonen am Beschleuniger HERA [23]. Es ergab sich ein bemerkenswerter Überschuß von Ereignissen, der aufgrund des schwer kontrollierbaren Untergrundes noch nicht abschließend beurteilt werden kann.

Die Studien innerhalb der Instanton-Störungstheorie belegten den besagten Anstieg der Instantonbeiträge im Bereich kleiner werdender $x_{\rm Bj}$ und Q^2 [19,20]. Der Anstieg mit sinkenden Q^2 erklärt sich qualitativ damit, daß immer größere Instantonen beitragen ($\rho_{\rm eff} \sim \frac{1}{Q}$) und gleichzeitig innerhalb der Störungstheorie $D(\rho)$ ansteigt. Die erhöhten Beiträge aus der Region abnehmender $x_{\rm Bj}$ (also zunehmender Energie E) beruhen auf einem seit langem bekannten Mechanismus [24]: Führt man dem Streuprozeß immer mehr Energie zu, so ändert sich das physikalische Bild eines reinen, stark unterdrückten Tunnelprozesses bei $E \approx 0$ zwischen benachbarten, topologisch inäquivalenten Vakuumzuständen. Erreicht die Energie die Höhe der Potentialbarriere zwischen den Vakuumzuständen, wird der Tunnelprozeß durch die Produktion einer sogenannten sphaleronartigen, kohärenten Multigluonkonfiguration [25] der Masse $M_{\rm Sph}$ auf dem Gipfel der Potentialbarriere abgelöst. Der Mechanismus, der zur Erhöhung der Tunnelwahrscheinlichkeit durch Emission vieler Eichbosonen bei zunehmender Energie führt, wurde bereits in [26] erläutert. Wie das Farbglaskondensat stellt die Sphaleronkonfiguration eine kohärente Multigluonkonfiguration dar. Aktuell diskutiert wird die Rolle größerer Instantonen, die mit einer intrinsischen Skala assoziiert sind, für die Streuung bei hohen Energien bzw. kleinen $x_{\rm Bj}$ in [27–33].

Die qualitativen Betrachtungen werfen nun zwei wichtige Fragen auf, die in dieser Arbeit eingehend untersucht werden:

- Besteht ein direkter Zusammenhang zwischen der mittleren Instantongröße $\langle\rho\rangle$ und der Saturationsskala ?

- Welche Rolle spielt die sphaleronartige Konfiguration in der Streuung bei hohen Energien?

Am transparentesten sind die der Saturation zugrunde liegenden nichtlinearen Effekte der tiefinelastische Streuung bei hohen Energien bzw. kleinen x_{Bj} im sogenannten Dipolsystem [34]. Das Photon fluktuiert in diesem System in ein $q\overline{q}$-Paar, welches mittels Gluonemission mit dem Proton wechselwirkt. Da das Proton Lorentz-kontrahiert ist, „sieht“ der von einer Gluonenwolke umgebene Dipol eine sich auf dem Lichtkegel befindliche Farbquelle mit einer transversalen Ausdehnung. Dieses physikalische Bild führt zu einer Faktorisierung des Wirkungsquerschnitts der Photon-Proton-Streuung [35, 36]:

$$\sigma_{\gamma^* P}(x_{\mathrm{Bj}}, Q^2) = \int_0^1 d\,z \int d^2\boldsymbol{r} \;\mid \Psi(z,r) \mid^2\; \sigma_{\mathrm{DP}}(r, x_{\mathrm{Bj}})\,. \tag{1.1}$$

Die Lichtkegel-Wellenfunktion $\Psi(z,r)$ beschreibt das Aufspalten des Photons in einen $q\overline{q}$-Dipol und läßt sich im Rahmen der störungstheoretischen QCD berechnen. Die Variable z ist der von einen Quark getragene Anteil am longitudinalen Impuls des Photons. Der Dipolwirkungsquerschnitt $\sigma_{\mathrm{DP}}(r, x_{\mathrm{Bj}})$ ist der totale Wirkungsquerschnitt der Streuung eines Dipols der transversalen Größe $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ ($r = \mid \boldsymbol{r} \mid$, $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ beschreiben die Position des Quarks bzw. Antiquarks) an einem Proton.

Für hohe Energien, also kleinen x_{Bj}, bietet sich zur Berechnung der Dipol-Proton-Streuung die nichtabelsche Eikonalnäherung an. Dort wird die Rückstreuung der Quarks am Farbfeld des Protons vernachlässigt, wodurch die Streuung nur die Phase in den Feldern der Quarks ändert. In diesem Fall ergibt sich, σ_{DP} durch die Integration der Streuamplitude über den Impaktparameter $\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{2}$ (siehe z.B. [37]):

$$\sigma_{\mathrm{DP}}(r, x_{\mathrm{Bj}}) = 2 \int d^2\boldsymbol{b}\, \frac{1}{N_c} \left\langle \mathrm{tr}\left[1 - W(\boldsymbol{x})\, W^{\dagger}(\boldsymbol{y})\right] \right\rangle\,. \tag{1.2}$$

$\langle \ldots \rangle$ beschreibt die Mittelung über die vom Proton erzeugten Farbfelder und $N_c = 3$ ist die Anzahl der Farbladungen. $W(\boldsymbol{x})$ bzw. $W^{\dagger}(\boldsymbol{y})$ sind die sogenannten Wilson-Linien, die die Eikonalwechselwirkung der Quarks mit dem Farbfeld beschreiben:

$$W(\boldsymbol{x}) = \mathrm{P}\,\exp\left\{-i\, g_s \int_{-\infty}^{+\infty} d\,x_- \; A_+(x_-, \boldsymbol{x})\right\}\,. \tag{1.3}$$

Eine genaue Definition der Lichtkegel-Koordinaten erfolgt in Kapitel 4. Wichtig ist, daß der die Streuung des Dipols am Farbfeld bestimmende Wilson-Loop $\frac{1}{N_c}\mathrm{tr}[W(\boldsymbol{x})\, W^{\dagger}(\boldsymbol{y})]$ in (1.2) nur von den Eichfeldern A_μ abhängt. Die BK-Gleichungen beschreiben in diesem Bild die Veränderung der Dipolstreuamplitude mit der Rapidität $\tau = \log \frac{1}{x_{\mathrm{Bj}}}$.

Aus den Gleichungen (1.2) und (1.3) folgt, daß der Dipolwirkungsquerschnitt σ_{DP} für kleine r verschwinden muß, was als „Farbtransparenz“ bezeichnet wird. Im Farbdipol-Bild äußert sich die Saturation durch ein Ausflachen von σ_{DP}, sobald r die inverse Saturationsskala $\frac{1}{Q_s}$ erreicht. Das phänomenologische Modell von Golec-Biernat und Wüsthoff [38, 39], in dem diese Eigenschaften des Dipolwirkungsquerschnitts realisiert sind, beschreibt die HERA-Daten mit wenigen Parametern sehr gut. Dies ist ein gutes Argument dafür, daß Saturation für den bei HERA zugänglichen Bereich relevant ist.

Das Farbdipol-Bild ist ideal geeignet, den Saturationsmechanismus im Instantonhintergrund zu beleuchten, da er sich in einem direkten „Wettbewerb“ zwischen r und der mit dem Instanton verknüpften Längenskala $\langle\rho\rangle$ manifestieren sollte. Der Wettbewerb und die damit verbundene Saturation wird mittels zweier getrennter Strategien untersucht, die zu konsistenten Resultaten führen:

- Im ersten Zugang [30–33] wird, ausgehend von den Ergebnissen der Instanton-Störungstheorie [18, 19], der relevante Streuprozeß eines $q\overline{q}$-Farbdipols an einem Proton untersucht.
- Im zweiten Zugang [33] wird der $q\overline{q}$-Farbdipol innerhalb der nichtabelschen Eikonalnäherung [40–46] durch einen nur vom Instantoneichfeld im Hintergrund abhängenden Wilson-Loop dargestellt [28, 33] und der Dipolwirkungsquerschnitt (1.2) in analytischer Form berechnet und diskutiert.

Die Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut.

Im Kapitel 2 beginnen wir mit der Einführung von Instantonen, insbesondere im Hinblick auf den Gebrauch der Instanton-Störungstheorie, die verläßliche Vorhersagen von instantoninduzierten Streuprozessen erlaubt. Zu Beginn werden Instantonen als klassische Lösung der Feldgleichungen in Euklidischer Raumzeit mit endlicher Wirkung eingeführt, die einen Tunnelübergang zwischen benachbarten Vakua darstellen. Einen Schwerpunkt bildet der Zusammenhang zwischen der mit den Instantonen verknüpften topologischen Ladung und der Änderung der chiralen Ladung der beteiligten Fermionen [47], was zu charakteristischen Eigenschaften von instantoninduzierten Prozessen führt.

Es folgt eine Diskussion der eng mit der Skala $\langle\rho\rangle$ verknüpften Verteilung $D(\rho)$ der Instantonen im Vakuum, beginnend mit der Vorstellung der störungstheoretischen, erstmals von ‘t Hooft berechneten Form $D(\rho)_{I\text{-pert.}}$ [17, 48]. $D(\rho)_{I\text{-pert.}}$ steigt mit wachsender Instantongröße ρ stark an, wobei für hinreichend große ρ ein Zusammenbruch der Störungstheorie zu erwarten ist. Glücklicherweise existieren präzise Gittersimulationen $D(\rho)_{\text{Gitter}}$ der Instanton-Größenverteilung [49, 50]. Ein Vergleich zwischen $D(\rho)_{I\text{-pert.}}$ und $D(\rho)_{\text{Gitter}}$ zeigt eine sehr gute parameterfreie Übereinstimmung für $\rho \lesssim 0.35$ fm, was die Gültigkeit der Störungstheorie in diesem Bereich bestätigt [50]. Beiträge größere Instantonen erweisen sich hingegen als stark unterdrückt und man erkennt ein scharfes Maximum der Verteilung $D(\rho)_{\text{Gitter}}$ bei $\langle\rho\rangle \approx 0.5$ fm (siehe Abbildung 2.3).

Anschließend werden einige grundlegende Aspekte der Instanton-Störungstheorie erläutert. Im Gegensatz zur üblichen Störungstheorie werden die auftretenden Felder um die nichtverschwindenden klassischen Instantoneichfelder entwickelt. Neben einer kleinen Kopplung α_s verlangt ihre Anwendung ein nicht zu dichtes Instantonensemble, da ansonsten der Gebrauch von unabhängigen nicht miteinander wechselwirkenden Instantonfeldern fragwürdig wird.

Die Instanton-Störungstheorie setzt voraus, daß nur hinreichend kleine Instantonen beitragen für die $D(\rho)_{I\text{-pert.}}$ anwendbar ist ($\rho \lesssim 0.35$ fm). Von fundamentaler Bedeutung ist dabei die Tatsache, daß die auftretenden Integrale über ρ stets von einer Impulsskala $\mathcal{Q}$ abhängen und in diesen nur Instantonen der Größe $\sim \frac{1}{\mathcal{Q}}$ beitragen. Sind alle auftretenden kinematischen Impulsskalen hinreichend groß, läßt sich die übliche Instanton-Störungstheorie anwenden.

Um Betrachtungen im Bereich nicht zu großer Q^2 zu ermöglichen, ist es notwendig, sich von der reinen Instanton-Störungstheorie zu lösen. Nun liefern die Gitterdaten eine außergewöhnliche Möglichkeit, dies zu tun. Ersetzt man die in der Instanton-Störungstheorie gebrauchte Instanton-Größenverteilung $D(\rho)_{I\text{-pert.}}$ durch eine Parametrisierung $D(\rho)_{\text{Gitter}}$ der Gitterdaten, kann man versuchen, die semiklassische Näherung auch zu kleineren Impulsskalen hin fortzusetzen, da die größeren, störungstheoretisch nicht beschreibbaren Instantonen explizit durch die nichtperturbativen Effekte in $D(\rho)_{\text{Gitter}}$ unterdrückt werden.

Nach dieser Einführung verfolgen wir im Kapitel 3 die erste Strategie zur Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Instantonen und Saturation: Eine Übersetzung der Ergebnisse der Instanton-Störungstheorie in das Farbdipol-Bild, zunächst für den einfachsten Prozeß (Abschnitt 3.2)[2]:

$$\gamma^* + g \xrightarrow{(I)} \overline{q}_R + q_R \,, \tag{1.4}$$

gefolgt von allgemeinen Prozeß (Abschnitt 3.3):

$$\gamma^* + g \xrightarrow{(I)} n_f(\overline{q}_R + q_R) + n_g\, g \,. \tag{1.5}$$

Der wichtigste Punkt ist dabei die Summation der Endzustandsgluonen. Diese involviert die sogenannte Valley-Methode, in der die resummierten Endzustandsgluonen in Form einer Wechselwirkung zwischen Instantonen und Antiinstantonen behandelt werden.

Aus zwei Gründen ist es sinnvoll, zunächst den einfachsten Prozeß zu untersuchen: Zum einen führt die einfachere Struktur auf eine sehr transparente Darstellung des Wettbewerbs zwischen der Dipol- und Instantongröße, zum anderen ist in der QCD aufgrund der großen Kopplung die Unterdrückung eines reinen Tunnelprozesses $\propto e^{-\frac{4\pi}{\alpha}}$ bei weitem nicht so stark wie in der elektroschwachen Theorie. Der zuvor geschilderte Mechanismus, nach dem die Emission vieler Eichbosonen den Wirkungsquerschnitt bei größeren Energien erhöht, führt zwar zu relevanten quantitativen Korrekturen, ist aber nicht notwendig, um überhaupt Wirkungsquerschnitte von meßbarer Größe zu erhalten. Ganz anders ist die Situation in der elektroschwachen Theorie: Dort werden $(B+L)$-verletzende Prozesse erst dann beobachtbar, wenn fast der gesamte unterdrückende Tunnelfaktor durch die Emission der Eichbosonen aufgehoben wird. Eine Abschätzung der Größenordnungen der Unterdrückung in beiden Theorien wird in Abschnitt 3.1 vorgestellt.

Der Abschnitt 3.2 beginnt mit einer Erläuterung der Ergebnisse aus [18], die im Rahmen der für große Impulse anwendbaren Instanton-Störungstheorie berechnet wurden. Diese umfassen die partonischen Wirkungsquerschnitte $\widehat{\sigma}_{\gamma^* p_i}$ des instantoninduzierten Subprozesses. Mittels der üblichen Darstellung:

$$\sigma_{\gamma^* P}(x_{\text{Bj}}, Q^2) = \sum_{p_i = q, \overline{q}, g} \int_{x_{\text{Bj}}}^{1} \frac{d\,x}{x}\, \frac{x_{\text{Bj}}}{x}\, f_i\left(\frac{x_{\text{Bj}}}{x}, \mu_f^2\right)\, \widehat{\sigma}_{\gamma^* p_i}(x, Q^2)\,, \tag{1.6}$$

in der kollinearen Faktorisierung, läßt sich der Anteil des instantoninduzierten Subprozesses zur tiefinelastischen Streuung berechnen. f_i ist die Verteilung des Partons i im Proton, dessen Skalenabhängigkeit durch die DGLAP-Gleichung beschrieben wird. In dieser Arbeit wird nur der Gluonanteil untersucht, da er aufgrund des Anstiegs der Gluonverteilung für den Bereich kleiner x_{Bj} relevant ist und überdies der Partonwirkungsquerschnitt des Gluons gegenüber dem des Quarks im Instantonhintergrund um einen Faktor $\frac{1}{\alpha_s}$ erhöht ist.

Die Ergebnisse der Instanton-Störungstheorie werden dann mittels der auf dem Gitter simulierten Instanton-Größenverteilung zu kleineren Impulsen fortgesetzt. Anschließend wird der

[2] In gleicher Weise induziert das Antiinstanton $(\overline{I})$ einen chiralitätsverletzenden Prozeß mit linkshändigen Quarks im Endzustand.

nun auch für kleinere Impulsüberträge sinnvolle Wirkungsquerschnitt ins Farbdipol-Bild transformiert. Das berechnete Produkt $|\psi|^2 \sigma_{\text{DP}}$ im Instantonhintergrund zeigt tatsächlich den erwarteten Wettbewerb zwischen Dipolgröße r und Instantongröße ρ.

Es folgt eine Diskussion im Rahmen der Instanton-Störungstheorie, was das Verhalten kleiner, störungstheoretisch beschreibbarer Dipole einschließt. Anschließend wird der Bereich untersucht, in dem Saturationseffekte zu erwarten sind. Dazu muß r auf hadronischen Ausmaße vergrößert werden, was den Gebrauch von $D(\rho)_{\text{Gitter}}$ bedingt. Ist $r \gg \langle\rho\rangle$, so faktorisiert das Produkt aus Wellenfunktion und Dipolwirkungsquerschnitt tatsächlich in die Wellenfunktion der perturbativen QCD und einen konstanten saturierten Dipolwirkungsquerschnitt, der proportional zur Fläche $\pi \langle\rho\rangle^2$ des Instantons im Vakuum ist.

Der Abschnitt 3.3 ist analog aufgebaut: Der Darstellung der bekannten Ergebnisse [19] der Instanton-Störungstheorie für den allgemeinen instantoninduzierten Prozeß (1.5) schließt sich die Übersetzung ins Farbdipol-Bild an. Auch hier gelingt – wie im einfachsten Prozeß – für $r \gg \langle\rho\rangle$ eine Faktorisierung in die bekannte, störungstheoretische Wellenfunktion und einen konstanten saturierten Dipolwirkungsquerschnitt. Essentiell ist dabei die mit der Instanton-Antiinstanton-Wechselwirkung verbundene Sphaleronkonfiguration, die, wie hier argumentiert wird, die dominierenden Beiträge zum Dipolwirkungsquerschnitt liefert.

Im Kapitel 4 verfolgen wir die zweite Strategie zur Untersuchung der Saturation im Instantonhintergrund. Dort wenden wir uns der Beschreibung der Streuung bei kleinen x_{Bj} in der Eikonalnäherung zu. Zunächst wird die Amplitude der Dipole-Proton-Streuung aus den Wilson-Linien, die die Streuung des Quarks bzw. Antiquarks am Farbfeld des Protons beschreiben, konstruiert. Daran knüpft sich die Beschreibung der Evolution der Wilson-Linien mit der Rapidität $\tau = \log \frac{1}{x_{\text{Bj}}}$ durch die nichtlinearen BK-Gleichungen an.

Anschließend wird die Wilson-Linie im klassischen Instantonhintergrund analytisch berechnet. Betrachtet man das Proton als Farbfeld-Quelle, so läßt sich mittels Gleichung (1.2) der Dipolwirkungsquerschnitt berechnen. Es folgt eine Diskussion der von den BK-Gleichungen induzierten x_{Bj}-Abhängigkeit. Abschließend wird die instantoninduzierte Dipol-Dipol-Streuung in der Eikonalnäherung berechnet, die mittels eines Modells des Proton ebenfalls eine Vorhersage des Dipolwirkungsquerschnitts erlaubt, der mit dem des ersten Zugangs innerhalb der Eikonalnäherung konsistent ist.

Wie bei der Übersetzung der Ergebnisse der Instanton-Störungstheorie in das Farbdipol-Bild, erweist sich die Längenskala $\langle\rho\rangle$ als Saturationsskala und der konstante, saturierte Dipolwirkungsquerschnitt ist proportional zur Fläche $\pi \langle\rho\rangle^2$ des Instantons.

Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick auf neue Fragestellungen.

Kapitel 2

Instantonen

Der erste Teil dieses Kapitels beschäftigt sich mit grundlegenden Eigenschaften der Instantonen[1] in nichtabelschen Theorien. So wird dort aufgezeigt, daß Instantonen Tunnelübergänge darstellen. Einen weiteren Schwerpunkt bildet die mit den Instantonen verknüpfte Verletzung der Chiralität.

Es folgt eine Darstellung der I-Größenverteilung $D(\rho)$ in Hinblick auf ihre zentrale Bedeutung für den Übergang von harten zu weicheren Impulsen. Dieser Übergang ist notwendig, um die Ergebnisse der üblichen I-Störungstheorie auf den Bereich der Saturation zu übertragen.

Abschließend werden die Konzepte der I-Störungstheorie erläutert. Sie bildet zusammen mit der störungstheoretischen I-Größenverteilung die Grundlage zur Berechnung der Wirkungsquerschnitte I-induzierter Prozesse in [18,19], die im Kapitel 3 vorgestellt und dann ins Farbdipol-Bild übersetzt werden.

2.1 Instantonen als Tunnelübergänge

Instantonen beschreiben Tunnelübergänge zwischen topologisch inäquivalenten Vakuumzuständen.

Die hier erläuterten Zusammenhänge sind schon sehr lange bekannt; die Ausführungen im Abschnitt 2.1.1 orientieren sich an den Lehrbüchern [51, 52]. Übersichtsartikel sind z.B. [53–55].

2.1.1 Das Euklidische Instantoneichfeld

In diesem Abschnitt werden Instantonen in reinen, nichtabelschen Eichtheorien (ohne Fermionen) diskutiert. Im Euklidischen sind sie Lösungen der Bewegungsgleichungen mit endlicher Wirkung. Mit dem Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ (A.4) ist die Euklidische Wirkung:

$$S_{\mathrm{Euk}} = \frac{1}{2} \int d^4x \; \mathrm{tr}\, [F_{\mu\nu}\; F_{\mu\nu}] \; . \tag{2.1}$$

[1] Instantonen werden im folgenden mit I und Antiinstantonen mit $\bar{I}$ bezeichnet

Da sie aufgrund der Euklidischen Metrik[2] positiv definit ist, muß für endliche S_{Euk} der Feldstärketensor im Unendlichen verschwinden:

$$F_{\mu\nu}(x) \xrightarrow{\sqrt{x^2}\to\infty} 0\,. \tag{2.2}$$

Die Randbedingung (2.2) läßt sich nicht nur durch $A_\mu(x) = 0$ realisieren[3]. Allgemein ist sie durch

$$A_\mu(x) \xrightarrow{\sqrt{x^2}\to\infty} \frac{i}{g} U(x)^\dagger \partial_\mu U(x) \tag{2.3}$$

erfüllt. Hierbei ist $U(x)$ ein beliebiges, ortsabhängiges Element der Eichgruppe. Eine allgemeine Eichtransformation des Eichfeldes $A_\mu(x)$ hat die Form:

$$A'_\mu(x) = U(x)^\dagger A_\mu(x) U(x) + \frac{i}{g} U(x)^\dagger \partial_\mu U(x)\,. \tag{2.4}$$

Somit geht das Eichfeld (2.3) auf dem Rand durch eine Eichtransformation aus dem trivialen Eichfeld $A_\mu(x) = 0$ hervor und wird daher auch als „reine Eichung" bezeichnet.

Nun wird der duale Feldstärketensor eingeführt:

$$\widetilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}\,. \tag{2.5}$$

Mit diesem läßt sich die Forderung nach einer lokal minimalen Euklidischen Wirkung, die äquivalent zur Lösung der Bewegungsgleichung ist, prägnant formulieren. Die Wirkung S_{Euk} ist mit $\widetilde{F}_{\mu\nu}\widetilde{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$:

$$S_{\text{Euk}} = \frac{1}{2} \int d^4x \;\mathrm{tr}\left[F_{\mu\nu}\;F_{\mu\nu}\right] = \frac{1}{2} \int d^4x \;\mathrm{tr}\left[\pm F_{\mu\nu}\;\widetilde{F}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(F_{\mu\nu} \mp \widetilde{F}_{\mu\nu}\right)^2\right]\,. \tag{2.6}$$

Es wird sich zeigen, daß der erste Term in (2.6) durch die Topologie der Feldkonfiguration auf dem Rand und damit durch die Eichtransformation $U(x)$ bestimmt ist. Da der zweite Term positiv definit ist, ist die Forderung der minimalen Euklidischen Wirkung identisch zur Selbstdualität:

$$F_{\mu\nu} = \pm \widetilde{F}_{\mu\nu}\,. \tag{2.7}$$

Das selbstduale Feld beschreibt ein Instanton während das Antiinstanton anti-selbstdual ist. Die Wirkung ist in diesem Fall durch die sogenannte „topologische Ladung" Q bestimmt:

$$Q = \frac{g^2}{8\,\pi^2} \int d^4x\; \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[F_{\mu\nu}\,\widetilde{F}_{\mu\nu}\right]\,. \tag{2.8}$$

Für ein selbstduales Feld (Instanton) ist Q positiv und für ein anti-selbstduales Feld (Antiinstanton) negativ. Aus der Definition der Euklidischen Wirkung und der topologischen Ladung folgt der einfache Zusammenhang:

$$S_{\text{Euk}} = \frac{8\,\pi^2}{g^2} |Q|\,. \tag{2.9}$$

[2]Siehe Anhang A.4 für die Definition der Euklidischen Variablen. In Euklidischer Metrik ist $x^2 = \sum_{i=1}^4 x_i^2 \geq 0$.
[3]Siehe Anhang A.1 für die Definition der Eichfelder.

Die topologische Ladung Q (2.8) läßt sich in ein Oberflächenintegral umformen. Definiert man den eichabhängigen Strom:

$$K_\mu = \epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}\,\mathrm{tr}\left[\frac{1}{2}A_\nu\partial_\kappa A_\lambda - \frac{i\,g}{3}A_\nu A_\kappa A_\lambda\right]\,, \tag{2.10}$$

läßt sich leicht nachrechnen, daß $\partial_\mu K_\mu = \frac{1}{4}\mathrm{tr}\left[\widetilde{F}_{\mu\nu}\,F_{\mu\nu}\right]$ ist. Damit folgt aus dem Gaußschen Satz:

$$Q = \frac{g^2}{4\,\pi^2}\int_{V^4} d^4x\;\partial_\mu K_\mu = \frac{g^2}{4\,\pi^2}\int_{\partial V^4} d\sigma\cdot K\,. \tag{2.11}$$

Auf dem Rand ∂V^4 muß das Eichfeld A_μ der Eichbedingung (2.3) genügen. Somit ist dort der Strom (2.10) durch $U(x)$ festgelegt:

$$K_\mu = \frac{1}{6\,g^2}\,\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\,\mathrm{tr}\left[\left(U^\dagger(x)\partial_\nu U(x)\right)\,\left(U^\dagger(x)\partial_\lambda U(x)\right)\,\left(U^\dagger(x)\partial_\rho U(x)\right)\right]\,. \tag{2.12}$$

Die topologische Ladung Q ist damit vollständig durch den Wert von $U(x)$ auf dem Rand ∂V^4 bestimmt. Dies beschreibt eine Abbildung von der Oberfläche einer später ins Unendliche auszudehnenden Kugel in die entsprechende Eichgruppe. Ursprünglich wurden Instantonen in der $\mathsf{SU}(2)$ konstruiert. In diesem Fall ist der Raum, aus dem die Abbildung erfolgt, äquivalent zum Bildraum und beide Räume lassen sich durch drei Parameter charakterisieren, wodurch sich die Räume vollständig aufeinander abbilden lassen. Solche Abbildungen können in verschiedene Homotopieklassen eingeteilt werden. Zwei Abbildungen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ gehören zu einer Homotopieklasse, wenn sie durch eine stetige Transformation aufeinander abgebildet werden können. Dies verlangt die Existenz einer stetigen Funktion $F(x,t)$ mit $F(x,t_{1,2}) = f_{1,2}(x)$.

Betrachten wir als ein einfaches Beispiel nicht den dreidimensionalen Fall sondern den eindimensionalen Fall der Abbildungen vom Einheitskreis in die $\mathsf{U}(1)$. Offenbar beschreiben die Funktionen $e^{i(\theta\,n+a)}$ mit ganzzahligen n und beliebigen a solche Abbildungen, wobei zwei Funktionen f_1 und f_2 mit a_1 und a_2 zur gleichen Homotopieklasse gehören[4]. Charakterisiert werden die Abbildungen einer Homotopieklasse durch die Windungszahl n_W. Man rechnet leicht nach, daß

$$n_\mathrm{W} = -i\int_0^{2\pi}\frac{d\,\theta}{2\,\pi}\,\frac{1}{f(\theta)}\,\frac{d\,f(\theta)}{d\,\theta} = n \tag{2.13}$$

ist und die Windungszahlen damit ganzzahlig sind und die Komplexität der Abbildung bestimmen (für die einfachste Topologie $n_\mathrm{W} = 0$ ist $f = 1$, und für $n_\mathrm{W} = 1$ ist $f = e^{i\,\theta}$). Der Einheitskreis läßt sich auf die reelle Achse abbilden, wobei dann $f(\infty) = f(-\infty)$ sein muß. Die Verallgemeinerung der Windungszahl (2.13) auf dem dreidimensionalen Fall ist:

$$n_\mathrm{W} = \frac{1}{24\,\pi^2}\int d^3x\;\epsilon_{ijk}\,\mathrm{tr}\left[\left(f^{-1}(x)\,\partial_i f(x)\right)\,\left(f^{-1}(x)\,\partial_j f(x)\right)\,\left(f^{-1}(x)\,\partial_k f(x)\right)\right]\,. \tag{2.14}$$

Auch in drei Dimensionen ist die Windungszahl ganzzahlig und kennzeichnet verschiedene Homotopieklassen. Damit schließt sich zunächst der Bogen zur topologischen Ladung Q (2.11). Setzt

[4]Mit der stetigen Abbildung $F(\theta,t) = \exp\{i\left(\theta\,n + \frac{a_1(t-t_2)-a_2(t-t_1)}{t_1-t_2}\right)\}$ ist $F(x,t_{1,2}) = f_{1,2}(x)$ erfüllt

man den Strom (2.12) in (2.11) ein, so ist die topologische Ladung Q des Feldes in V^4 identisch mit der Windungszahl der Transformation auf dem Rand ∂V^4.

Felder mit einer endlichen Euklidischen Wirkung, die die Bewegungsgleichungen erfüllen, lassen sich somit durch eine ganzzahlige topologische Ladung Q beschreiben, und die Euklidische Wirkung ist $S_{\text{Euk}} = \frac{8\pi^2}{g^2}|Q|$.

Nun soll explizit eine I-Konfiguration in der $\mathsf{SU}(2)$ konstruiert werden. Mit dem Element der Eichgruppe: $U(x) = \frac{x_\mu \sigma_\mu}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2}} \in \mathsf{SU}(2)$ erfüllt das Feld[5]

$$A_\mu(x) = \frac{i}{g} U(x) \partial_\mu U^\dagger(x)\, f(x^2) = \frac{i}{g} \frac{x\overline{\sigma}_\mu - x_\mu}{x^2} f(x^2) \tag{2.15}$$

auf dem Rand die Eichbedingung (2.3), wenn $\lim_{x^2\to\infty} f(x^2) = 1$ ist.

Die Funktion $f(x^2)$ bestimmt sich aus der Forderung der minimalen Wirkung des Feldes (2.15), die am einfachsten durch die Selbstdualität (2.7) ausgedrückt wird. Das Feld ist selbstdual, wenn $f(x^2)$ der Differentialgleichung

$$f(x^2)[1 - f(x^2)] - x^2 \frac{d\, f(x^2)}{d\, x^2} = 0 \tag{2.16}$$

genügt. Die Lösung mit der entsprechenden Randbedingung ist $f(x^2) = \frac{x^2}{x^2+\rho^2}$ mit einer Konstanten ρ. Diese tritt als Integrationskonstante bei der Lösung der Differentialgleichung auf und beschreibt die Ausdehnung des Instantons. Damit erhält man die Euklidische I-Lösung nach Belavin, Polyakov, Schwartz und Tyupkin in der $\mathsf{SU}(2)$ [16]:

$$A_\mu = -\frac{i}{g} \frac{1}{x^2+\rho^2} \frac{\sigma_\mu \overline{x} - x\,\overline{\sigma}_\mu}{2}\,. \tag{2.17}$$

Natürlich kann die Theorie nicht von willkürlichen Anfangsbedingungen abhängen, so daß über ρ integriert werden muß, um die Symmetrie der Theorie wieder herzustellen. Im Gegensatz zum Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ ist das Eichfeld $A_\mu \sim \frac{1}{\sqrt{x^2}}$ (2.17) langreichweitig, was im Rahmen der I-Störungstheorie zu Problemen führen würde. Nun erlaubt die Invarianz der Yang-Mills-Gleichungen unter Inversion $x_\mu \to \frac{\rho^2}{x^2}\, x_\mu$ der Koordinaten [56] die Verschiebung der Singularität im Unendlichen in den Ursprung [54]. Das Eichfeld in der im folgenden benutzten singulären Eichung ist:

$$A_\mu = -\frac{i}{g} \frac{x^2}{\rho^2\,(x^2+\rho^2)} \frac{\sigma_\mu \overline{x} - x\,\overline{\sigma}_\mu}{2}\,. \tag{2.18}$$

Überdies läßt sich explizit eine Eichtransformation $U(x)$ angeben, die mittels Gleichung (2.4) die Felder (2.17) und (2.18) ineinander überführt.

Das Instanton als Vakuumübergang

Im folgenden wird gezeigt, daß ein I-Eichfeld A_μ zwei Vakuumzustände miteinander verbindet, deren Windungszahl um Q differiert (die Argumentation orientiert sich an [52]). Die Interpretation

[5] Siehe für die Definition von σ_μ und $\overline{\sigma}_\mu$ im Euklidischen Gleichung (A.8) sowie Gleichung (A.10).

ist in der temporären Eichung $A_4 = 0$ am einfachsten. Die Eichtransformation, die das I-Feld (2.17) in diese Eichung überführt, ist mit (2.4) durch die Lösung der Differentialgleichung[6]

$$\frac{\partial}{\partial x_4} U(x) = i\, g\, A_4(x) = i\, \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{x^2 + \rho^2} \tag{2.19}$$

bestimmt. Die Lösung von (2.19) ist [51, 52]:

$$U_{\text{temp}}(x) = \exp\left\{ i\, \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \rho^2}} \left[\arctan\left(\frac{x_4}{\sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \rho^2}} \right) + \pi \left(n + \tfrac{1}{2} \right) \right] \right\} . \tag{2.20}$$

Aus Gleichung (2.20) folgen die räumlichen Komponenten des I-Feldes in temporärer Eichung:

$$A_i'(\boldsymbol{x}, x_4) = U_{\text{temp}}^\dagger \, (A_{\text{reg}})_i \, U_{\text{temp}} + \frac{i}{g} U_{\text{temp}}^\dagger \partial_i U_{\text{temp}} \,, \tag{2.21}$$

mit dem I-Feld A_{reg} (2.17) in regulärer Eichung. Diese sind im allgemeinen recht umfangreich (siehe z.B. Ref. [57]). Für $x_4 \to \pm\infty$ sind sie (das Feld (2.17) verschwindet im Unendlichen)

$$A_i'(\boldsymbol{x}, x_4 = \pm\infty) = \frac{i}{g}\, U^\dagger(x) \partial_i U(x) \,, \tag{2.22}$$

mit:

$$U(\boldsymbol{x}, x_4 = -\infty) = \exp\left\{ i\, n\, \pi \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \rho^2}} \right\} , \tag{2.23}$$

$$U(\boldsymbol{x}, x_4 = +\infty) = \exp\left\{ i\, (n+1)\, \pi \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \rho^2}} \right\} . \tag{2.24}$$

Aus der Definition der Windungszahl in drei Dimension (2.14) folgt entsprechend (2.13), daß das I-Feld (2.21) zwei Vakua miteinander verbindet, die durch die Windungzahlen n und $n+1$ charakterisiert sind. Mit den Gleichungen (2.28) und (2.29) läßt sich die Energie des Feldes (2.21) als Funktion der Zeit x_4 bzw. der Windungszahl n_{W} (2.14) bestimmen. Abbildung 2.1 illustriert den Übergang zwischen den Vakuumzuständen mit Windungszahl n bzw. $n+1$ durch die Barriere nichtverschwindener Feldenergie hindurch. Allgemein verbindet eine Feldkonfiguration mit ganzzahliger topologischer Ladung Q zwei Vakua deren Windungszahlen sich um $\Delta\, n_{\text{W}} = Q$ unterscheiden.

2.1.2 Klassische Tunnelwahrscheinlichkeit und Potentialbarriere

Die I-Lösung (2.21) beschreibt im Minkowskiraum einen Tunnelübergang zwischen zwei benachbarten Vakuumzuständen mit $Q = 1$. Nach Gleichung (2.9) ist für das selbstduale I-Feld die Euklidische Wirkung (das Antiinstantonfeld beschreibt einen Tunnelübergang mit negativen Q):

$$S_{\text{Euk}} = \frac{8\pi^2}{g^2} |Q| = \frac{8\pi^2}{g^2} \,. \tag{2.25}$$

[6] Mit der Definiton der Euklidischen σ-Matrizen (A.8) ist in (2.17) $A_4(x) = \frac{1}{x^2+\rho^2} \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{g}$, mit $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ und $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

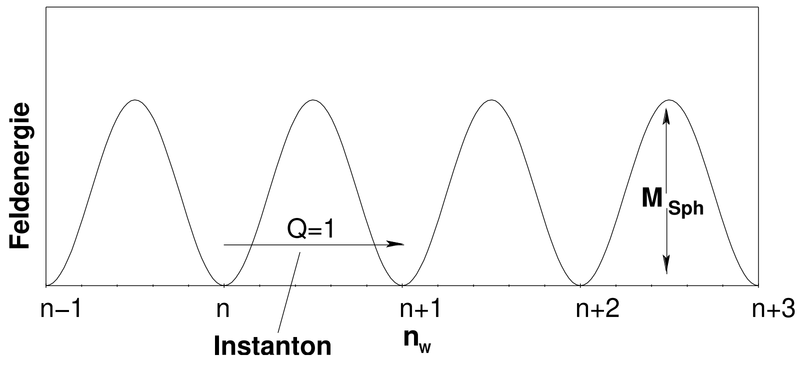


Abbildung 2.1: Feldenergie als Funktion der Windungszahl n_{W}. In den Minima ist $A_\mu = \frac{i}{g} U(x) \partial_\mu U(x)^\dagger$ und damit $F_{\mu\nu} = 0$.

In führender semiklassischer Näherung ist die Amplitude eines Tunnelprozesses:

$$P_{\text{tunnel}} \propto e^{-S_{\text{Euk}}} = e^{-\frac{8\pi^2}{g^2}|Q|} = e^{-\frac{8\pi^2}{g^2}} \,. \tag{2.26}$$

Um das einzusehen, betrachtet man ein Teilchen, daß durch eine eindimensionale Potentialbarriere tunnelt. In der WKB-Näherung ist für $V > E$ die Tunnelwahrscheinlichkeit proportional zu:

$$\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int_a^b \sqrt{2\,m\,(V-E)}\;dx\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\,S_{\text{Euk}}\right\} . \tag{2.27}$$

Für $\hbar \to 0$ geht Gleichung (2.27) und damit die Tunnelwahrscheinlichkeit gegen 0, womit sich in diesem Grenzwert die klassische Vorhersage ergibt. Im Falle eines klassisch erlaubten Pfades mit $E \geq V$ läßt sich mittels der Bewegungsgleichungen $m\ddot{x} = \frac{\partial V}{d\,x}$ das Integral über $\sqrt{2\,m\,(E-V)}$ als Wirkung in der üblichen Raumzeit schreiben. Ersetzt man in dieser Herleitung die Zeit t durch $i\,t$, ergibt sich tatsächlich der durch (2.27) beschriebene Zusammenhang. Dies macht plausibel, daß in einer Feldtheorie die Tunnelwahrscheinlichkeit wie in (2.26) durch die Euklidische Wirkung gegeben ist.

Eine interessante Frage betrifft die Höhe der Potentialbarriere, die eng mit der Skala der Sphaleronprozesse verknüpft ist und deren Bedeutung für die Streuung bei hohen Energien bereits in der Einleitung dargelegt wurde. Essentiell für diese Untersuchung ist erneut die temporäre Eichung $A_4 = 0$. In ihr ist die potentielle bzw. kinetische Energie des Instantonfeldes entlang des durch x_4 parametrisierten Pfades (siehe z.B. [29, 55, 57]):

$$\mathcal{V}(x_4) = \int d^3\boldsymbol{x}\ \mathrm{tr}[B_i(\boldsymbol{x}, x_4)\, B_i(\boldsymbol{x}, x_4)]\,, \quad B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} F_{jk}(\boldsymbol{x}, x_4)\,, \tag{2.28}$$

$$\mathcal{T}(x_4) = \int d^3\boldsymbol{x}\ \mathrm{tr}[E_i(\boldsymbol{x}, x_4)\, E_i(\boldsymbol{x}, x_4)]\,, \quad E_i = \partial_4\, A_i\,. \tag{2.29}$$

Die Höhe der Potentialbarriere und damit die Masse der sphaleronartigen Konfiguration in der QCD läßt sich aus der potentiellen Energie $\mathcal{V}$ des Instantons an dem Punkt mit der Windungszahl $n + \frac{1}{2}$ bestimmen (siehe Abbildung 2.1). Betrachtet man Gleichung (2.20), so liegt nahe, daß dieser Punkt bei $x_4 = 0$ erreicht wird; was sich bestätigt, wenn man das Feld (2.21) in die

Definition der Windungszahl (2.14) einsetzt (siehe auch Refn. [29, 57]). Damit ist die Höhe der Potentialbarriere [29, 57]:

$$M_{\mathrm{Sph}}(\rho) = \mathcal{V}(x_4 = 0) = \frac{1}{g_s^2} \int d^3\boldsymbol{x} \left. \frac{24\,\rho^2}{(x_4^2 + \boldsymbol{x}^2 + \rho^2)^4} \right|_{x_4=0} = \frac{4\pi}{g_s^2} \int dr\; r^2 \frac{24\,\rho^2}{(r^2+\rho^2)^4} = \frac{3\,\pi}{4} \frac{1}{\alpha_s\,\rho}\,. \tag{2.30}$$

Anders als in der elektroschwachen Theorie hängt die Masse von einer kollektiven Koordinate ρ ab, über die zu integrieren ist. Der bei hohen Impulsüberträgen gültige Sattelpunktswert für ρ führte auf eine unabhängige Vorhersage von Gleichung (2.30) [20] (siehe Abschnitt 3.3.2).

Das aufgezeigte Bild der Energieabhängigkeit des Tunnelprozesses legt es nahe, daß in der Hochenergiestreuung der Sphaleronkonfiguration und damit der Skala M_{Sph} eine entscheidende Bedeutung zukommt.

2.1.3 Klassisches Instantonfeld in der $\mathsf{SU(N_c)}$

In diesem Abschnitt wird aus dem I-Feld (2.18) der $\mathsf{SU(2)}$ das entsprechende Feld der $\mathsf{SU(N_c)}$ konstruiert und deren Abhängigkeit von den kollektiven Koordinaten diskutiert. In der Standardprozedur der Erweiterung auf die $\mathsf{SU(N_c)}$ wird die das Instanton (2.18) darstellende 2×2-Matrix in die linke obere Ecke einer ansonsten verschwindenden $N_c \times N_c$-Matrix eingebettet. Um eine Invarianz der Orientierung der Instantonen im Farbraum sicher zu stellen, muß diese Einbettung einer allgemeinen, konstanten (d.h. nicht x-abhängigen) $\mathsf{SU(N_c)}$-Transformation unterzogen werden:

$$\left(A_\mu^{N_c\times N_c}\right)^i_{\;j} = (U)^i_{\;k} \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\left(A_\mu^{2\times 2}\right)^\alpha_{\;\beta}} & 0 & \cdots & 0 \\ & & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{0 \;\cdots\; 0}_{(N_c-2)\times(N_c-2)}} \end{pmatrix}^{k}_{\;l} \left(U^\dagger\right)^l_{\;j} = (U)^i_{\;\alpha} \left(A_\mu^{2\times 2}\right)^\alpha_{\;\beta} \left(U^\dagger\right)^\beta_{\;j}\,. \tag{2.31}$$

Die griechischen Indizes laufen von 1 bis 2 und die lateinischen von 1 bis N_c. Mit dieser Einbettung folgt aus Gleichung (2.18) das I-Feld in singulärer Eichung und Euklidischer Raumzeit in der $\mathsf{SU(N_c)}$:

$$\left[A_\mu^{(I)}(x)\right]^i_{\;j} = -\frac{i}{g_s} \frac{(U)^i_{\;\alpha} \left[\sigma_\mu \overline{x} - x\overline{\sigma}_\mu\right]^\alpha_{\;\beta} \left(U^\dagger\right)^\beta_{\;j}}{2} \frac{\rho^2}{x^2\,(x^2+\rho^2)}\,. \tag{2.32}$$

Die Feldkonfiguration hängt von verschiedenen kollektiven Koordinaten ab. Die klassische Wirkung S_{Euk} (2.1) ist von ihnen unabhängig. Wie zuvor schon am Beispiel von ρ explizit demonstriert, treten sie als Integrationskonstanten bei der Lösung von Differentialgleichungen auf. Die Observablen dürfen von ihnen nicht abhängen, so daß stets über sie integriert werden muß, um die Symmetrien der Theorie nicht zu verletzen.

In der Einführung wurde bereits die Instantongröße ρ diskutiert, die die Skalenunabhängigkeit der QCD reflektiert. Weiter ist die Wirkung unabhängig von der Position des I-Zentrums z, was die Translationsinvarianz zum Ausdruck bringt; das I-Feld für ein beliebiges z ergibt sich durch

Verschiebung des Argumentes x in (2.32). Die Matrizen U^i_α beschreiben die nichttriviale Kopplung zwischen Spinindizes $\alpha = 1, 2$ und Farbindizes $k = 1, 2, \ldots, N_c$. Die Anzahl der Parameter, mit denen sich die Matrizen U^i_α beschreiben lassen, ist $4\,N_c - 5$ (siehe dazu Ref. [58]). Damit ist die Gesamtzahl der kollektiven Koordinaten [55]:

$$4\ (\text{Instantonzentrum}) + 1\ (\text{Instantongröße}) + (4\,N_c - 5)\ (\text{Orientierungen}) = 4\,N_c\,. \tag{2.33}$$

Wie bereits erwähnt, existiert neben der Instantonlösung auch eine Antiinstantonlösung ($\bar{I}$), die die Windungszahl des Vakuums um -1 ändert. Explizit ist dieses $\bar{I}$-Feld in Euklidischer Raumzeit und singulärer Eichung:

$$\left[A^{(\bar{I})}_\mu(x)\right]^i_j = -\frac{i}{g_s}\,\frac{\left(\overline{U}\right)^{i\,\dot\alpha}\left[\overline{\sigma}_\mu x - \overline{x}\sigma_\mu\right]^{\dot\beta}_{\dot\alpha}\left(\overline{U}^\dagger\right)_{\dot\beta\,j}}{2}\,\frac{\overline{\rho}^2}{x^2\,(x^2+\overline{\rho}^2)}\,. \tag{2.34}$$

Die bisher beschriebenen Instantonen bzw. Antiinstantonen beschreiben Tunnelübergänge zwischen benachbarten Vakua; d.h. $|Q| = 1$. Es wurden aber auch Feldkonfiguration betrachtet, die mit größeren Änderungen der Windungszahl einhergehen und die Euklidische Wirkung minimieren [59, 60]. Nach Gleichung (2.26) sind diese aber weit stärker als die üblichen I-Lösungen unterdrückt, so daß sie in dieser Arbeit vernachlässigt werden.

An dieser Stelle soll, um die wichtige analytische Fortsetzung zu demonstrieren, das Euklidische I-Feld (2.32) in die Minkowski Raumzeit fortgesetzt werden, was durch die im Anhang A beschriebene Wickrotation möglich ist. Da das Feld (2.32) nur von x^2 abhängt, genügt es, die Ersetzung (A.23) durchzuführen[7]:

$$\left[A^{(I)}_\mu(x)\right]_{\text{Min}} = \frac{i}{g_s}\,\frac{U\left[\sigma_\mu\bar{x} - x\bar{\sigma}_\mu\right]U^\dagger}{2}\,\frac{\rho^2}{(-x^2+i\,\epsilon)\,(-x^2+i\,\epsilon+\rho^2)}\,, \tag{2.35}$$

wobei $\epsilon > 0$ ist und der Grenzwert $\epsilon \to 0$ durchzuführen ist. Das Vorzeichen von ϵ bestimmt die Lage der Pole. Es ergibt sich daraus, daß die Felder (2.32) und (2.35) nach einer Fouriertransformation in den Impulsraum ebenfalls durch analytische Fortsetzung (A.23) ineinander übergehen müssen.

2.2 Nullmoden und die axiale Anomalie

Bisher wurde eine Eichtheorie ohne Fermionen diskutiert. Nimmt man leichte Fermionen hinzu, treten Prozesse auf, die I-Prozesse beobachtbar machen. Die Observable ist die chirale Ladung Q_5, die in Beziehung zu der nach Adler, Bell und Jackiw benannten ABJ-Anomalie [61, 62] steht. Der Zusammenhang führt in der QCD dazu, daß I-induzierte Prozesse die in der üblichen Störungstheorie erhaltene Chiralität verletzen.

Die ABJ-Anomalie tritt in der Störungstheorie bei der Behandlung von Dreiecksgraphen auf. Es zeigt sich, daß die externen Vektor- und Axialvektorströme sich nicht regularisieren lassen, ohne mindestens den Erhalt eines Stromes zu verletzen. Für die Divergenz des axialen Stroms

[7] Beim Übergang müssen auch die Euklidischen σ^E_μ-Matrizen (A.8) durch die Minkowskischen σ^M_μ-Matrizen (A.17) ersetzt werden.

j^5 und des Feldstärketensors des Eichfeldes besteht folgender Zusammenhang (siehe z.B. den Übersichtsartikel [63]):

$$\partial^\mu j^5_\mu = 2\, n_f \, \frac{g^2}{8\,\pi^2} \, \frac{1}{2} \, \mathrm{tr} \left[F_{\mu\nu} \, \widetilde{F}_{\mu\nu} \right] \,, \tag{2.36}$$

der auch in höherer Ordnung Störungstheorie gilt. Dabei ist n_f die Anzahl der beteiligten leichten Quarkflavours. Der axiale Strom ist:[8]

$$j^5_\mu = \sum_{i=1}^{n_f} \overline{\psi}_i \gamma_\mu \gamma^5 \psi^i \,. \tag{2.37}$$

Der Dirac-Spinor ψ läßt sich in einen links- und einen rechtshändige Anteil zerlegen, die durch Weyl-Spinoren charakterisiert werden:[9]

$$\psi = \begin{pmatrix} \kappa_{\dot\alpha} \\ \phi^\alpha \end{pmatrix}, \qquad \overline{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = \left(\overline{\phi}^{\dot\alpha}, \overline{\kappa}_\alpha \right) . \tag{2.38}$$

Die Matrizen $\frac{1 \pm \gamma^5}{2}$ projizieren ψ auf die rechts- bzw. linkshändigen Zustände $\begin{pmatrix} \kappa_{\dot\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ \phi^\alpha \end{pmatrix}$, die Eigenzustände von γ_5 zum Eigenwert 1 bzw. -1 sind. Damit zerfällt der axiale Strom in einen rechts- und einen linkshändigen Anteil,

$$j^5_\mu = j^R_\mu - j^L_\mu \,, \tag{2.39}$$

$$j^R_\mu = \sum_{i=1}^{n_f} \overline{\psi}_i \, \gamma^\mu \frac{1+\gamma^5}{2} \psi_i = \sum_{i=1}^{n_f} \overline{\kappa}_{i\,\alpha} (\sigma_\mu)^{\alpha\dot\alpha} \kappa_{i\,\dot\alpha} \,, \tag{2.40}$$

$$j^L_\mu = \sum_{i=1}^{n_f} \overline{\psi}_i \, \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} \psi_i = \sum_{i=1}^{n_f} \overline{\phi}^{\dot\alpha}_i (\overline{\sigma}_\mu)_{\dot\alpha\alpha} \phi^\alpha_i \,, \tag{2.41}$$

während der Strom $j_\mu = \sum_{i=1}^{n_f} \overline{\psi}_i \gamma_\mu \psi^i = j^R_\mu + j^L_\mu$ ist.

Die Änderung des integrierten chiralen Stroms Q_5 ist mit der topologischen Ladung Q verbunden, die man durch Integration der rechten Seite der Gleichung (2.36) erhält. Aus der linken Seite von (2.36) folgt mit dem Gaußschen Satz die Änderung der chiralen Ladung

$$\begin{aligned} \Delta Q_5 = Q_5(t=+\infty) - Q_5(t=-\infty) &= \int d^4x \; \partial^\mu \, j^5_\mu \\ &= 2\, n_f \, \frac{g^2}{8\,\pi^2} \int d^4x \; \frac{1}{2} \, \mathrm{tr} \left[F_{\mu\nu} \, \widetilde{F}_{\mu\nu} \right] = 2\, n_f \, Q \,. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Betrachtet man die Zerlegung (2.39), folgt aus der Erhaltung des Stroms j_μ, daß $n_f\, Q$ rechtshändige Ladungen erzeugt und $n_f\, Q$ linkshändige Ladungen vernichtet werden müssen. Für ein Instanton ist $Q = 1$, so daß ein Instanton die Chiralität um $2\, n_f$ ändert.

[8] Die Definition der Händigkeit bezieht sich auf $\gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ in der Minkowski Raumzeit siehe Anhang A.4 (siehe auch [64] für die Definition der Händigkeit).

[9] Die Bedeutung der gepunkteten und ungepunkteten Indizes findet sich im Anhang A.2.

Eine Entwicklung des Propagators, der die Veränderung der Ströme dynamisch beschreibt, im Hintergrund des Instantons nach Eigenmoden des Diracoperators

$$\not{D} = \not{\partial}\, \mathbb{1} - i\, g_s\, \not{A}^{(I)} \tag{2.43}$$

zeigt, daß zur Änderung des chiralen Stroms nur Eigenvektoren mit verschwindenden Eigenwerten beitragen. Die Beiträge der Eigenvektoren mit nichtverschwindenen Eigenwerten heben sich gegenseitig weg, da mit $\lambda \neq 0$ auch $-\lambda$ ein Eigenwert ist [54]. Somit sind die n_f durch das Instanton erzeugten bzw. vernichteten rechts- und linkshändige Ladungen mit den Nullmoden des Diracoperator (2.43) assoziiert. Dies ist ein Spezialfall des nach Atiyah und Singer benannten Indextheorems [65]. Nach diesem Theorem entspricht die Differenz der Anzahl von rechts- und linkshändigen Nullmoden, die ein Diracoperator besitzt, der topologischen Quantenzahl Q (2.8) des in (2.43) eingehenden Feldes.

Die Nullmoden des Instantons lassen sich analytisch bestimmen, indem man das bekannte I-Feld (2.32) in den Diracoperator einsetzt und die Eigenzustände zum Eigenwert 0 bestimmt. Es ergeben sich Eigenzustände des Diracoperators (2.43) einer bestimmten Händigkeit mit den Nullmoden in der Weyldarstellung [17]:

$$\left(\kappa^{(I)}(x)\right)^k_{\dot\alpha} = \frac{1}{\pi}\, \epsilon^{\alpha\beta}\, (U)^k_\beta\, \overline{x}_{\dot\alpha\alpha}\, \frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x^2}\, \left(x^2+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,, \tag{2.44}$$

$$\left(\overline{\phi}^{(I)}(x)\right)^{\dot\alpha}_k = \frac{1}{\pi}\, \epsilon_{\beta\alpha}\, (U^\dagger)^\beta_k\, x^{\alpha\dot\alpha}\, \frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x^2}\, \left(x^2+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,. \tag{2.45}$$

Ein zur Änderung der Windungszahl führender I-Tunnelübergang mit $Q = 1$ ist also stets mit Nullmoden einer bestimmten Händigkeit verknüpft, was zur Nichterhaltung des chiralen Stroms führt.

In realen Prozessen verteilen sich die Nullmoden ungleichmäßig auf den Anfangs- und Endzustand. So wird eine einfallende, linkshändige Nullmode, die ein Quark repräsentiert, durch das Instanton vernichtet. Gleichzeitig erzeugt das Instanton $2\,n_f - 1$ rechtshändige Nullmoden, die n_f Quarks und $n_f - 1$ Antiquarks beschreiben; insgesamt ist dann $\Delta\, Q_5 = 2\, n_f$. Instantonen sind auch in der elektroschwachen Theorie mit Anomalien verknüpft, die dort zur $(B{+}L)$-Verletzung führen. Typische Beispiele für Prozesse in elektroschwacher Theorie und masseloser QCD sind [20, 66]:

$$q + q \to 7\,\overline{q} + 3\,\overline{l}\,, \qquad \Delta(B+L) = -2\, n_g\, Q = -2\, n_g\,, \tag{2.46}$$

$$\gamma^* + g \to n_f\, (\overline{q}_R + q_R)\,, \qquad \Delta Q_5 = +2\, n_f\, Q = +2\, n_f\,. \tag{2.47}$$

Hierbei ist n_g die Anzahl der Generationen im Standardmodell. Abbildung 2.2 zeigt die beiden Prozesse. Diese Arbeit widmet sich Instantonen in der QCD. Übersichtsartikel über Instantonen in der elektroschwachen Theorie sind [57, 67, 68]. Trotzdem muß die wechselseitige Beziehung zwischen Instantonen in der elektroschwachen Theorie und in der QCD hervorgehoben werden. So wurden die hier genutzten Gitterdaten für das QCD-Vakuum auf die elektroschwache Situation übertragen, um Abschätzungen über den Gültigkeitsbereich der verläßlichen Vorhersagen der elektroschwachen I-Störungstheorie zu machen [69].

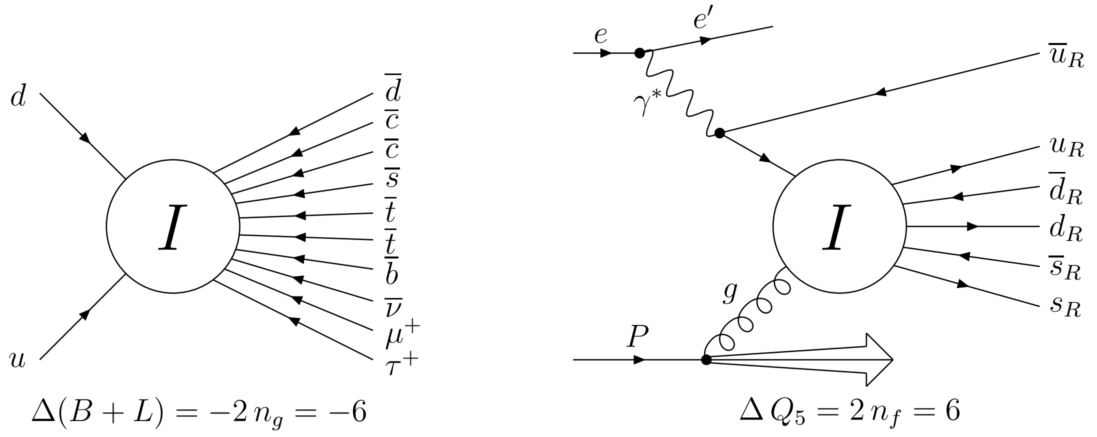


Abbildung 2.2: Anomale I-induzierte Prozesse in elektroschwacher Theorie und masseloser QCD [20, 66]

2.3 Die Tunnelamplitude

Nun führen wir die I-Größenverteilung ein. Der Teil gliedert sich in drei Abschnitte:

- Die störungstheoretische I-Größenverteilung.
- Vergleich der störungstheoretischen I-Größenverteilung mit einer Simulation des QCD-Vakuums auf dem Gitter, wodurch sich der Gültigkeitsbereich der Störungstheorie abschätzen läßt und überdies eine Vorhersage der Größe der Instantonen im nichtperturbativen Vakuum möglich ist.
- Physikalische Erklärungsversuche für die Abweichung von Störungstheorie und Gittersimulation.

2.3.1 Störungstheoretische Tunnelamplitude

An dieser Stelle wird die störungstheoretische Vorhersage der I-Größenverteilung besprochen, die die Wahrscheinlichkeit für einen I-induzierten Tunnelprozeß ohne äußere Quellen beschreibt. Die erste Vorhersage der Wahrscheinlichkeit liefert in der sogenannte exponentiellen Näherung bereits Gleichung (2.26). Um über dieses rein klassische Ergebnis hinauszukommen und den Vorfaktor zu bestimmen, müssen Quantenkorrekturen berücksichtigt werden.

In Einschleifenordnung wurde diese Rechnung zum ersten Mal von 't Hooft [17] für die $\mathsf{SU}(2)$-Gruppe und von Bernard [58] für die $\mathsf{SU}(\mathsf{N_c})$-Gruppe durchgeführt. Der Ausgangspunkt der Rechnung ist dabei die Zustandssumme für ein einzelnes Instanton (siehe z.B. den Übersichtsartikel [55]):

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}A_\mu \, \exp\left\{-S_{\text{Euk}}\right\} . \tag{2.48}$$

Das allgemeine Feld A_μ in Gleichung (2.48) wird um das klassische Instantonfeld $A_\mu^{(I)}(x,\xi)$ entwickelt. Dabei bezeichnet ξ die $4\,N_c$ kollektiven Koordinaten, von denen das Instantonfeld aber nicht die klassische Wirkung abhängt. Mit der Quantenfluktuation $a_\mu(x)$ ist dann:

$$A_\mu(x,\xi) = A_\mu^{(I),\,\text{klas}}(x,\xi) + a_\mu(x) \, . \tag{2.49}$$

Nun setzt man die Entwicklung (2.49) in die Wirkung ein und berechnet die führende nichtverschwindende Ordnung in der Quantenfluktuation a_μ. Die Wirkung ist (siehe (2.1) und (2.25)):

$$S_{\text{Euk}} = \frac{1}{2} \int d^4x \; \text{tr} \left[F_{\mu\nu} \; F_{\mu\nu} \right] = \underbrace{S_{\text{klas}}[A_\mu^{(I),\,\text{klass}}]}_{\frac{8\,\pi^2}{g_s^2}} + \mathcal{O}(a^2). \qquad (2.50)$$

Der lineare Term in a_μ verschwindet, da Instantonen die Euklidische Wirkung minimieren. Es folgt eine umfangreiche Rechnung, die verschiedene technische Schritte wie z.B. die Regularisierung der Tunnelamplitude umfaßt. Der daraus resultierende Beitrag zur normierten Zustandssumme und damit die Tunnelwahrscheinlichkeit in der QCD von Vakuum zu Vakuum ist [17, 58]:

$$\langle 0|0 \rangle^{(I)} = \frac{\mathcal{Z}_{1-\text{Instanton}}}{\mathcal{Z}_{\text{perturbativ}}} = \int d^4z \int dU \int d\rho \, D(\rho, \mu_r) \, . \qquad (2.51)$$

Bemerkenswert ist die enthaltene Integrationen über $4\,N_c$ kollektive Koordinaten. Diese rühren von der in der Zustandssumme (2.48) enthaltenen Integration über die $4\,N_c$ Nullmoden her. $D(\rho)$ ist die I-Größenverteilung. Sie ist einer der wichtigen Bestandteile des I-Kalküls und beschreibt die Wahrscheinlichkeit $n^{(I)}$, ein Instanton der Größe $(\rho \ldots \rho + d\rho)$ in einem Volumenelement d^4z zu finden:

$$D(\rho) = \frac{dn^I}{d\rho \, d^4z} \, . \qquad (2.52)$$

Die Dimension von $D(\rho)$ ist damit fm^{-5}.

Die Einschleifenresultate [17, 58] wurden in [48] dahingehend erweitert, daß die Renormierungsgruppeninvarianz auf Zweischleifenniveau realisiert ist: $\frac{1}{D} \frac{d\,D(\rho,\mu_r)}{d\,\log \mu_r} = \mathcal{O}(\alpha_s^2)$ ist. Die in dieser Arbeit benutzte störungstheoretische Form der I-Größenverteilung ist [48]:

$$D(\rho, \mu_r)_{I\text{-pert.}} = \frac{1}{\rho^5} \, d \left(\frac{2\pi}{\alpha_s(\mu_r)} \right)^{2\,N_c} \exp\left\{ -\frac{2\,\pi}{\alpha_s(\mu_r)} \right\} (\mu_r \, \rho)^b \qquad (2.53)$$

mit

$$b = \beta_0 \, \Delta_1 - \Delta_2, \qquad \Delta_1 = 1 + \frac{\beta_1}{\beta_0} \frac{\alpha_s(\mu_r)}{4\,\pi} \, , \qquad \Delta_2 = 4\,N_c \, \beta_0 \, \frac{\alpha_s(\mu_r)}{4\,\pi} \qquad (2.54)$$

und der Zweischleifenform der laufenden Kopplung $\alpha_s(\mu_r)$ an der Renormierungsskala μ_r:

$$\alpha_s(\mu_r) = \frac{4\,\pi}{\beta_0 \, \log\left(\frac{\mu_r^2}{\Lambda^2}\right)} \left[1 - \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \frac{\log\left(\log\left(\frac{\mu_r^2}{\Lambda^2}\right)\right)}{\log\left(\frac{\mu_r^2}{\Lambda^2}\right)} \right] . \qquad (2.55)$$

Die Modifikationen führen zu einer Änderung von b (in der Einschleifenform ist b einfach β_0) außerdem findet die Zweischleifenform der laufenden Kopplung $\alpha_s(\mu_r)$ Anwendung. Die Konstante d hingegen ist auch in [48] nur auf Einschleifenniveau bekannt. Der Parameter Λ ist die übliche Skala der QCD, die durch Messung der Kopplung bei einer bestimmten Skala (z.B. bei M_Z) fixiert wird. N_c bezeichnet die Anzahl der Farben und n_f die Anzahl der Flavours. Δ_1 und Δ_2

sind so definiert, daß sie auf Einschleifenniveau 1 bzw. 0 sind. Die aus der üblichen Störungstheorie vertrauten β-Koeffizienten sind:

$$\beta_0 = \frac{11}{3}\, N_c - \frac{2}{3}\, n_f, \tag{2.56}$$

$$\beta_1 = \frac{34}{3}\, N_c^2 - \left(\frac{13}{3}\, N_c - \frac{1}{N_c}\right) n_f. \tag{2.57}$$

Der Wert des Koeffizienten d in der I-Größenverteilung (2.53) hängt von n_f ab und ist überdies abhängig vom Renormierungsschema. Im $\overline{\text{MS}}$-Schema ist diese Konstante:

$$d = \frac{C_1}{(N_c - 1)!\,(N_c - 2)!}\, \exp\left\{-N_c\, C_2 + n_f\, C_3\right\}, \tag{2.58}$$

mit $C_1 = 0.466, C_2 = 1.54$ und $C_3 = 0.153$.

Es sei bemerkt, daß die Form (2.53) zu einer deutlichen Reduzierung der μ_r-Abhängigkeit führt. Aber schon in der einfachen Einschleifenform hebt sich die explizite μ_r-Abhängigkeit im Faktor $(\mu_r\, \rho)^{\beta_0}$ auf, da:

$$D(\rho)_{\text{1-loop}} \propto (\rho\mu_r)^{\beta_0}\, \exp\left\{-\frac{2\pi}{\alpha_s(\mu_r)}\right\} = (\rho\mu_r)^{\beta_0}\, \exp\left\{-\frac{\beta_0}{2}\, \log\left(\frac{\mu_r^2}{\Lambda^2}\right)\right\} = (\rho\Lambda)^{\beta_0} \tag{2.59}$$

ist. Somit hängt die I-Größenverteilung in führender Ordnung nur von ρ und Λ ab.

Eine wichtige Beobachtung ist, daß die Vakuumtunnelamplitude (2.51) im Infraroten für Instantonen mit großer Ausdehnung ρ für feste μ_r divergiert. Der Grund ist im wesentlichen der Zusammenbruch der „dilute-gas"-Näherung, die in der Herleitung der I-Größenverteilung eingeht. Sie verlangt, daß der I-Vakuum so dünn besetzt ist, daß die Instantonen nicht miteinander in Wechselwirkung treten, was für größer werdende ρ irgendwann nicht mehr der Fall sein kann.

Darüberhinaus müßten im Prinzip Tunnelübergänge zwischen anderen inäquivalenten Vakua (also I-Lösungen mit $|Q| \geq 2$) berücksichtigt werden. Wie aber bereits erläutert wurde, ist eine starke Unterdrückung dieser Prozesse zu erwarten. Arbeiten zur Bedeutung der Instantonen mit $Q \geq 2$ wurden in [70] zusammengefaßt.

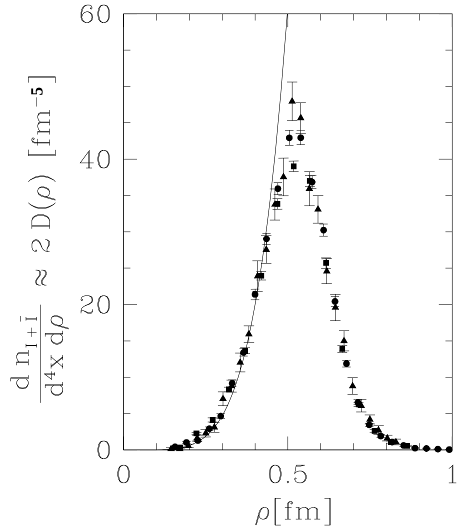
Anwendbar ist die dilute-gas-Näherung bei Anwesenheit einer harten Skala (in der tiefinelastischen Streuung ist die Skala die Virtualität Q^2). In diesem Fall werden Instantonen, die größer als $\propto \frac{1}{Q}$ sind[10], dynamisch unterdrückt [18, 71].

2.3.2 Gittersimulationen

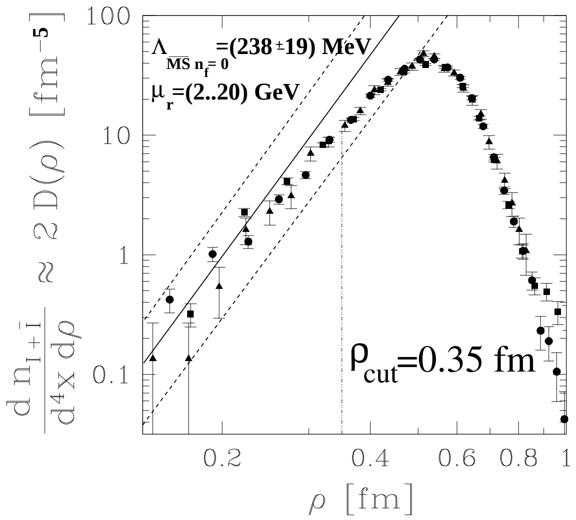
Einen neuen Zugang zur Lösung des Problem der IR-Divergenz bietet die Simulation des QCD-Vakuums auf dem Gitter. Als vollständige Simulation des Vakuums geht sie über die perturbative Form in (2.53) heraus. So führt die intrinsisch in der Gittersimulation enthaltende Wechselwirkung zwischen den Instantonen zur Unterdrückung großer Instantonen.

Eine Simulation der I-Größenverteilung $D(\rho)$ auf dem Gitter findet sich in [49]. Die Daten wurden in [22, 50] mit der störungstheoretischen Form von $D(\rho)$ (2.53) verglichen. Die Simulation umfaßt sowohl Instantonen als auch Antiinstantonen. Dies führt dazu, daß die simulierte Observable $\frac{dn^{I\bar{I}}}{d^4x\, d\rho}$ gleich $2\, D(\rho)$ ist.

[10] Tatsächlich treten, wie bereits in der Einleitung erläutert, mehrere Impulsskalen auf, die alle groß sein müssen.



2.3(a) Lineare Darstellung: $D(\rho)$ besitzt ein stark ausgeprägtes Maximum bei $\rho_{\text{peak}} \approx 0.53$ fm.



2.3(b) Logarithmischer Darstellung: Gute Übereinstimmung von $D(\rho)$ mit der störungstheoretischen Form (2.53) für $\rho \lesssim \rho_{\text{cut}} \approx 0.35$ fm

Abbildung 2.3: UKQCD Gitterdaten [22, 49, 50] der I-Größenverteilung für quenched QCD ($n_f = 0$). Man erkennt sowohl ein scharf ausgeprägtes Maximum bei $\rho_{\text{peak}} \approx 0.53$ fm als auch die parameterfreie Übereinstimmung mit der I-Störungstheorie [22, 50] für $\rho \lesssim 0.35$ fm. (Durchgezogene Linie entspricht Gleichung (2.53) mit 3-loop Ausdruck für α_s und $\Lambda^{(n_f=0)}_{\overline{\text{MS}}} = 238 \pm 19$ MeV [72]). Die gestrichelten Linien beschreiben das Band, das sich durch den Fehler von Λ und der Variation von $\mu_r = 2 \ldots 20$ GeV ergibt; dies demonstriert die weitgehende μ_r-Unabhängigkeit.

Der Vergleich (Abb. 2.3) läßt erkennen, daß die großen Instantonen relativ zur störungstheoretischen Erwartung (2.53) dramatisch unterdrückt sind und die Verteilung ein scharfes Maximum bei ρ_{peak} besitzt[11]. Die Position des Peaks ρ_{peak} kann als die entscheidende Längenskala verstanden werden, bei der die übliche I-Störungstheorie ziemlich schnell zusammen bricht. Es ist wichtig den physikalischen Mechanismus zu verstehen, der zu einer solch drastischen Änderung im Verhalten der Tunnelamplitude führt; dies wird im folgenden Abschnitt untersucht. Die Vorhersage der I-Störungstheorie hängt von Λ, μ_r und ρ ab. Aufgrund der Renormierungsgruppeninvarianz sollte die μ_r-Abhängigkeit in $D(\rho)_{I\text{-pert.}}$ (2.53) nur schwach sein. Um diese zu demonstrieren, wurde μ_r in einem breiten Bereich variiert. Abbildung 2.3 zeigt das dadurch entstehende Band, welches überdies den Fehler von Λ beschreibt. Da die Berechnung auf dem Gitter in der „quenched“ Näherung durchgeführt wurde, muß diese mit der störungstheoretischen Vorhersage für $n_f = 0$ verglichen werden. Aus Konsistenzgründen muß dann natürlich auch für Λ der Wert gewählt werden, der sich ohne aktive Flavour ergibt. Eine Simulation auf dem Gitter ergab [72]:

$$\Lambda^{(n_f=0)}_{\overline{\text{MS}}} = 238 \pm 19 \text{ MeV}. \tag{2.60}$$

Wählt man das sogenannte I-Schema, ist es möglich, $D(\rho)$ bis zum Maximum störungstheoretisch

[11]Neben den in Abbildung 2.3 angegeben statistischen Fehlern gibt es schwer abzuschätzende systematische Fehler, die mit dem sogenannten „Cooling“verknüpft sind, welches der Durchführung des Kontinuumgrenzwertes dient. Diese Fehler erklären Abweichungen der Position des Maximums in den Gittersimulationen von $D(\rho)$ in den Arbeiten [73, 74].

zu beschreiben. In diesen Schema ist $\mu_r = \frac{1.2}{\rho}$ [22].

Die Ergebnisse der Gittersimulation lassen sich explizit parametrisieren:

$$D(\rho)_{\text{Gitter}} = \frac{1}{2}\,\frac{(A\rho)^6}{1+(B\rho)^P}\,e^{-(C\rho)^2}\ \text{fm}^{-5} \tag{2.61}$$

mit den Parametern:

$$A = (0.20\ \text{fm})^{-1}\,, \qquad B = (0.59\ \text{fm})^{-1}\,, \qquad C = (0.40\ \text{fm})^{-1}\,, \qquad P = 12.4\,. \tag{2.62}$$

Offenbar spiegelt die Parametrisierung den Anstieg der I-Verteilung $D(\rho)$ mit ρ^{b-5} (siehe Gleichung (2.53)) wider, da für $n_f = 0$ in führender Ordnung $b = 11$ ist. Die Gauß-Funktion in der Parametrisierung beschreibt die Unterdrückung großer Instantonen und bestimmt im wesentlichen die Postion des I-Peaks.

Zusammenfassend seinen nochmals die zwei wesentlichen Erkenntnisse der Gittersimulation aufgelistet:

- Die störungstheoretische I-Verteilung $D(\rho)_{I\text{-pert.}}$ ist verläßlich für $\rho \lesssim \rho_{\text{cut}} \approx 0.35$ fm.
- Die I-Verteilung $D(\rho)$ besitzt ein scharfes Maximum bei $\rho_{\text{peak}} \approx 0.53$ fm.[12]

2.3.3 Tunnelamplitude für größere Instantonen

In diesem Abschnitt sollen physikalische Mechanismen vorgestellt werden, die zur Unterdrückung größerer Instantonen führen könnten.

Die Unterdrückung läßt sich durch klassische Wechselwirkungen der Instantonen untereinander oder durch die Wechselwirkung der Instantonen mit anderen klassischen Feldkonfigurationen verstehen [54]. Dies läßt sich auf die Arbeiten [75, 76] zurückführen. Dort wurde gezeigt, daß die klassische Wirkung eines Instantons in einem externen Feld proportional zu ρ^2 ist, was zur Unterdrückung der I-Dichte,

$$D(\rho) = D_0(\rho)\,e^{-c\,\rho^2}, \tag{2.63}$$

führt. $D_0(\rho)$ ist die störungstheoretische, IR-divergente I-Verteilung. Der Unterdrückungsfaktor c hängt von einer Kombination aus externem Feld und I-Feld ab. Dabei tragen nur externe Felder mit verschwindender topologischer Ladung bei [54]. Die Kombination der zwei Faktoren in (2.63) führt nun dazu, daß die I-Verteilung ein Maximum aufweist. Mit Hilfe des aus QCD-Summenregeln bestimmten Wertes für das Gluonkondensat [77] lassen sich die freien Parameter und damit die Größe des Instantons fixieren. In Ref. [77] wurde das divergente Integral über die I-Größe, das den I-Beitrag zum Gluonkondensat darstellt, durch die Einführung eines IR-Cutoffs regularisiert, der in direkten Zusammenhang zur tatsächlichen Größe des Instantons steht.

Die Theorie in der das I-Ensemble aus einzelnen Instantonen zusammengesetzt ist und ein Mechanismus dazu führt, daß die Instantonen eine feste endliche Größe aufweisen, bezeichnet man als I-Flüssigkeitsmodell. Im Gegensatz dazu steht das I-Gasmodell, in der die I-Größenverteilung

[12] Relevanter als $D(\rho)$ wird später die Verteilung $D(\rho)\rho^4$ sein, deren Maximum bei 0.59 fm liegt. Die auftretenden Observablen werden weitesgehend vom Erwartungswert $\langle\rho\rangle = \frac{\int_0^\infty d\rho\,\rho\,D(\rho)\,\rho^4}{\int_0^\infty d\rho\,D(\rho)\,\rho^4} \approx 0.60$ fm bestimmt.

vollständig durch die Störungstheorie beschrieben wird. Dieses Modell führt nur dann zu IR-endlichen Resultaten, wenn ein äußerer Einfluß (wie im Falle der tiefinelastischen Streuung eine harte Skala) Beiträge von großen Instantonen dynamisch unterdrückt.

Ein anderer Zugang zum Verständnis großer Instantonen wurde in [30] untersucht. Hierbei fußt die Unterdrückung nicht auf einer Wechselwirkung, die nicht durch die Störungstheorie beschrieben wird, sondern auf einer Symmetrie. Eine phänomenologische Analyse der auf dem Gitter gemessenen I-Verteilung zeigte, daß die Daten innerhalb der Fehler einer Inversionssymetrie

$$\rho \Leftrightarrow \frac{\rho_{\mathrm{peak}}^2}{\rho} \tag{2.64}$$

genügen. Es ist möglich, daß diese Inversionssymetrie seine Ursache in der lange bekannten konformen Invarianz des gesamten klassischen I-Sektor [56] hat. Wäre dies der Fall, so würde eine konforme Inversionssymetrie ($x_\mu \to x'_\mu = \frac{\rho_{\mathrm{peak}}^2}{x^2} x_\mu$) Zugang zum nichtperturbativen Bereich großer Instantonen gewähren. Während man sehr leicht zeigen kann, daß die klassische Wirkung in sich selbst übergeht, wenn man das I-Feld einer Inversion unterzieht, ist noch nicht abschließend geklärt, wie diese Inversion sich auf die Quantenfluktuation auswirkt. Bei der Definiton der I-Verteilung $D(\rho)$ spielt aber gerade deren Ausintegration die entscheidende Rolle.

2.4 Streuprozesse in der Instanton-Störungstheorie

In diesem Abschnitt werden Grundzüge der I-Störungstheorie vorgestellt, die zusammen mit der I-Größenverteilung $D(\rho)$ die Grundlage bei der Berechnung der Wirkungsquerschnitte von I-induzierten Prozessen bildet.

2.4.1 Übergangsamplitude in semiklassischer Näherung

Eine allgemeine Definition der Störungstheorie im Hintergrund eines Instantons findet sich in [78]; dort wird auch die Renormierbarkeit der Theorie bewiesen. In semiklassischer Näherung ähneln die Berechnungen einer Streuamplitude im I-Hintergrund, den Ausführungen im Abschnitt 2.3.1, in dem die Grundzüge der Berechnung der störungstheoretischen I-Größenverteilung skizziert wurden [17]. Der Ausgangspunkt ist die Gleichung (2.48) entsprechende Zustandssumme bei Gegenwart von externen Feldern (siehe [78] oder auch den Übersichtartikel [55]):

$$\mathcal{Z}(j_\mu) = \int \mathcal{D}a_\mu \, \exp\left\{-S_{\mathrm{Euk}}\left[A_\mu^{(I),\,\mathrm{klas}}(x,\xi) + a_\mu(x), j_\mu\, a_\mu(x)\right]\right\} , \tag{2.65}$$

wobei hier die Entwicklung (2.49) um das klassische Instantonfeld eingesetzt wurde.

Im Abschnitt 2.2 wurde dargelegt, daß ein chiralitätsverletzender, I-induzierter Prozeß mit $2\,n_f$ Quarks im Anfangs- und Endzustand verknüpft ist, die durch Nullmoden des Dirac-Operators beschrieben werden. In einem typischen Prozeß befindet sich ein linkshändiges Quark im Anfangs- und $2\,n_f - 1$ rechtshändige Quarks im Endzustand:

$$q_L(q') + g(p) \to (n_f - 1)\,\overline{q}_R + n_f\, q_R + n_g\, g\,. \tag{2.66}$$

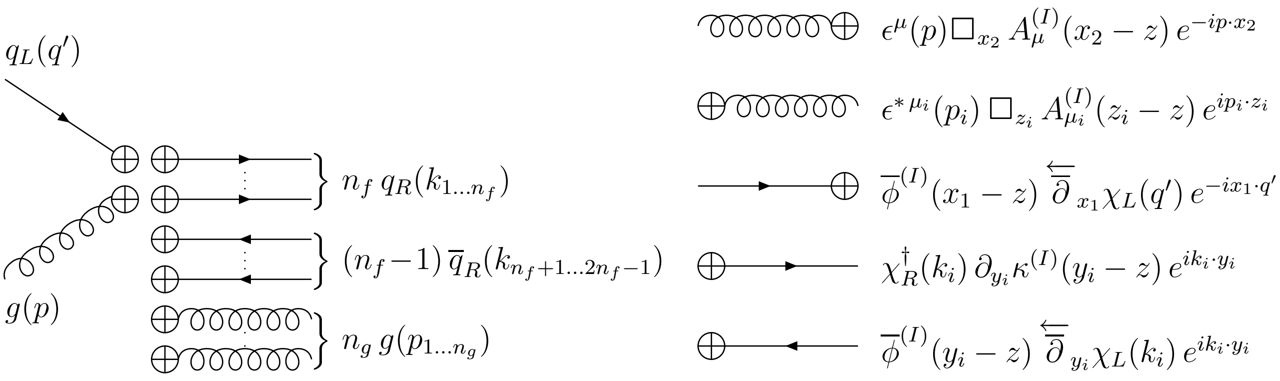


Abbildung 2.4: Streuung eines virtuellen Quarks an einen Gluon mit Chiralitätsverletzung $\Delta Q_5 = 2\, n_f$

Das damit verknüpfte Pfadintegral (2.65) läßt sich mit der im Abschnitt 2.3.1 beschriebenen Quantisierung im Vakuum auswerten: Der Gleichung (2.49) folgend werden die Quark- und Gluonoperatoren mit den klassischen Eichfeldern aus Abschnitt 2.1.3 ersetzt. Die klassischen Felder sind für die Quarks die Nullmoden und für die Gluonen die I-Eichfelder. Die Integration über die Quantenfluktuation in Richtung der Nullmoden führt wie in der Vakuumtunnelamplitude (2.51) auf eine Integration über die kollektiven Koordinaten und auch hier tritt die I-Größenverteilung auf.

Abbildung 2.4 illustriert die in semiklassischer Näherung auftretenden Beiträge zum Prozeß (2.66). In der Quantenfeldtheorie erlaubt der Zusammenhang zwischen Green-Funktion und S-Matrix die Berechnung der Übergangsamplitude T für einen gegebenen Streuprozeß. Sie ist die Fouriertransformierte der zeitgeordneten Produkte, wobei ausgehende Teilchen LSZ-amputiert werden müssen [18, 20]:

$$\begin{aligned}
T = & \int d^4z \int dU \int_0^\infty d\rho\, D(\rho) \int d^4x_1\, d^4x_2\, d^4z_1 \ldots d^4z_{n_g}\, d^4y_1 \ldots d^4y_{2n_f-1} \\
& \times \exp\left\{ i \left(\sum_{i=1}^{2\,n_f-1} k_i \cdot y_i + \sum_{i=1}^{n_g} p_i \cdot z_i - q' \cdot x_1 - p \cdot x_2 \right) \right\} \\
& \times \epsilon^\mu(p)\Box_{x_2}\, A_\mu^{(I)}(x_2 - z) \left\{ \prod_{i=1}^{n_g} \epsilon^{*\,\mu_i}(p_i)\Box_{z_i}\, A_{\mu_i}^{(I)}(z_i - z) \right\} \left[\overline{\phi}^{(I)}(x_1 - z)\, \overleftarrow{\overline{\partial}}_{x_1} \right] \chi_L(q') \\
& \times \left\{ \prod_{i=1}^{n_f} \chi_R^\dagger(k_i)\, \left[\partial_{y_i}\kappa^{(I)}(y_i - z) \right] \right\} \left\{ \prod_{i=n_f+1}^{2n_f-1} \left[\overline{\phi}^{(I)}(y_i - z)\, \overleftarrow{\overline{\partial}}_{y_i} \right] \chi_L(k_i) \right\} ,
\end{aligned} \tag{2.67}$$

wobei die Weylspinoren χ_L und χ_R die Quarks einer bestimmten Händigkeit beschreiben (siehe Anhang A.3) und die freien Gluonen mit jeweils einen Polarisationsvektor ϵ^μ verknüpft sind. Weylspinoren und Polarisationsvektoren sind dabei Teil der LSZ-Amputation.

Die (2.67) zugrunde liegende semiklassische Näherung verlangt neben einer kleinen Kopplung α_s nicht miteinander wechselwirkende Instantonen. Dies ist realisiert, wenn das I-Vakuum nicht zu dicht ist (dilute-gas-Näherung) bzw. die Instantonen nicht zu groß sind. Wird die Wechselwirkung zu stark, ist es nicht mehr sinnvoll, eine Entwicklung um Eininstantonfelder durchzuführen. Der

Gültigkeitsbereich der Näherung wird in dieser Arbeit durch den Gebrauch der auf dem Gitter simulierten I-Größenverteilung erweitert, da in ihr große Instantonen unterdrückt sind.

Externe Teilchen

In Abbildung 2.4 sind die ein- und auslaufenden Quarks, Antiquarks bzw. Gluonen den entsprechenden LSZ-amputierten und fouriertransformierten Feldern zugeordnet. Die so transformierten Felder, die in der Übergangsamplitude (2.67) auftreten, wurden in [18] berechnet und sollen hier vorgestellt werden. Mit der Fouriertransformierten $A_\mu^{(I)}(p)$ (B.2) ist die LSZ-Amputation des Instantons $A_\mu^{(I)}$ in Euklidischer Raumzeit:[13]

$$\lim_{p^2\to 0} \epsilon^\mu\, p^2\, \mathrm{tr}\left[\lambda^a\, A_\mu^{(I)}(p)\right] = \frac{2\pi^2}{g_s}\,\rho^2\, \frac{\mathrm{tr}\left[\lambda^a\, U(p\,\overline{\epsilon} - \epsilon\,\overline{p})U^\dagger\right]}{2}\; e^{-ip\cdot z}\,. \tag{2.68}$$

Die LSZ-Amputationen für die Quark-Nullmoden sind (siehe die Gleichungen (B.3) und (B.4) für die Fouriertransformationen):

$$\lim_{k^2\to 0} \chi^\dagger_{R\,\alpha}(k)\,(ik)^{\alpha\dot\alpha}\,\kappa_{\dot\alpha}^{(I)\,i}(-k) = -2\pi\,\rho^{3/2}\,\chi^\dagger_{R\,\alpha}(k)\,\epsilon^{\alpha\beta}\,U^i_\beta\, e^{ik\cdot z}\,, \tag{2.69}$$

$$\lim_{k^2\to 0} \overline{\phi}_i^{(I)\,\dot\alpha}(-k)\,(-i\overline{k})_{\dot\alpha\beta}\,\chi_L^\beta(k) = +2\pi\,\rho^{3/2}\,(U^\dagger)_i^\alpha\,\epsilon_{\alpha\beta}\,\chi_L^\beta(k)\, e^{ik\cdot z}\,. \tag{2.70}$$

Photonvertex und Quarkpropagator

Nach der Streuung eines virtuellen Quarks an einem Gluon, wollen wir nun die Photon-Gluon-Streuung beschreiben. Für den in der tiefinelastischen Streuung im I-Hintergrund relevanten Prozeß besteht mit (2.66) folgender Zusammenhang:

$$\gamma^* + g \to \overline{q}_R + q_L + g \to \overline{q}_R + (n_f - 1)\,\overline{q}_R + n_f\, q_R + n_g\, g\,. \tag{2.71}$$

Wie (2.66) ändert dieser Prozeß die Chiralität um $2\,n_f$. Dazu darf das rechtshändige Antiquark seine Händigkeit nicht ändern. Höhere Ordnungen in der Quantenfluktuationen (2.49) umfassen Propagatoren der Quarks und Gluonen im Hintergrund eines Instantons. So wird bei der Berechnung der I-induzierten $\gamma^* g$-Streuung in [18, 19] der zu den Nullmoden orthogonale Quarkpropagator $S_\mu^{(I)}(x,y)$ im I-Hintergrund mit berücksichtigt [79]:

$$\begin{aligned} S_\mu^{(I)}(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{\Pi_x\,\Pi_y}}\left[S^{(0)}(x-y)\left(1+\rho^2\,\frac{\left[U\,x\overline{y}\,U^\dagger\right]}{x^2\,y^2}\right) + \frac{\rho^2\,\sigma_\mu}{4\,\pi^2}\,\frac{\left[U\,x(\overline{x}-\overline{y})\sigma_\mu\overline{y}\,U^\dagger\right]}{x^2\,(x-y)^2\,y^4\,\Pi_y}\right], \\ \overline{S}_\mu^{(I)}(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{\Pi_x\,\Pi_y}}\left[\overline{S}^{(0)}(x-y)\left(1+\rho^2\,\frac{\left[U\,x\overline{y}\,U^\dagger\right]}{x^2\,y^2}\right) + \frac{\rho^2\,\overline{\sigma}_\mu}{4\,\pi^2}\,\frac{\left[U\,x\overline{\sigma}_\mu(x-y)\overline{y}\,U^\dagger\right]}{\Pi_x\,x^4\,(x-y)^2\,y^2}\right], \end{aligned} \tag{2.72}$$

[13] Der zur LSZ-Amputation im Ortsraum gehörende Operator $\Box_x$ übersetzt sich nach der Fouriertransformation direkt in den Faktor p^2. Für die Nullmoden gilt entsprechender Zusammenhang für $\partial_x^{\alpha\dot\alpha}$ und $i\,k^{\alpha\dot\alpha}$. Der Ursprung des Instantons befindet sich hier bei z. Mit der Definition der λ^a-Matrizen aus Abschnitt A.1 ist $\left(A_\mu^{(I)}\right)^a = \mathrm{tr}[\lambda^a\, A_\mu^{(I)}]$.

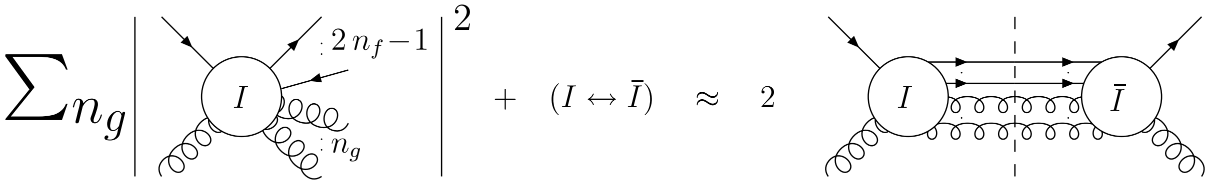


Abbildung 2.5: Das optische Theorem für die I-induzierte $q^*\, g$-Streuung [19].

mit den Abkürzungen $\Pi_x = 1 + \frac{\rho^2}{x^2}$ und $\Pi_y = 1 + \frac{\rho^2}{y^2}$ sowie den freien Fermionpropagator

$$S^{(0)}_\mu(x) = \frac{x_\mu}{2\,\pi^2\,x^4}\,. \tag{2.73}$$

Befinden sich sowohl Anfangs- als auch Endpunkt des Propagators weit entfernt vom I-Zentrum bei $z = 0$, so wird der Einfluß des Instantons hinfällig und der Propagator im I-Hintergrund nähert sich dem freien Propagator an [18]:

$$S^{(I)}(x,y) \xrightarrow{\frac{\rho^2}{x^2},\frac{\rho^2}{y^2} \ll 1} S^{(0)}(x-y) \qquad \text{bzw.} \qquad \overline{S}^{(I)}(x,y) \xrightarrow{\frac{\rho^2}{x^2},\frac{\rho^2}{y^2} \ll 1} \overline{S}^{(0)}(x-y)\,. \tag{2.74}$$

Der mit diesen Propagator einhergehende nichttriviale Photon-Quark-Vertex wurde eingehend untersucht [18] (siehe Abschnitt 3.2.1). Wie gefordert, ändert der Propagator (2.72) die Händigkeit des im I-Hintergrund propagierenden Quarks nicht. Dies wird dadurch sichergestellt, daß der Propagator senkrecht auf den Nullmoden steht. Die Entwicklung des Propagator nach Eigenzuständen des Dirac-Operators enthält also nur Eigenzustände zu nichtverschwindenen Eigenwerten [79].

Mit diesem Kapitel stehen uns nun alle Bausteine zur Verfügung, um die Berechnung der Wirkungsquerschnitte der I-induzierten Streuung in [18] für den einfachsten Prozeß (1.4) vorzustellen und diese dann mittels der Gitterinformationen über die I-Größenverteilung aus Abschnitt 2.3.2 zu kleineren Impulsen hin fortzusetzen.

2.4.2 Summierung der Endzustandsgluonen

Für die Berechnung des allgemeinen Prozesses (1.5) ist es notwendig die Endzustandsgluonen aufzusummieren. Dies geschieht im allgemeinen nicht durch direkte Quadrierung und Aufsummierung der Amplitude (2.67), sondern durch die Valley-Methode [80], die nun vorgestellt wird. Die angegebenen Formeln finden sich in [19, 50].

Valley-Methode

Anstatt die Amplituden zu quadrieren und über den Endzustand zu integrieren, wird der Wirkungsquerschnitt im Rahmen der Valley-Methode mittels des optischen Theorems berechnet [19,81,82]. Dieses verknüpft den Wirkungsquerschnitt mit dem Imaginärteil der Vorwärtsstreuamplitude. Abb. 2.5 verdeutlicht, daß die relevante Feldkonfiguration aus einen Instanton und einen Antiinstanton besteht. Ein erster naiver Ansatz, um das Instantoneichfeld der $I\bar{I}$-Konfiguration zu beschreiben, ist:

$$A^{(I)}_\mu(x,\rho,z,U) + A^{(\bar{I})}_\mu(x,\overline{\rho},\overline{z},\overline{U})\,. \tag{2.75}$$

Hierbei sind $z, \overline{z}, \rho$ und $\overline{\rho}$ die Zentren bzw. Größen des Instantons bzw. Antiinstantons. U und $\overline{U}$ sind deren Orientierungen im Farbraum (siehe die Gleichungen (2.32) und (2.34)). $R = z - \overline{z}$ ist damit der Abstand zwischen Instanton und Antiinstanton und wird sich als die entscheidende neue Variable erweisen, wenn der allgemeine I-Prozeß (1.5) berücksichtigt werden soll.

Der Summenansatz (2.75) ist nur dann eine exakte Lösung der Bewegungsgleichung (d.h. wie das I-Feld (2.32) ein lokales Minimum der Euklidischen Wirkung), wenn Instanton und Antiinstanton weit voneinander entfernt sind $R \gg \sqrt{\rho\,\overline{\rho}}$. In diesem Grenzfall wäre die Tunnelamplitude durch das Produkt $D(\rho)\,D(\overline{\rho})$ bestimmt.

Wenn (2.75) keine Lösung der Bewegungsgleichung ist, muß der Frage nachgegangen werden, welches Eichfeld $A^{(I\bar{I})}$ eine $I\bar{I}$-Konfiguration am besten beschreibt (siehe für die folgende Argumentation [54]). Dies wurde in [80] mittels der Valley- oder auch Stromlinienmethode beantwortet. Dabei startet man mit der für große R näherungsweise geltenden Lösung (2.75) der Bewegungsgleichung und läßt das System unter der Kraft evoluieren, die sich aus der Variation der Wirkung S ergibt [83]. Die die Evolution bestimmende Wirkung ist durch die Stromliniengleichung festgelegt:[14]

$$f(\tau)\,\frac{\partial\, A^{(I\bar{I})}}{\partial\, \tau_i} = \frac{\delta\, S^{(I\bar{I})}}{\delta\, A^{(I\bar{I})}}, \qquad \tau_i = \rho, \overline{\rho}, R, U\,, \tag{2.76}$$

mit einer matrixwertigen Funktion f. Die Lösung von (2.76) mit der Randbedingung (2.75) für $R^2 \to \infty$ ist dann das Valley-Feld, welches die $I\bar{I}$-Konfiguration beschreibt.

Um zur Lösung [82, 84] zu gelangen, nutzt man die konforme Invarianz der klassischen Instantonlösung, wodurch die Wirkung der $I\bar{I}$-Konfiguration nur von einen konformen Parameter ξ abhängt:

$$\xi = \frac{R^2 + \rho^2 + \overline{\rho}^2}{\rho\,\overline{\rho}}\,. \tag{2.77}$$

Der explizite Ausdruck für die Wirkung $S^{(I\bar{I})}$ ist in der $\mathsf{SU(N_c)}$ [84] (zuvor wurde die Lösung in der $\mathsf{SU(2)}$ berechnet [82]):

$$\begin{aligned} S^{(I\bar{I})}(\xi, U) = 1 - 2\,&\frac{(1 - \eta^4 + 4\,\eta^2\,\log\eta)\,\left[|u|^2 - 4\,|u\cdot\widehat{R}|^2\right]}{(\eta^2-1)^3} \\ &+ \frac{(1-\eta^2 + (1-\eta^2)\log\eta)\,\left[(|u|^2 - 4\,|u\cdot\widehat{R}|^2)^2 + |u|^4 + 2\,u^2\,(u^*)^2\right]}{(\eta^2-1)^3}\,, \end{aligned} \tag{2.78}$$

mit dem Einheitsvektor $\widehat{R}$ in Richtung von R und

$$\eta = \frac{1}{2}\,\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 4}\right). \tag{2.79}$$

u_μ ist ein Vierervektor, der die relative Orientierung im Farbraum beschreibt ($U = u_\mu\,\sigma_\mu$). Mit den Normierungen in Anhang A.1 ist

$$u_\mu = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(U\overline{\sigma}_\mu)\,. \tag{2.80}$$

[14] U beschreibt in Rahmen der Valley-Methode die relative Orientierung zwischen Instanton und Antiinstanton im Farbraum. Mit den Farbmatrizen U_I und $U_{\bar{I}}$ in (2.32) und (2.34) (dort mir U und $\overline{U}$ bezeichnet) ist $U^{\alpha\dot{\alpha}} = (U_I^\dagger)_i^{\,\alpha}\,(U_{\bar{I}})^{i\,\dot{\alpha}}$.

Die Wirkung $S^{(I\bar{I})}(\xi, U)$ aus Gleichung (2.78) ist so normiert,

$$\lim_{\xi\to\infty} S^{(I\bar{I})}(\xi, U) = 1\,, \tag{2.81}$$

daß für große ξ (also für $R^2 \gg \rho\,\overline{\rho}$) der $I\bar{I}$-Summenansatz (2.75) gültig bleibt.

Die Valley-Methode wird bei der Berechnung von Wirkungsquerschnitten benutzt, da die in der Wirkung $S^{(I\bar{I})}$ enthaltene $I\bar{I}$-Wechselwirkung implizit die Summe über Endzustandskorrekturen enthält. Dies bedeutet, daß beim Gebrauch des optischen Theorems (dargestellt in Abbildung 2.5) die Diskontinuität genommen wird, die zum Endzustandsschnitt zwischen Instanton und Antiinstanton gehört, wodurch nur der Prozeß $\langle\mathrm{in}|I|N\rangle\,\langle N|\bar{I}|\mathrm{out}\rangle$ und nicht der Prozeß $\langle\mathrm{in}|N\rangle\,\langle N|I\bar{I}|\mathrm{out}\rangle$ berücksichtigt wird (siehe z.B. [85]).

Im Rahmen der semiklassischen Näherung, die nun eine Entwicklung um das $I\bar{I}$-Feld umfaßt, ergibt sich eine $D(\rho)$ entsprechende Größe, die proportional zu[15]

$$D(\rho)\,D(\overline{\rho})\,e^{-\frac{4\pi}{\alpha_s}\,\Omega_{\mathrm{valley}}\left(\frac{R^2}{\rho\overline{\rho}},\dots\right)} \tag{2.82}$$

ist. Sie bildet bei der Berechnung eines allgemeinen I-induzierten Prozesses mit Endzustandsgluonen den entscheidenden Baustein. So wie die übliche I-Störungstheorie die Anwendbarkeit der störungstheoretischen I-Größenverteilung (2.53) verlangt, muß im allgemeinen Prozeß $S^{(I\bar{I})}$ durch (2.78) beschreibbar sein, was formal nur für hinreichend große $\frac{R^2}{\rho\overline{\rho}}$ möglich ist. Auch hier erlauben Gitterdaten die Erweiterung des Gültigkeitsbereich der üblichen I-Störungstheorie.

[15]Mit der Valley-Wechselwirkung $\Omega_{\mathrm{valley}} = S^{(I\bar{I})} - 1$.

Kapitel 3

Von der Instanton-Störungstheorie zur Saturation

In diesem Kapitel folgen wir dem ersten Zugang, der uns Aufschluß darüber geben soll, ob im Hintergrund eines Instantons Saturation auftreten kann. Ausgangspunkt des Zugangs sind Wirkungsquerschnitte [18, 19], die im Rahmen der I-Störungstheorie berechnet wurden und damit nur bei großen Impulsüberträgen und nicht zu großen Schwerpunktsenergien des I-Subprozesses gültig sind. Eine Untersuchung der Saturation erfordert eine Ausweitung des zugänglichen kinematischen Bereichs, die basierend auf Gitterdaten durchgeführt wird. Die Resultate werden dann ins Farbdipol-Bild übersetzt, was eine sehr anschauliche Diskussion des mit der Saturation verknüpften Wechselspiels zwischen der Dipol- und der Instantongröße erlaubt.

3.1 Strategie

Die Untersuchungen werden für Endzustände verschiedener Komplexität durchgeführt. Im Abschnitt 3.2 beziehen sie sich auf dem Prozeß mit dem einfachsten denkbaren Endzustand, der nur ein Flavour und keine Gluonen aufweist, im Abschnitt 3.3 findet die Erweiterung auf die volle Anzahl der Flavours und auf die Gluonen statt. Der Hauptunterschied betrifft die Summation der Endzustandsgluonen. Diese involviert die sogenannte Valley-Methode, in der die resummierten Endzustandsgluonen in Form einer Wechselwirkung zwischen Instantonen und Antiinstantonen behandelt werden (siehe Abschnitt 2.4.2).

Der Grund dafür, die Untersuchungen zunächst auf den einfachsten Prozeß zu beschränken, liegt zum einen in der einfacheren Struktur der damit verbundenen Wirkungsquerschnitte, die eine überaus transparente Diskussion des Wettbewerbs zwischen Dipol- und Instantongröße gestattet. Zum anderen sind aufgrund der vergleichsweise großen Kopplung in der QCD die Beiträge des einfachsten Prozesses (ganz im Gegensatz zur elektroschwachen Theorie) auch nicht so stark unterdrückt, daß eine Diskussion absurd wäre. Die Begründung basiert auf der mit der Valley-Methode verknüpften $I\bar{I}$-Wechselwirkung $-1 < \Omega_{\text{valley}} \lesssim 0$: Im Abschnitt 2.4.2 wurde die bekannte Tatsache dargelegt, daß die Wechselwirkung zu einer Erhöhung des Wirkungsquerschnitts um den Faktor

$$e^{-\frac{4\pi}{\alpha}\Omega_{\text{valley}}} \tag{3.1}$$

führt. Dies erlaubt die teilweise Aufhebung der exponentiellen Unterdrückung durch den Faktor $e^{-\frac{4\pi}{\alpha}}$ in der störungstheoretischen I-Größenverteilung (2.53)[1], der nur zum Teil durch den großen Faktor $\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^{4\,N_c}$ kompensiert wird. Für exemplarische Werte der elektroschwachen ($\alpha_w \approx 0.033$) und der starken Kopplung ($\alpha_s \approx 0.4$) ergeben sich ohne Eichbosonen im Endzustand (also für $\Omega = 0$) folgende charakteristische Faktoren in den Wirkungsquerschnitten [23]:

$$\left[\frac{2\pi}{\alpha_s}\right]^{12} e^{-\frac{4\pi}{\alpha_s}} \approx 5 \quad \gg \quad \left[\frac{2\pi}{\alpha_w}\right]^{8} e^{-\frac{4\pi}{\alpha_w}} \approx 7 \cdot 10^{-148}. \tag{3.2}$$

Dies demonstriert, daß es in der QCD durchaus sinnvoll ist, den einfachsten Prozeß zu betrachten. Die Gluonen führen zwar zu quantitativen Effekten, sind aber nicht von einer solchen Bedeutung, daß ohne sie die diskutierten Effekte vollkommen irrelevant wären. Anders ist die Situation in der elektroschwachen Theorie: Dort sind die I-induzierten, $(B+L)$-verletzenden Prozesse solange extrem stark unterdrückt, bis die Eichbosonen im Endzustand zu einer Erhöhung des Wirkungsquerschnitt führen, daß $\Omega \approx -1$ ist.

Im Abschnitt 3.2.1 werden die Ergebnisse, die im Rahmen der üblichen, bei großen Impulsüberträgen gültigen I-Störungstheorie berechnet wurden [18, 86] und die zuverlässige Vorhersagen von Wirkungsquerschnitten I-induzierter Prozesse erlauben, zusammengefaßt. Ihre Grundlagen wurden im Abschnitt 2.4 erläutert. Ein zentrales Ergebnis der Arbeit [18] war, daß, wenn alle beteiligten Impulse hinreichend groß sind, nur Instantonen beitragen, die sich durch die störungstheoretische I-Größenverteilung $D(\rho)_{I\text{-pert.}}$ (2.53) beschreiben lassen (siehe Abschnitt 2.3.2).

Die Wirkungsquerschnitte werden im Abschnitt 3.2.2 zu kleineren Impulsen fortgesetzt. Dazu wird die für große Instantonen ungültige Verteilung $D(\rho)_{I\text{-pert.}}$ durch die auf dem Gitter simulierte Verteilung $D(\rho)_{\text{Gitter}}$ ersetzt [31, 32], was auch im Grenzwert verschwindender Impulsüberträge zu endlichen Resultaten führt.

Nun können die so fortgesetzten Wirkungsquerschnitte mittels einer direkten Integral- bzw. Fouriertransformation ins Farbdipol-Bild übersetzt werden (Abschnitt 3.2.3). Zunächst wird die Transformierte für hinreichend kleine Dipole untersucht, was es erlaubt, die Integration über ρ mittels der störungstheoretischen I-Größenverteilung analytisch durchzuführen.

Die Fortsetzung zu kleinen Impulsüberträgen mittels Gitterdaten ermöglicht es, die Dipolgröße in der Transformierten auf hadronische Ausmaße $r \geq \langle\rho\rangle$ auszudehnen. Tatsächlich ergibt sich in diesem Bereich eine Faktorisierung in die Wellenfunktion der pQCD und einen konstanten, saturierten Wirkungsquerschnitt, der proportional zur Fläche des Instantons im Vakuum ist.

Im Abschnitt 3.3 wird mittels der zuvor angewandten Strategie die Saturation im Hintergrund eines Instantons unter Berücksichtigung der Endzustandsgluonen untersucht. Wir beginnen mit der Vorstellung der bekannten Ergebnisse der I-Störungstheorie [19, 86]. Der wesentliche Unterschied gegenüber dem einfachsten Prozeß liegt in neu auftretenden Integrationen: Zum einen wird über die Bjorken-Variable x' integriert, die mit der Energie E des I-Subprozesses verknüpft ist, zum anderen führt die Valley-Methode auf eine kollektive Koordinate R, die den $I\bar{I}$-Abstand beschreibt und über die ebenfalls integriert werden muß. Wie schon im einfachsten Prozeß verlangt der Gebrauch der störungstheoretischen I-Größenverteilung, daß die Impulsüberträge groß genug sind. Nun muß aber überdies Ω_{valley} die $I\bar{I}$-Wechselwirkung adäquat beschreiben, was nur für hinreichend große R der Fall ist; die Anwendbarkeit wird hier durch Einschränkungen an x' bzw.

[1] $D(\rho)$ geht quadratisch in die Wirkungsquerschnitte ein.

E sichergestellt. Für $x' \to 0$ bzw. $E \to \infty$ divergieren die Wirkungsquerschnitte aus [19, 86] sehr stark.

Anschließend werden diese Ergebnisse ins Farbdipol-Bild übersetzt. Dies verlangt essentiell eine Ausdehnung des Gültigkeitsbereichs der I-Störungstheorie zu größeren Energien (Abschnitt 3.3.2). Wieder geht die Ausdehnung des kinematischen Bereichs mit dem Gebrauch von Gitterdaten einher, die die $I\bar{I}$-Wechselwirkung auch für kleine R adäquat beschreiben. Mit Hilfe der Gitterdaten konnte gezeigt werden, daß die Hauptbeiträge der nun formal bis unendlich ausdehnbaren Integration über E aus der Region $E \approx M_{\rm Sph}$ stammen. Die Ausdehnung der Integration führt für große $r \geq \langle\rho\rangle$ zu einer Faktorisierung in die Wellenfunktion der pQCD und einen konstanten saturierten Dipolwirkungsquerschnitt, in dem nun die Beiträge der Endzustandsgluonen berücksichtigt sind.

Im folgenden werden die übliche kollineare Faktorisierung erörtert, auf der die Resultate der I-Störungstheorie beruhen, und ein kurzer Überblick über das Farbdipol-Bild gegeben.

3.1.1 Grundlagen der linearen Faktorisierung

Ein Standardwerkzeug zur QCD-Analyse der tiefinelastischen Streuung für moderate Werte der Bjorken-Variablen $x_{\rm Bj}$ bildet das Faktorisierungstheorem und die nach Dokshitzer, Gribov, Lipatov, Altarelli und Parisi benannten DGLAP-Gleichungen [2], die die Änderung der Observablen der tiefinelastischen Streuung mit der Änderung der Auflösungsskala, die in diesem Prozeß durch die Virtualität Q^2 des Photons gegeben ist, beschreiben.

Bevor die physikalischen Grundlagen und Konsequenzen der Faktorisierung erläutert werden, sollen die notwendigen Formeln rekapituliert werden, die es erlauben, aus dem Matrixelement der exklusiven Photon-Parton-Streuung den longitudinalen und transversalen Wirkungsquerschnitt zu berechnen; die Formeln orientieren sich an [18].

Der Ausgangspunkt bei der Berechnung des Partonwirkungsquerschnitts ist das Matrixelement $\mathcal{T}^\mu(q, p, k_1, \ldots, k_n)$ der allgemeinen, exklusiven Photon-Parton-Streuung:

$$\gamma^*(q) + p \to k_1 + \ldots + k_n \,. \tag{3.3}$$

Der inklusive Strukturtensor des Partons p lautet

$$\mathcal{W}_p^{\mu\nu}(q,p) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{W}_p^{\mu\nu\,(n)}(q,p) \tag{3.4}$$

mit dem Strukturtensor für n Teilchen im Endzustand:

$$\mathcal{W}_p^{\mu\nu\,(n)}(q,p) = \frac{1}{4\,\pi} \int dPS^{(n)}\, \mathcal{T}^\mu(q,p,k_1 \ldots k_n)\, \mathcal{T}^{\nu *}(q,p,k_1 \ldots k_n)\,. \tag{3.5}$$

Hierbei bezeichnet $dPS^{(n)}$ die Integration über den Phasenraum des n-Teilchen-Endzustands:[2]

$$\int dPS^{(n)} = \prod_{j=1}^{n} \int \frac{d^4 k_j}{(2\pi)^3}\, \delta^{(+)}(k_j^2) (2\pi)^4\, \delta^{(4)}(q + p - k_1 - \ldots - k_n)\,. \tag{3.6}$$

[2]Die δ-Funktion $\delta^{(+)}(k^2) = \Theta(k^0)\, \delta(k^2)$ reflektiert die Onshell-Bedingung der ausgehenden Nullmoden.

Die Definition des Tensors in Gleichung (3.5) umfaßt außerdem eine Mittelung über Farbe und Spin im Anfangszustand. Der Index (n) symbolisiert neben der Anzahl der Partonen im Endzustand auch deren Farb- und Spinfreiheitsgrade.

Im allgemeinen trägt jeder Endzustand $k_1 \ldots k_n$ zum Wirkungsquerschnitt der Streuung des Partons p mit dem Photon der Polarisation i bei. Man erhält diese mittels der Projektionen[3]

$$\frac{d\,\widehat{\sigma}_L^{\gamma^* p}(x,Q^2)}{d\,t} = \frac{4\pi^2\,\alpha_{\rm em}}{Q^2}\,4\,x^2\,\frac{p_\mu p_\nu}{p\cdot q}\,\mathcal{W}_p^{\mu\nu}(q,p)\,, \tag{3.7}$$

$$\frac{d\,\widehat{\sigma}_T^{\gamma^* p}(x,Q^2)}{d\,t} = \frac{4\pi^2\,\alpha_{\rm em}}{Q^2}\left[-g_{\mu\nu} + 2\,x\,\frac{p_\mu p_\nu}{p\cdot q}\right]\,x\,\mathcal{W}_p^{\mu\nu}(q,p) \tag{3.8}$$

mit der Bjorken-Variablen des Parton-Photon-Subprozesses $x = \frac{Q^2}{2\,p\cdot q}$. Die anderen auftretenden Variablen sind neben der Photonvirtualität $Q^2 = -q^2$ der Impulsübertrag t. In den nachfolgenden Kapiteln werden nur die Beiträge der Photon-Gluon-Streuung betrachtet; dann entspricht $-t$ der Virtualität des zwischen Photon und Gluon ausgetauschten Quarks. Im zunächst zu besprechenden einfachsten Prozeß befinden sich nur zwei Teilchen mit den Impulsen k_1 und k_2 im Endzustand. In diesem Fall sind die Mandelstam-Variablen des Photon-Parton-Prozesses:[4]

$$t = (q-k_1)^2 = (p-k_2)^2\,, \tag{3.9}$$

$$u = (q-k_2)^2 = (p-k_1)^2 = -t - \frac{Q^2}{x}\,, \tag{3.10}$$

$$\widehat{s} = (q+p)^2\,. \tag{3.11}$$

Der Wirkungsquerschnitt der tiefinelastischen Streuung $\sigma_{L,T}$ enthält nichtperturbative Anteile, die bei einer Streuung mit einem Proton auftreten und im herkömmlichen störungstheoretischen Rahmen nicht berechenbar sind. Die Möglichkeit, im Rahmen der störungstheoretischen QCD trotzdem Vorhersagen für die tiefinelastischen Streuung machen zu können, liegt in der Faktorisierung in harte $k_\perp \geq \mu_f$ und weiche Impulse $k_\perp \leq \mu_f$ begründet. Üblicherweise wählt man als Faktorisierungsskala μ_f die typische harte Impulsskala des Prozesses; diese ist in der tiefinelastischen Streuung üblicherweise $\sqrt{Q^2}$. Der Wirkungsquerschnitt ist dann:[5]

$$\sigma_{L,T}(x_{\rm Bj},Q^2) = \sum_{p=q,\bar{q},g}\int_{x_{\rm Bj}}^1 \frac{dx}{x}\,\frac{x_{\rm Bj}}{x}\,f_p\left(\frac{x_{\rm Bj}}{x},Q^2\right)\,\widehat{\sigma}_{L,T}^{\gamma^* p}(x,Q^2)\,. \tag{3.12}$$

Der Partonwirkungsquerschnitt $\widehat{\sigma}_{L,T}$ enthält den harten, störungstheoretisch berechenbaren Teil der tiefinelastischen Streuung, während die weichen Anteile in den Partonverteilungen $f_p(x,\mu_f^2)$ absorbiert sind. Offensichtlich tragen sämtliche Partonen zur Protonstruktur bei, so daß über sie summiert werden muß. In dieser Arbeit werden nur die Gluonanteile berücksichtigt, da für kleine $x_{\rm Bj}$ die Gluonverteilung dominiert. Überdies sind Wirkungsquerschnitte der I-induzierten

[3] Die Projektoren ergeben sich aus einer Summation über die jeweiligen Polarisationsvektoren eines transversal bzw. longitudinal polarisierten virtuellen Photons.

[4] s ist die Schwerpunktsenergie des Photon-Proton-Subprozesses.

[5] Die Bjorken-Variablen $x_{\rm Bj}$ ist analog zu x definiert. Anstatt des Partonimpulses p taucht nun der Protonimpuls P auf: $x_{\rm Bj} = \frac{Q^2}{2\,P\cdot q}$.

Gluonstreuung um einen Faktor $\frac{1}{\alpha_s}$ gegenüber denen der Quarkstreuung erhöht, der direkt mit dem Faktor $\frac{1}{g_s}$ im I-Eichfeld (2.32) verknüpft ist.

Dieses so anschauliche Bild der Faktorisierung ist in keiner Weise trivial. Es bedarf der richtigen Divergenzstruktur der Partonverteilungen, um die im $\gamma^* p$-Subprozeß auftretende IR-Divergenz zu kompensieren; siehe dazu z.B. [87]. Beweise für die Faktorisierung in anderen Prozessen finden sich in [88].

Mit der Wahl der Faktorisierungsskala $Q^2 = \mu_f^2$ ist die Q^2-Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts (3.12) durch die DGLAP-Gleichungen bestimmt. Wählt man eine Parametrisierung der Partonverteilung bei einem Wert von Q_0^2, ist diese für beliebige, genügend große Werte von Q^2 festgelegt. Daraus läßt sich dann der Wirkungsquerschnitt berechnen, der mit dem gemessenen verglichen werden kann. Auf diese Art lassen sich die Partonverteilungen, die die Daten am besten beschreiben, bestimmen. Die Analyse wird durch den linearen Charakter der DGLAP-Gleichungen [2] deutlich erleichtert.

Die Situation ändert sich im Bereich kleiner x_{Bj} deutlich. Die DGLAP-Evolution führt dort zu einen starken Anstieg der Strukturfunktion:

$$x_{\mathrm{Bj}}\, F(x_{\mathrm{Bj}}, Q^2) = \frac{Q^2}{4\pi^2\,\alpha_{\mathrm{em}}}\,\sigma(x_{\mathrm{Bj}}, Q^2) \sim \exp\left\{\mathrm{const.}\sqrt{\log\left(\frac{1}{x_{\mathrm{Bj}}}\right)\log\log\left(Q^2\right)}\right\}. \tag{3.13}$$

Versucht man, die DGLAP-Evolution für immer kleinere Werte von x_{Bj} zu verwenden, werden höhere Ordnungen der Störungsreihe durch den Faktor $\log\frac{1}{x_{\mathrm{Bj}}}$ wichtig. Dies führt zum Zusammenbruch der perturbativen Entwicklung der Partonstrukturfunktion und der anomalen Dimensionen[6]. Die Lösung der DGLAP-Gleichung ist eine Aufsummierung von Logarithmen der harten Skalen in sämtlichen Ordnungen, die Terme sind von der Art $(\alpha_s\,\log Q^2)^n$ und $(\alpha_s\,\log Q^2\,\log\frac{1}{x_{\mathrm{Bj}}})^n$. Damit bricht die Summation zusammen, wenn $\alpha_s \log\frac{1}{x_{\mathrm{Bj}}} \gg 1$ ist und auch diese Beiträge aufsummiert werden müssen.

In der perturbativen QCD wird der asymptotische Bereich kleiner x_{Bj} in der führenden logarithmischen Näherung (leading logaritmic approximation, LLA) durch die nach Balitsky, Fadin, Kuraev und Lipatov [4] benannten BFKL-Gleichungen beschrieben; diese summieren die führenden Logarithmen $\alpha_s \log\frac{1}{x_{\mathrm{Bj}}}$ auf. Die BFKL-Evolution (für Übersichtsartikel siehe [89]) führt auf einen Wirkungsquerschnitt, der einem Potenzgesetz folgend anwächst:

$$x_{\mathrm{Bj}}\, F(x_{\mathrm{Bj}}, Q^2) \sim x_{\mathrm{Bj}}^{1-\alpha_{\mathbb{P}}}, \qquad \alpha_{\mathbb{P}} = 1 + 4\,N_c\,\frac{\alpha_s}{\pi}\,\log 2\,. \tag{3.14}$$

Dies entspricht in etwa dem bei HERA beobachteten Anstieg, der durch das sogenannte harte Pomeron vermittelt wird. Der Anstieg (3.14) verletzt das sogenannten Froissart-Theorem [90], nach dem ein Wirkungsquerschnitt maximal mit dem Quadrat des Logarithmus der Energie des Prozesses anwachsen darf (also mit $\log^2\frac{1}{x_{\mathrm{Bj}}}$ für $x_{\mathrm{Bj}} \to 0$). Somit sind die in die Herleitung der BFKL-Gleichung eingehenden Näherungen nicht ausreichend, und man muß über die LLA herausgehen, um das richtige asymptotische Verhalten des Wirkungsquerschnitts für kleine x_{Bj} zu erhalten. Dieses Problem wird auch nicht durch die Berücksichtigung höherer Korrekturen [91] in α_s gelöst.

[6] Die Mellintransformation der DGLAP-Gleichung führt auf eine lineare Differentialgleichung in $\log Q^2$, deren Lösung ein Potenzgesetz bzgl. Q^2 ist. Der Exponent ist die anomale Dimension, die aus der Mellintransformation der Splittingfunktion hervorgeht.

3.1.2 Grundlagen des Farbdipol-Bildes

Der sowohl in der BFKL- als auch in der DGLAP-Evolution auftretende massive Anstieg der Strukturfunktionen, der die Unitarität verletzt, liegt darin begründet, daß die Partonen auch dann nicht miteinander wechselwirken, wenn die Partonverteilungen sehr groß werden. Tatsächlich muß der am Beschleuniger HERA beobachtete Anstieg der Gluonverteilung mit abnehmenden Werten von x_{Bj} irgendwann zur Wechselwirkung der Gluonen im Proton führen. Für einen hinreichend kleinen Wert von x_{Bj} wird die Rekombination der Partonen den durch Partonemission bewirkten Anstieg ausgleichen, was zum Ausflachen der Gluonverteilungen bis zum konstanten saturierten Wert führt [5, 7, 8].

Eine Möglichkeit, die Streuung in dem Bereich zu beschreiben, in dem Saturationseffekte relevant werden, ist die Entwicklung um das Farbglaskondensat [15]. Es beschreibt den Multigluonzustand, den die saturierten Gluonen bilden und in deren Hintergrund die Streuprozesse ablaufen. Die harte Saturationsskala Q_s, bei der die nichtlinearen Effekte relevant werden, setzt die Skala für die Kopplungskonstante in diesem Regime, wodurch eine perturbative Behandlung möglich wird. Der von McLerran eingeführte Name „Farbglaskondensat“ erklärt sich aus folgenden Überlegungen: Die „farbigen“ Gluonen bilden einen Zustand, der auf der Zeitskala der Streuung unverändert bleibt. Dies entspricht den Verhalten eines Glases, welches auf langen Zeitskalen als Flüssigkeit erscheint. Der Begriff „Kondensat“ leitet sich vom Bose-Kondensat ab, das sich durch hohe Besetzungszahlen auszeichnet. Beim Farbglaskondensat erlauben die hohen Besetzungszahlen eine klassische Behandlung des Hintergrundfeldes; überdies ist dadurch die Feldstärke – wie auch beim Instanton – groß ($\sim \frac{1}{\sqrt{\alpha_s}}$) (siehe für diese Argumente [92]).

Eine anschauliche Interpretation der Saturation ist im Farbdipol-Bild möglich. Unterschiedliche physikalische Bilder identischer Prozesse – wie eben das Farbdipol-Bild und das Partonbild – sind mit der Wahl verschiedener Bezugssysteme verknüpft. Eine anschauliche Interpretation des Farbdipol-Bildes ist im Dipolsystem [34] möglich, wo das Proton praktisch die gesamte Rapidität trägt und das Photon trotzdem sehr energiereich ist. In diesem Bild (siehe dazu Abbildung 3.1) fluktuiert das virtuelle Photon in ein $q\overline{q}$-Paar (also einen Farbdipol), der dann über Gluonemission mit dem Proton in Wechselwirkung tritt. Da das Proton Lorentz-kontrahiert ist, sieht der von einer Gluonwolke umgebene Dipol eine Farbquelle mit transversaler Ausdehnung, die sich in longitudinaler Richtung auf dem Lichtkegel befindet [37]. Diese Eigenschaft führt dazu, daß die Wilson-Linien (1.3) die geeigneten Freiheitsgrade für diesen hochenergetischen Prozeß darstellen; dies wird im Kapitel 4 weiter erläutert. Das physikalische Bild erlaubt eine Faktorisierung in zwei Teile, die das Photonsplitting einerseits und die Streuung des Dipols andererseits beschreiben. Nach [35] läßt sich der Wirkungsquerschnitt der $\gamma^* P$-Streuung ausdrücken durch:[7]

$$\sigma_{L,T}(x_{\mathrm{Bj}}, Q^2) = \int_0^1 dz \int d^2\boldsymbol{r} \;\; | \; \Psi_{L,T}(z,r) \; |^2 \;\; \sigma_{\mathrm{DP}}(r, x_{\mathrm{Bj}})\,. \tag{3.15}$$

[7] Ein einfaches, die Faktorisierung begründendes Bild findet sich z.B. in [93]. Dort wird explizit im Ruhesystem des Protons die Lebensdauer des $q\overline{q}$-Paares berechnet. Diese ist um einen Faktor $\frac{1}{x_{\mathrm{Bj}}}$ größer als die typische Wechselwirkungsdauer zwischen Photon und Proton, wodurch die Größe des Dipols sich während der Wechselwirkung nicht ändert.

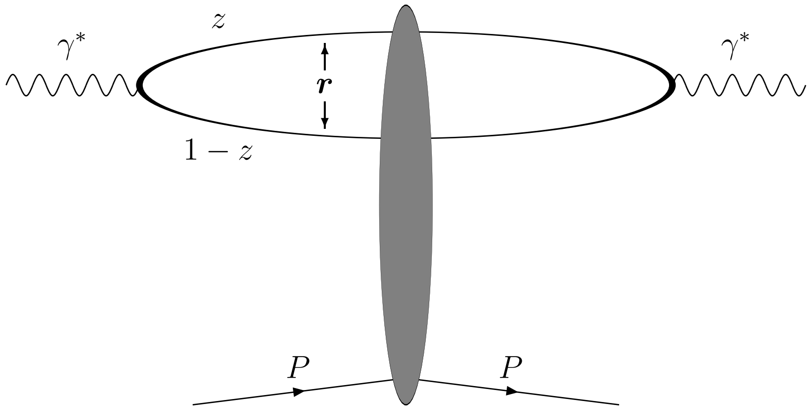


Abbildung 3.1: Streuung des Photons am Proton bei hoher Energie. Das Photon fluktuiert in einen Dipol, der mit dem Proton wechselwirkt.

Die quadrierten Photon Wellenfunktionen $\Psi_{L,T}$ für masselose Fermionen lauten [35]:

$$|\Psi_L(z,\boldsymbol{r})|^2 = \frac{6\,\alpha_{\rm em}}{4\,\pi^2} \sum_{f=1}^{n_f} e_f^2 \left\{ 4\,Q^2\,z^2(1-z)^2\,\mathrm{K}_0^2(\widehat{Q}\,r) \right\}\,, \tag{3.16}$$

$$|\Psi_T(z,\boldsymbol{r})|^2 = \frac{6\,\alpha_{\rm em}}{4\,\pi^2} \sum_{f=1}^{n_f} e_f^2 \left\{ [z^2+(1-z)^2]\,\widehat{Q}^2\,\mathrm{K}_1^2(\widehat{Q}\,r) \right\} \tag{3.17}$$

mit den Bessel-Funktionen $\mathrm{K}_{0,1}$ und der im Dipolbild relevanten Virtualität:

$$\widehat{Q} = Q\,\sqrt{z(1-z)}\,. \tag{3.18}$$

Die Wellenfunktionen (3.16) und (3.17) wurden von Brodsky und Lepage prozeßunabhängig auf dem Lichtkegel berechnet [94]. Die Faktorisierung (3.15) ist mit der Ordnung in der Rapidität $\tau = \log \frac{1}{x_{\rm Bj}}$ verknüpft. Während die Felder hoher Rapidität die Wellenfunktionen aufbauen, sind die langsamen Gluonen im Dipolwirkungsquerschnitt $\sigma_{\rm DP}$ absorbiert [37]. Eine Untersuchung der Änderung des Dipolwirkungsquerschnitts $\sigma_{\rm DP}$ mit der Rapidität führt auf die BK-Gleichung, die im Gegensatz zu den BFKL- und DGLAP-Gleichungen auch nichtlineare Wechselwirkungen beschreiben.

Das einfachste Modell, das im Rahmen der QCD die Wechselwirkung zwischen Dipol und Proton beschreibt, ist der Zweigluonenaustausch. Dieser beschreibt für kleine r den Dipolwirkungsquerschnitt adäquat [95, 96]:

$$\sigma_{\rm DP}^{\rm pQCD}(r, x_{\rm Bj}) = \frac{\pi^2}{3}\,\alpha_s\,x_{\rm Bj} G\left(x_{\rm Bj}, \tfrac{\lambda}{r^2}\right)\,r^2 + \mathcal{O}(r^4)\,. \tag{3.19}$$

In [96] wurde die Faktorisierungsskala μ_f proportional zur inversen Größe des Dipols gewählt, was im phänomenologisch relevanten Bereich zur Abschwächung des Wachstums des Dipolwirkungsquerschnitts führt. Die Näherung (3.19) ist gut, wenn r klein gegen den inversen Transversalimpuls der ausgetauschten Gluonen $\frac{1}{\sqrt{p_\perp^2}}$ ist. Andererseits sind aufgrund der Form der Wellenfunktion Beiträge der Ordnung $r \gg \frac{1}{\widehat{Q}}$ exponentiell unterdrückt. Beachtet man noch, daß wegen der Impulsordnung $\widehat{Q}^2 \gg p_\perp^2$ ist, sieht man, daß die Näherung (3.19) für nicht zu kleine Q^2 zu phänomenologisch guten Ergebnissen führt. Der Wirkungsquerschnitt (3.19) läßt sich unmittelbar geometrisch interpretieren. Er steigt offenbar mit der Fläche des Dipols an. Die Ergebnisse für den Dipolwirkungsquerschnitt im I-Hintergrund werden zeigen, daß neben der Fläche des Dipols nun die Fläche des Instantons zur relevanten Skala wird.

Für größer werdende Dipole erwartet man ein Einsetzen einer Wechselwirkung zwischen den Dipolen, wie sie eben durch die BK-Gleichungen beschrieben wird. Diese mit der Wechselwirkung verknüpften nichtlinearen Effekte führen zum Abflachen des Anstiegs des Dipolwirkungsquerschnitts. Schließlich strebt der Dipolwirkungsquerschnitt für $r \gg R_s(x_{\mathrm{Bj}})$ einem konstanten saturierten Wert zu, wobei $R_s^{-1}(x_{\mathrm{Bj}})$ mit der Saturationsskala $Q_s(x_{\mathrm{Bj}})$ verknüpft ist. Das Verhalten ist analog zum Saturationsmechanismus im üblichen Partonbild, in dem die Gluonverteilungen einem konstanten Wert zustreben. In beiden Fällen kann der Wirkungsquerschnitt $\sigma(x_{\mathrm{Bj}}, Q^2)$ für kleine x_{Bj} einen Grenzwert erreichen, der die Unitarität respektiert.

Das Modell von Golec-Biernat und Wüsthoff [38] beschreibt die HERA-Daten sehr effizient und spiegelt die Farbtransparenz und die Saturation wider. In diesem Modell ist der Dipolwirkungsquerschnitt gegeben durch:

$$\sigma_{\mathrm{DP}}^{\mathrm{GBW}}(r, x_{\mathrm{Bj}}) = \sigma_0 \left(1 - \exp\left\{-\frac{1}{4}\,\frac{r^2}{R_0^2(x_{\mathrm{Bj}})}\right\}\right), \qquad R_0(x_{\mathrm{Bj}}) = \frac{1}{1\,\mathrm{GeV}}\,\left(\frac{x_{\mathrm{Bj}}}{x_0}\right)^{\frac{\lambda}{2}}. \tag{3.20}$$

Die Parameter $\lambda \approx 0.288$, $x_0 \approx 3.04 \cdot 10^{-4}$ und $\sigma_0 \approx 23.04$ mb ergeben sich aus einem Fit an die Daten der tiefinelastischen Streuung für $x_{\mathrm{Bj}} \leq 0.01$. Für größere Q^2 wird die Beschreibung schlechter, da die durch die DGLAP-Gleichungen beschriebene Skalenverletzung zunehmend wichtig wird. In [39] wurde die DGLAP-Evolution ins GBW-Modell implementiert, wodurch auch die Daten bei großen Q^2 konsistent beschrieben werden. Die Saturationsskala $R_0(x_{\mathrm{Bj}})$ (und damit auch Q_s) hängt von der Bjorken-Variablen x_{Bj} ab. Um die Wirkung der Saturationsskala zu verdeutlichen, sei der sich aus den Gleichungen (3.15), (3.17) und (3.20) ergebende totale Wirkungsquerschnitt angegeben: Nach [38] ist für große $Q^2 \geq \frac{1}{R_0^2(x_{\mathrm{Bj}})}$ der transversale Wirkungsquerschnitt $\sigma_T \propto \frac{1}{Q^2}\,\frac{\sigma_0}{R_0^2(x_{\mathrm{Bj}})}$, während für kleine $Q^2 \leq \frac{1}{R_0^2(x_{\mathrm{Bj}})}$ der Wirkungsquerschnitt $\sigma_T \propto \sigma_0 \left(1 + \log\frac{1}{Q^2\,R_0^2(x_{\mathrm{Bj}})}\right)$ lautet. Die Saturationsskala trennt somit die (x_{Bj}, Q^2)-Ebene in zwei Regionen: In dem Teil, in der die Saturation noch unwichtig ist, ist der Wirkungsquerschnitt wie im Partonmodell $\propto \frac{1}{Q^2}$, während im Saturationsbereich der Wirkungsquerschnitt $\propto \sigma_0$ durch einen konstanten geometrischen Wirkungsquerschnitt bestimmt wird, dessen Wert in der Größenordnung der Fläche eines Protons liegt.

3.2 Der einfachste instantoninduzierte Prozeß

Nach den allgemeinen Betrachtungen wird nun der Dipolwirkungsquerschnitt im Hintergrund eines Instantons berechnet. Wir beginnen mit dem I-induzierten Prozeß ohne Endzustandsgluonen und mit $n_f = 1$.

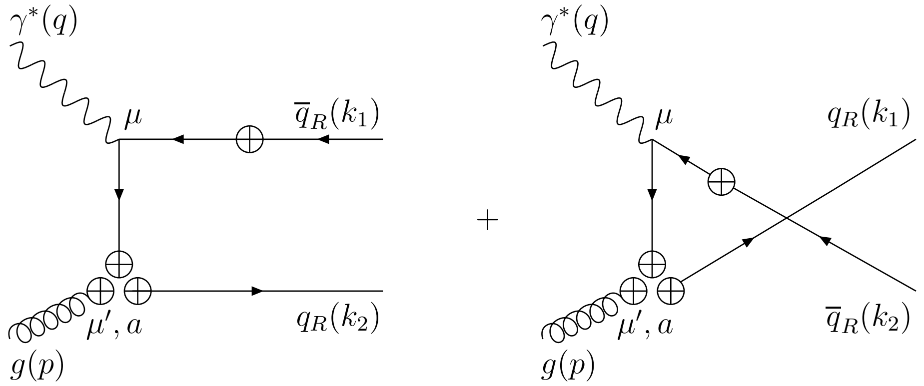


Abbildung 3.2: I-induzierter, chiralitätsverletzender Prozeß $\gamma^*(q) + g(p) \to \overline{q}_R(k_1) + q_R(k_2)$ in führender semiklassischer Näherung. Die Green-Funktion enthält die Produkte der klassischen Felder (mit einem Kreis abschließende Quark- bzw. Gluonlinien) sowie den Fermionpropagator im I-Hintergrund (von Kreis unterbrochene Fermionlinie) [18].

3.2.1 Zusammenfassung der bekannten Ergebnisse

Abbildung 3.2 zeigt den einfachsten I-induzierten Prozeß:

$$\gamma^*(q) + g(p) \to \overline{q}_R(k_1) + q_R(k_2)\,, \tag{3.21}$$

in führender semiklassischer Näherung. Der Ausgangspunkt der Berechnung des Wirkungsquerschnitts im Rahmen der I-Störungstheorie sind die I-Felder im Euklidischen Ortsraum. Nach einer Fouriertransformation werden die Ergebnisse im Impulsraum LSZ-amputiert und schließlich in den Minkowski-Raum fortgesetzt, wo dann der Onshell-Grenzwert durchgeführt wird.

Die Übergangsamplitude läßt sich aus dem allgemeinen Fall (2.67) bestimmen; sie ist ein Integral über die kollektiven Koordinaten z, ρ, U:

$$T^a_{\mu\mu'} = \int d^4z \int dU \int_0^\infty d\rho\; D(\rho)\, \mathcal{A}^a_{\mu\mu'}(z,\rho,U)\,, \qquad a = 1,\ldots,8\,. \tag{3.22}$$

μ beschreibt den Photon- und μ' den Gluonvertex. In (3.22) tritt die für die Fortsetzung der Ergebnisse zu kleineren Impulsüberträgen essentielle I-Größenverteilung $D(\rho)$ explizit auf. Die Amplitude $\mathcal{A}^a_{\mu\nu}$ ist in der zugrundeliegenden, führenden semiklassischen Näherung:[8]

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^a_{\mu\mu'} = &- i\, e_f \left[p^2 \operatorname{tr}\left(\lambda^a A^{(I)}_{\mu'}(p)\right)\right]\Big|_{p_4 \to (-i+\epsilon)\sqrt{p^2}} \\
&\times \chi^\dagger_R(k_2) \left[(i\,k_2)\kappa^{(I)}(-k_2)\, \mathcal{V}^{(t)}_\mu(q,-k_1)\,(-i\overline{k}_1) \right. \\
&\qquad \left. + (i\,k_2)\, \mathcal{V}^{(u)}_\mu(q,-k_2)\, \overline{\phi}^{(I)}(-k_1)\,(-i\overline{k}_1)\right]\Big|_{k_{i\,4} \to (-i+\epsilon)\sqrt{k_i^2};\, q_4 \to (-i+\epsilon) q_0} \chi_L(k_1).
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Die Konstante e_f beschreibt die jeweilige Ladung des Quarks, während die Ersetzung der Impulskomponenten [18] die Fortsetzung der Amplitude in die Minkowskische Raumzeit festlegt.

[8] Die Matrizen λ^a werden im Anhang A.1 beschrieben.

Die zwei Summanden entsprechen den Graphen in Abbildung 3.2. Neben den LSZ-amputierten Gluon-, Quark- und Antiquarkfeldern (2.68) - (2.70) treten hier die Vertex-Funktionen $\mathcal{V}_\mu^{(t,u)}$ für den t- und den u-Kanal auf:

$$\mathcal{V}_\mu^{(t)}(q,-k_1) = \int d^4x \; e^{-i\,q\cdot x}\,\overline{\phi}^{(I)}(x)\,\overline{\sigma}_\mu\, S^{(I)}(x,-k_1)\,, \tag{3.24}$$

$$\mathcal{V}_\mu^{(u)}(q,-k_2) = \int d^4x \; e^{-i\,q\cdot x}\,\overline{S}^{(I)}(-k_2,x)\,\sigma_\mu\,\kappa^{(I)}(x)\,. \tag{3.25}$$

Die Propagatoren $\overline{S}^{(I)}(-k_2,x)$ und $S^{(I)}(x,-k_1)$ gehen mittels Fouriertransformation aus $S^{(I)}(x,y)$ und $\overline{S}^{(I)}(x,y)$ (2.72) hervor. Die Nullmoden $\overline{\phi}^{(I)}(x)$ und $\kappa^{(I)}(x)$ finden sich in (2.44) und (2.45).

Integration über die Instantonposition

Nun wird die z-Integration in (3.22) ausgeführt. Sie garantiert die Translationsinvarianz der Theorie, die bei einer festen I-Position verletzt wäre. Betrachtet man die LSZ-Amputationen im Impulsraum der I-Felder (2.68) - (2.70), so erkennt man, daß die Verschiebung des Instantons um z im Ortsraum zu einem Faktor $e^{-iz\cdot k}$ im Impulsraum führt. Generisch ist nämlich:

$$f(k,z) = \int d^4x\; e^{-ix\cdot k}\, f(x-z) = e^{-iz\cdot k}\int d^4x\; e^{-i(x-z)\cdot k}\, f(x-z) = e^{-iz\cdot k}\, f(k,z=0)\,. \tag{3.26}$$

Faßt man die Translationsfaktoren in Gleichung (3.23) zusammen, ist

$$\mathcal{A}^a_{\mu\mu'}(z,\rho,U) = \mathcal{A}^a_{\mu\mu'}(\rho,U)\, e^{-i(q+p-k_1-k_2)\cdot z} \tag{3.27}$$

mit $\mathcal{A}^a_{\mu\mu'}(\rho,U) = \mathcal{A}^a_{\mu\mu'}(z=0,\rho,U)$. Damit ergibt sich aus Gleichung (3.22):

$$T^a_{\mu\mu'} = \int d^4z \int d\,U \int_0^\infty d\rho\; D(\rho)\,\mathcal{A}^a_{\mu\mu'}(\rho,U)\, e^{-i(q+p-k_1-k_2)\cdot z} = (2\pi)^4\delta\left(q+p-k_1-k_2\right)\,\mathcal{T}^a_{\mu\mu'}\,, \tag{3.28}$$

mit der Amplitude:

$$\mathcal{T}^a_{\mu\mu'} = \int d\,U \int_0^\infty d\rho\; D(\rho)\,\mathcal{A}^a_{\mu\mu'}(\rho,U)\,. \tag{3.29}$$

Sie ist der Ausgangspunkt für die Berechnung des hadronischen Tensors (3.5) und der daraus folgenden Wirkungsquerschnitte.

Die Integration über z führt zur δ-Funktion, die die Impulserhaltung widerspiegelt. Dies illustriert explizit den engen Zusammenhang zwischen kollektiven Koordinaten und den Symmetrien der Theorie (siehe Abschnitt 2.1.3).

Der Photonvertex

Nun werden die Grundzüge der Berechnung der LSZ-amputierten Photonvertizes $\mathcal{V}_\mu^{(t,u)}(q,-k_{1,2})$ vorgestellt.

Der effektive Photonvertex hängt – anders als die Gluon- und Quarkfelder – auch vom harten Impuls q ab. Somit kann nur dieser Vertex für die dynamische Unterdrückung großer Instantonen bei großen Q^2 verantwortlich sein. Im allgemeinen wird der Photonvertex von den Lorentz-Invarianten k_i^2, q^2 und $k_i\cdot q$ abhängen. Zunächst müssen die Fouriertransformierten $S^{(I)}(x,-k_1)$

und $\overline{S}^{(I)}(-k_2, x)$ aus der Gleichung (2.72) berechnet werden. Da abschließend der Grenzwert $k_i^2 \to 0$ durchgeführt wird und gleichzeitig q ein harter Impuls sein soll, kann angenommen werden, daß

$$0 \lesssim k_i^2 \ll |k_i \cdot q| \xrightarrow{\text{Fouriertransformation}} k_i^2 \ll \frac{|k_i \cdot x|}{x^2} \tag{3.30}$$

ist. Die Fouriertransformation führt große q in kleine x (ihre konjugierte Variablen) über, was die Abschätzung $q_\mu \sim \frac{x_\mu}{x^2}$ impliziert.

Die einseitigen Fouriertransformierten $S^{(I)}(x, -k_1)$ und $\overline{S}^{(I)}(-k_2, x)$ werden im Grenzwert (3.30) berechnet (siehe die Gleichungen (B.6) und (B.7)). Der jeweils erste Summand dieser Propagatoren ist (wie schon im Fall des Propagators (2.72) im Ortsraum) proportional zum freien Propagator des auslaufenden Teilchens mit dem Impuls k_i. Dieser Teil wurde bereits in [97] angegeben. Der zweite Summand hingegen wurde erst in [18] berechnet und ist unerläßlich für die Erhaltung der elektromagnetischen Eichinvarianz.

Die asymptotischen Entwicklungen der Fouriertransformierten werden in (3.24) und (3.25) eingesetzt, die verbleibende Fouriertransformation ausgeführt und abschließend der Grenzwert $k_i^2 \to 0, k_i^2 \ll |k_i \cdot q|$ bestimmt; die LSZ-amputierten Photonvertizes sind:

$$\begin{aligned}\left[\mathcal{V}_\mu^{(t)}(q, -k_1)\,(-i\,\overline{k}_1)\right]_{i\,\alpha} &= 2\,\pi\,i\,\rho^{3/2}\,\left(U^\dagger\right)_i^\beta \left\{\frac{1}{2}\,\frac{[\epsilon k_1 \overline{\sigma}_\mu]_{\beta\alpha}}{q \cdot k_1}\, f\left(\rho\sqrt{q^2}\right)\right.\\ &\left.+\left[\frac{[\epsilon(q-k_1)\overline{\sigma}_\mu]_{\beta\alpha}}{(q-k_1)^2} - \frac{1}{2}\,\frac{[\epsilon k_1 \overline{\sigma}_\mu]_{\beta\alpha}}{q \cdot k_1}\right] f\left(\rho\sqrt{(q-k_1)^2}\right)\right\} + \mathcal{O}(k_1^2\,\log k_1^2)\,,\end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}\left[(i\,k_2)\,\mathcal{V}_\mu^{(u)}(q, -k_2)\right]^{\alpha\,i} &= 2\,\pi\,i\,\rho^{3/2}\,\left(U\right)_\beta^i \left\{\frac{1}{2}\,\frac{[\sigma_\mu \overline{k}_2 \epsilon]^{\alpha\beta}}{q \cdot k_2}\, f\left(\rho\sqrt{q^2}\right)\right.\\ &\left.+\left[\frac{[\sigma_\mu(\overline{q}-\overline{k}_2)\epsilon]^{\alpha\beta}}{(q-k_2)^2} - \frac{1}{2}\,\frac{[\sigma_\mu \overline{k}_2 \epsilon]^{\alpha\beta}}{q \cdot k_2}\right] f\left(\rho\sqrt{(q-k_2)^2}\right)\right\} + \mathcal{O}(k_2^2\,\log k_2^2)\,,\end{aligned} \tag{3.32}$$

mit

$$f(x) = x\,\mathrm{K}_1(x), \qquad f(0) = 1\,. \tag{3.33}$$

Integration über die Orientierung im Farbraum

Nachdem die effektiven Photonvertizes sowie die LSZ-amputierten Nullmoden in der Amplitude (3.23) bestimmt wurde, folgt die Integration über die Orientierung U des Instantons im Farbraum. Die U-Matrizen enthalten sowohl Farb- ($i = 1, 2, 3$) als auch Spinorindizes ($\alpha = 1, 2$) (siehe Abschnitt 2.1.3).

Insgesamt tauchen in der Amplitude (3.23) vier U-Matrizen auf: Zwei gehören zum amputierten I-Eichfeld und jeweils eine zur amputierten Nullmode bzw. zum Photonvertex. Die Integration läßt sich dann mittels der Relation

$$\begin{aligned}\int dU\,(U)_\alpha^i\,(U^\dagger)_j^\beta\,(U)_\gamma^k\,(U^\dagger)_l^\epsilon &= \frac{1}{N_c^2-1}\left[\delta_j^i\,\delta_l^k\,\delta_\alpha^\beta\,\delta_\gamma^\epsilon + \delta_l^i\,\delta_j^k\,\delta_\gamma^\beta\,\delta_\alpha^\epsilon\right]\\ &- \frac{1}{N_c(N_c^2-1)}\left[\delta_j^i\,\delta_l^k\,\delta_\gamma^\beta\,\delta_\alpha^\epsilon + \delta_l^i\,\delta_j^k\,\delta_\alpha^\beta\,\delta_\gamma^\epsilon\right]\end{aligned} \tag{3.34}$$

durchführen. Setzt man in Gleichung (3.29) bzw. (3.23) die LSZ-amputierten Nullmoden (Gleichungen (2.69) und (2.70)) sowie die LSZ-amputierten Photonvertizes (Gleichungen (3.31) und (3.31)) ein, erhält man nach der analytischen Fortsetzung die Amplitude in der Minkowskischen Raumzeit:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^a_{\mu\mu'} = & -i\,\frac{\pi^4}{2}\,\frac{e_f}{g_s}\,\lambda^a \int_0^\infty d\rho\; D(\rho)\,\rho^5 \\ & \times \chi^\dagger_R(k_2)\left[(\sigma_{\mu'}\overline{p} - p\overline{\sigma}_{\mu'})\; V(q,k_1;\rho)\,\overline{\sigma}_\mu - \sigma_\mu\,\overline{V}(q,k_2;\rho)\,(\sigma_{\mu'}\overline{p} - p\overline{\sigma}_{\mu'})\right]\chi_L(k_1)\end{aligned} \tag{3.35}$$

mit dem Vierervektor

$$V_\lambda(q,k;\rho) = \left[\frac{(q-k)_\lambda}{-(q-k)^2} + \frac{k_\lambda}{2\,q\cdot k}\right] f\left(\rho\sqrt{-(q-k)^2}\right) - \frac{k_\lambda}{2\,q\cdot k}\, f\left(\rho\sqrt{-q^2}\right)\,. \tag{3.36}$$

Mittels dieser Darstellung der Amplitude wurde in [18] gezeigt, daß die Eichinvarianzbedingungen $q^\mu\,\mathcal{T}^a_{\mu\mu'} = 0$ und $p^{\mu'}\,\mathcal{T}^a_{\mu\mu'} = 0$ erfüllt sind.

Resultate

Die in der LSZ-Amputation des Gluons enthaltene Multiplikation der Amplitude (3.35) mit dem Gluon-Polarisationsvektor $\epsilon_g^{\mu'}(p)$ führt auf $\mathcal{T}^a_\mu$. Bildet man das Betragsquadrat von $\mathcal{T}^a_\mu$, so ergibt sich nach der Integration über den Phasenraum des Endzustandes der hadronischen Tensor (3.5)[9]. Das Betragsquadrat läßt sich mittels der Relationen für die Weyl-Spinoren im Anhang A.3 als Spur von zehn σ-Matrizen schreiben. Nach der Berechnung der Spur ergeben sich die differentiellen Wirkungsquerschnitte (3.7) und (3.8) des einfachsten I-induzierten Prozesses $\gamma^* g \to \overline{q}_R + q_R$ [18]:

$$\frac{d\,\widehat{\sigma}^{\gamma^* g}_{L,I\text{-pert.}}}{d\,t} = \frac{\pi^7}{2}\,\frac{e_f^2}{Q^2}\,\frac{\alpha_{\rm em}}{\alpha_{\rm s}}\,\mathcal{M}^2\left(\frac{\mu_r^2}{Q^2}\right)^b \frac{1}{Q^2}\left[x(1-x)\sqrt{tu}\,\frac{\left(\frac{Q^2}{-t}\right)^{\frac{b+1}{2}} - 1}{t+Q^2} - (t\leftrightarrow u)\right]^2 \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\,\widehat{\sigma}^{\gamma^* g}_{T,I\text{-pert.}}}{d\,t} = & \frac{\pi^7}{8}\,\frac{e_f^2}{Q^2}\,\frac{\alpha_{\rm em}}{\alpha_{\rm s}}\,\mathcal{M}^2\left(\frac{\mu_r^2}{Q^2}\right)^b \frac{x(1-x)}{Q^2}\left\{\left[\left(\frac{Q^2}{-t}\right)^{b+1} + t\,u\left(\frac{\left(\frac{Q^2}{-t}\right)^{\frac{b+1}{2}} - 1}{t+Q^2}\right)^2 + (t\leftrightarrow u)\right]\right. \\ & \left. +t\,u\left[\frac{\left(\frac{Q^2}{-t}\right)^{\frac{b+1}{2}} - 1}{t+Q^2} - (t\leftrightarrow u)\right]^2 (2x(1-x)-1)\right\}\,,\end{aligned} \tag{3.38}$$

mit

$$\mathcal{M} = 2^b\,d\left(\frac{2\pi}{\alpha_s(\mu_r)}\right)^{2\,N_c} \exp\left\{-\frac{2\,\pi}{\alpha_s(\mu_r)}\right\}\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+3}{2}\right)\,. \tag{3.39}$$

[9] Das Phasenraumintegral läßt sich mittels der zwei Onshell-Bedingungen für die auslaufenden Quarks auf eine Integration über die Mandelstam-Variable t reduzieren; dies erlaubt es, den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{d\widehat{\sigma}}{dt}$ zu definieren.

Die Koeffizienten b und d sind in den Gleichungen (2.54) und (2.58) definiert. In der Gleichung zeigt sich manifest die Symmetrie zwischen t und u. Zur Berechnung der differentiellen Wirkungsquerschnitte wurde explizit die störungstheoretische I-Größenverteilung (2.53) in Gleichung (3.29) eingesetzt. Im Grenzwert kleiner t bzw. u verhalten sich die differentiellen Wirkungsquerschnitte stark singulär. Da

$$t = -\frac{Q^2}{2\,x}(1-\cos\theta) \tag{3.40}$$

ist, tritt diese kollineare Singularität – wie auch in der üblichen störungstheoretischen QCD – für kleine Winkel θ der produzierten Teilchen relativ zur Richtung des Photons auf.

Der sehr starke Anstieg der störungstheoretischen I-Verteilung mit ρ^{b-5} überträgt sich auf ein stark divergentes Verhalten für die verschwindenden Mandelstamvariablen t und u.[10] Im Grenzwert $t \to 0$ sind die differentiellen Wirkungsquerschnitte im Rahmen der üblichen I-Störungstheorie (u (3.10) strebt gegen eine Konstante):

$$\left(\frac{d\,\widehat{\sigma}_L^{\gamma^* g}}{d\,t}\right)_{I\text{-pert.}} \overset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{(-t)^{\,b}}\,, \quad \left(\frac{d\,\widehat{\sigma}_T^{\gamma^* g}}{d\,t}\right)_{I\text{-pert.}} \overset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{(-t)^{\,b+1}}. \tag{3.41}$$

In Rückwärtsrichtung ($\theta \to 180°$ bzw. $u \to 0$) tritt die gleiche Singularität mit dem Impulsübertrag u auf. Im Falle der üblichen Störungstheorie ist die Singularität von der Ordnung $\frac{1}{-t}$.

In der hier benutzten, führenden semiklassischen Näherung ist die Divergenz mit dem Zusammenbruch der Eininstanton-Näherung verknüpft, in der die störungstheoretische I-Größenverteilung (2.53) berechnet wurde[11]. Der Vergleich der Näherung mit den Gitterdaten zeigt, daß sie nur für Instantonen mit der Größe $\rho \lesssim \rho_{\rm cut} \approx 0.35$ gerechtfertigt ist [50]. Aus dieser Einschränkung läßt sich eine Aussage darüber gewinnen, für welche Impulse (3.37) und (3.38) gültig ist. Dazu wurde die durchschnittliche Größe der in (3.37) und (3.38) beitragenden Instantonen berechnet [18]:

$$\begin{aligned}\langle\rho\rangle_{I\text{-pert.}} &= \frac{\int_0^\infty d\rho\;\rho\;D(\rho)_{I\text{-pert}}\,\rho^5\,(\rho\mathcal{Q})\,\mathrm{K}_1(\rho\mathcal{Q})}{\int_0^\infty d\rho\;D(\rho)_{I\text{-pert.}}\,\rho^5\,(\rho\mathcal{Q})\,\mathrm{K}_1(\rho\mathcal{Q})} = \frac{\int_0^\infty d\rho\;\rho\;\rho^{b+1}\,\mathrm{K}_1(\rho\mathcal{Q})}{\int_0^\infty d\rho\;\rho^{b+1}\,\mathrm{K}_1(\rho\mathcal{Q})}\\ &= \frac{1}{\mathcal{Q}}\,\frac{\Gamma\left[(b+4)/2\right]\,\Gamma\left[(b+2)/2\right]}{\Gamma\left[(b+3)/2\right]\,\Gamma\left[(b+1)/2\right]} \approx \frac{1}{\mathcal{Q}}\left(b+\frac{3}{2}\right).\end{aligned} \tag{3.42}$$

Die Gleichung (3.42) demonstriert klar die Rolle, die ein harter Impuls als dynamischer IR-Cutoff der ρ-Integration spielt. Damit konnte gezeigt werden, daß nur Instantonen der Größe $\sim \frac{b}{Q}$ beitragen, so daß in der ρ-Integration kein künstlicher IR-Cutoff eingeführt werden muß.

Aus (3.42) folgt eine untere Schranke $\mathcal{Q}_{\rm cut}$ für die Impulsskala $\mathcal{Q}$ [18]:[12]

$$\mathcal{Q}_{\rm cut} \approx \frac{1}{\rho_{\rm cut}}\left(b+\frac{3}{2}\right) \approx 5-6\,\mathrm{GeV}. \tag{3.43}$$

---

[10] b ist für $n_f = 3$ in führender Ordnung 9.

[11] Für größere Instantonen können überdies höhere Ordnungen der semiklassischen Näherung wichtig werden, die das Verhalten der Wirkungsquerschnitte bei kleinen Impulsüberträgen beeinflussen. Ist die von den Gittersimulationen vorhergesagte I-Größe nicht zu groß, läßt sich die Streuung auch für kleine Impulsüberträge im Rahmen der führenden semiklassischen Näherung beschreiben.

[12] Der Wert hängt von der Anzahl der aktiven Flavours n_f ab (siehe Gleichung (2.54)). Für $\rho_{\rm cut} \approx 0.35$ fm und $n_f = 3$ ist z.B. der so definierte Wert $\mathcal{Q}_{\rm cut} = 5.9$ GeV.

Wird dieser Wert unterschritten, so tragen signifikant Instantonen bei, die nicht mehr adäquat durch die störungstheoretische Form von $D(\rho)$ beschrieben werden, wodurch der Rahmen der strikten I-Störungstheorie verlassen wird. Eine genauere quantitative Aussage über die Güte der Berechnung in der strikten I-Störungstheorie wird sich im folgenden ergeben, wenn das relevante ρ-Integral mittels Gitterdaten berechnet wird.

Abschließend sei noch erwähnt, daß alle in (3.37) und (3.38) auftretenden Impulsskalen groß sein müssen,

$$\min\left(Q^2, -t, -u\right) = \min\left(Q^2, \frac{Q^2}{2\,x}(1-\cos\theta), \frac{Q^2}{2\,x}(1+\cos\theta)\right) \gtrsim \mathcal{Q}_{\rm cut}\,, \tag{3.44}$$

was sich in Forderungen an Q^2, x und θ übersetzen läßt.

Der totale Partonwirkungsquerschnitt

Da die differentiellen partonischen Wirkungsquerschnitte (3.37) und (3.38) eine kollineare Divergenz aufweisen, müssen die totalen partonischen Wirkungsquerschnitte $\widehat{\sigma}_{L,T}^{\gamma^* g}$ regularisiert werden. Um die harten Beiträge im partonischen Wirkungsquerschnitt in Hinblick auf die Anwendbarkeit der I-Störungstheorie isolieren zu können, bietet sich eine IR-Cutoff-Skala μ_c in den Grenzen der t-Integration $\left\{-\frac{Q^2}{x}+\mu_c^2, -\mu_c^2\right\}$ an. In diesen Grenzen ist auch $-u \geq \mu_c^2$ (siehe Gleichung (3.10)).

Explizit soll der einfachste Beitrag des transversalen Anteils $\frac{d\widehat{\sigma}_T^{\gamma^* g}}{dt}$ bestimmt werden; dies ist der erste Summand in Gleichung (3.50), der zusammen mit dem entsprechenden u-Term den planaren Anteil des Graphen zum transversalen Wirkungsquerschnitt bildet. Es ist

$$\int_{-\frac{Q^2}{x}+\mu_c^2}^{-\mu_c^2} dt\,\frac{1}{(-t)^{b+1}} = \frac{1}{\mu_c^{2b}}\,\frac{1}{b}\left[1-\left(\frac{\mu_c^2}{\frac{Q^2}{x}+\mu_c^2}\right)^b\right]. \tag{3.45}$$

Eingesetzt in (3.50) lautet der transversale Partonwirkungsquerschnitt [18]

$$\widehat{\sigma}_{T,I\text{-pert.}}^{\gamma^* g}(x,Q^2,\mu_c^2,\mu_r^2) = \frac{\pi^7}{8}\,e_f^2\,\frac{\alpha_{\rm em}}{\alpha_{\rm s}}\,\mathcal{M}^2\left(\frac{\mu_r^2}{\mu_c^2}\right)^b\,\frac{x(1-x)}{Q^2}\,\frac{2}{b}\left[1+\mathcal{O}\left(\frac{\mu_c^2}{Q^2}\right)\right], \tag{3.46}$$

da die nichtplanaren Terme in Gleichung (3.50) keine Beiträge in führender Ordnung $\frac{1}{Q^2}$ liefern. Der andere planare Term $\propto \frac{1}{(-u)^{b+1}}$ liefert den gleichen Beitrag in (3.46). Die Entwicklung ist überaus natürlich, da der Gebrauch der I-Störungstheorie ohnehin voraussetzt, daß $Q^2 \gg \mathcal{Q}_{\rm cut}^2$ ist. Der longitudinale Teil ergibt sich analog [18]:

$$\widehat{\sigma}_{L,I\text{-pert.}}^{\gamma^* g}(x,Q^2,\mu_c^2,\mu_r^2) = \frac{\pi^7}{2}\,e_f^2\,\frac{\alpha_{\rm em}}{\alpha_{\rm s}}\,\mathcal{M}^2\left(\frac{\mu_r^2}{\mu_c^2}\right)^b\,\frac{x(1-x)^2}{Q^2}\,\frac{\mu_c^2}{Q^2}\,\frac{2}{b-1}\left[1+\mathcal{O}\left(\frac{\mu_c^2}{Q^2}\right)\right], \tag{3.47}$$

Der Hauptunterschied zwischen longitudinalem und transversalem Wirkungsquerschnitt ist der Faktor $\frac{\mu_c^2}{Q^2}$, der dazu führt, daß $\frac{Q^2}{4\pi^2\,\alpha_{\rm em}}\widehat{\sigma}_{L,I\text{-pert.}}^{\gamma^* g}$ im Grenzwert $Q^2 \to \infty$ verschwindet, während $\frac{Q^2}{4\pi^2\,\alpha_{\rm em}}\widehat{\sigma}_{T,I\text{-pert.}}^{\gamma^* g}$ einem endlichen Grenzwert zustrebt.

3.2.2 Fortsetzung zu kleineren Impulsüberträgen

Die vorgestellten Ergebnisse sind für größere Impulsüberträge gültig und divergieren für verschwindende Impulsüberträge. Die Quelle dieser Singularität ist in der semiklassischen Näherung die Integration über ρ und wird durch den starken Anstieg der störungstheoretischen I-Verteilung $D(\rho)$ bestimmt. Entsprechend führt die in den Gitterdaten manifeste Unterdrückung der großen Instantonen zu endlichen und auch sinnvollen Ergebnissen.

Die in (3.37) und (3.38) enthaltene, die Singularitäten verursachende ρ-Integration ist mit der störungstheoretischen I-Größenverteilung (2.53) verknüpft:

$$\int_0^\infty d\rho\, D(\mu_r,\rho)_{I\text{-pert}}\,\rho^5\,(\rho\mathcal{Q})\,\mathrm{K}_1(\rho\mathcal{Q}) = \mathcal{M}\left(\frac{\mu_r}{\mathcal{Q}}\right)^b \frac{1}{\mathcal{Q}}\,. \tag{3.48}$$

Führt man die Integration über ρ nicht aus, lassen sich die differentiellen Wirkungsquerschnitte (3.37) und (3.38) umschreiben [32]:

$$\frac{d\,\widehat{\sigma}_L^{\gamma^* g}}{d\,t} = \frac{\pi^7}{2}\frac{e_f^2}{Q^2}\frac{\alpha_{\mathrm{em}}}{\alpha_{\mathrm{s}}}\left[x(1-x)\sqrt{tu}\,\frac{\mathcal{R}(\sqrt{-t})-\mathcal{R}(Q)}{t+Q^2}-(t\leftrightarrow u)\right]^2 \tag{3.49}$$

$$\frac{d\,\widehat{\sigma}_T^{\gamma^* g}}{d\,t} = \frac{\pi^7}{8}\frac{e_f^2}{Q^2}\frac{\alpha_{\mathrm{em}}}{\alpha_{\mathrm{s}}}\,x(1-x)\left\{\left[\mathcal{R}(\sqrt{-t})^2+tu\left(\frac{\mathcal{R}(\sqrt{-t})-\mathcal{R}(Q)}{t+Q^2}\right)^2+(t\leftrightarrow u)\right]\right.$$
$$\left.+tu\left[\frac{\mathcal{R}(\sqrt{-t})-\mathcal{R}(Q)}{t+Q^2}-(t\leftrightarrow u)\right]^2(2x(1-x)-1)\right\} \tag{3.50}$$

mit dem Integral:

$$\mathcal{R}(\mathcal{Q}) = \int_0^\infty d\rho\, D(\rho)\,\rho^5\,(\rho\mathcal{Q})\,\mathrm{K}_1(\rho\mathcal{Q})\,. \tag{3.51}$$

Das Integral hat die Dimension einer Länge und stellt das „Master-Integral“ für den Übergang von großen zu kleinen Impulsüberträgen dar. Ferner wird es im Farbdipol-Bild essentiell in den Dipolwirkungsquerschnitt eingehen. Im einfachsten I-Prozeß enthält es wesentliche Teile der I-Dynamik.

Nun werden die Erkenntnisse aus dem Abschnitt 2.3.2 genutzt, um das Integral $\mathcal{R}(\mathcal{Q})$ auch für kleinere Impulse auszuführen. Die erste Beobachtung ist, daß $\mathcal{R}(\mathcal{Q})$ nicht mehr divergiert, wenn in der I-Verteilung die Beiträge großer Instantonen unterdrückt sind. Mit der Normierungsbedingung (3.33) läßt sich der Grenzwert

$$\mathcal{R}(0) = \int_0^\infty d\rho\, D(\rho)\,\rho^5 \tag{3.52}$$

angeben. Er ist vollständig durch die Struktur des I-Ensemble im Vakuum bestimmt und unabhängig von äußeren kinematischen Variablen. Die Parametrisierung (2.61) erlaubt es, $\mathcal{R}(0)$ auch quantitativ zu bestimmen:

$$\mathcal{R}(0)_{\mathrm{Gitter}} = \int_0^\infty d\rho\, D(\rho)_{\mathrm{Gitter}}\,\rho^5 \approx 0.30\ \mathrm{fm}\,. \tag{3.53}$$

Das Integral $\mathcal{R}(0)$ läßt sich mittels zweier charakteristischen Parameter des I-Ensembles beschreiben: κ (die sogenannte Packing-Fraction [49]) beschreibt den Anteil des Raumzeitvolumens, der durch Instantonen belegt wird. Das Volumen einer vierdimensionalen Kugel mit Radius ρ ist $\frac{\pi^2}{2}\,\rho^4$ und somit:

$$\kappa = \frac{V^{(I)}}{V} = \int_0^\infty d\rho\, V(\rho)\, \frac{dn^I}{d\rho\, d^4z} = \frac{\pi^2}{2} \int_0^\infty d\rho\, D(\rho)\, \rho^4\,. \tag{3.54}$$

Der zweite Parameter ist die mittlere I-Größe $\langle\rho\rangle$:

$$\langle\rho\rangle = \frac{\int_0^\infty d\rho\, \rho\, D(\rho)\, V(\rho)}{\int_0^\infty d\rho\, D(\rho)\, V(\rho)} = \frac{\int_0^\infty d\rho\, D(\rho)\, \rho^5}{\int_0^\infty d\rho\, D(\rho)\, \rho^4} \approx 0.60 \text{ fm}\,, \tag{3.55}$$

wobei der numerische Wert aus der Gitterparametrisierung (2.61) folgt. Die Position des ausgeprägten Maximums der Verteilung $D(\rho)\rho^4$ bei 0.59 fm stimmt mit $\langle\rho\rangle$ fast überein. Aus $\langle\rho\rangle$ und κ folgt für $\mathcal{R}(0)$:

$$\mathcal{R}(0) = \frac{2}{\pi^2}\, \langle\rho\rangle\, \kappa\,. \tag{3.56}$$

Der Grenzwert $\mathcal{R}(0)$, der signifikant in die Wirkungsquerschnitte (3.50) und (3.49) eingeht, ist somit durch das Produkt der Vakuumgrößen κ und $\langle\rho\rangle$ bestimmt.

Abb. 3.3 zeigt das Ergebnis der I-Störungstheorie (3.48) zusammen mit der numerischen Vorhersage für $\mathcal{R}(\mathcal{Q})$, die sich aus der die Parametrisierung der Gitterdaten ergibt. Für große Impulse nähern sich die Werte – übereinstimmend mit den Überlegungen aus Abschnitt 3.2.1 – an.

Der totale Partonwirkungsquerschnitt bei kleinen Impulsüberträgen

Der Gebrauch der Gitterdaten führt dazu, daß keine kollineare Singularitäten in den differentiellen Wirkungsquerschnitten $\frac{d\widehat{\sigma}_{L,T}^{\gamma^* g}}{dt}$ (Gleichungen (3.50) und (3.49)) auftreten. Somit können wir den totalen Wirkungsquerschnitt der I-induzierten $\gamma^* g$-Streuung unabhängig von μ_c^2 berechnen.

Mit Gleichung (3.40) und $\tau = \sqrt{-t}$ läßt sich das Integral umschreiben:

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}_{L,T}^{\gamma^* g}(x, Q^2) &= \int_{t(\cos\theta=-1)}^{t(\cos\theta=+1)} dt\, \frac{d\,\widehat{\sigma}_{L,T}^{\gamma^* g}}{d\,t}(x, Q^2, \sqrt{-t}, \sqrt{-u}) \\ &= \int_0^{\sqrt{\frac{Q^2}{x}}} d\tau\; 2\tau\, \frac{d\,\widehat{\sigma}_{L,T}^{\gamma^* g}}{d\,t} \left(x, Q^2, \tau, \sqrt{\frac{Q^2}{x} - \tau^2} \right).\end{aligned} \tag{3.57}$$

Abbildung 3.3 zeigt deutlich, daß auch nach Gebrauch der Gitterdaten die dominanten Anteile aus der kollinearen Region stammen. Dies führt dazu, daß die von $\mathcal{R}(\sqrt{-t})$ bzw. $\mathcal{R}(\sqrt{-u})$ abhängenden Terme dominieren, die den planaren Anteil des differentiellen Wirkungsquerschnitts bilden. Das Integral über $\mathcal{R}(\sqrt{-t})$ läßt sich mit einigen Näherungen ausführen:

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\frac{Q^2}{x}}} d\tau\; 2\tau \mathcal{R}^2(\tau) &\approx \int_0^\infty d\rho\, D(\rho)\, \rho^5 \int_0^\infty d\overline{\rho}\, D(\overline{\rho})\, \overline{\rho}^5 \\ &\times \int_0^\infty d\tau\; 2\tau\, (\rho\tau)\, \mathrm{K}_1(\rho\tau)\, (\overline{\rho}\tau)\, \mathrm{K}_1(\overline{\rho}\tau) \approx \frac{4}{3} \left(\int_0^\infty d\rho\, D(\rho)\, \rho^4 \right)^2 .\end{aligned} \tag{3.58}$$

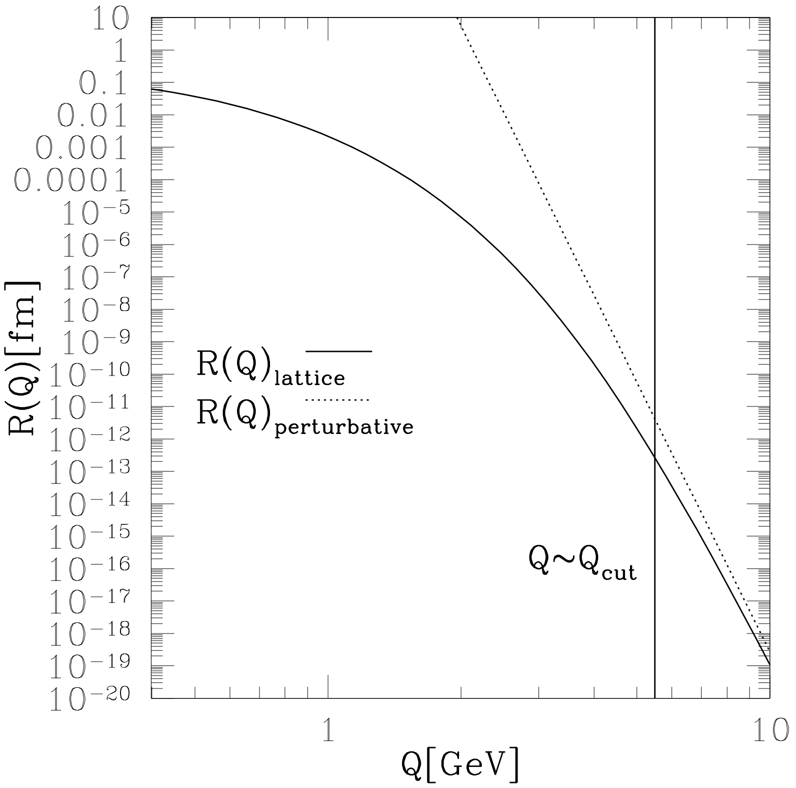


Abbildung 3.3: Das Integral $\mathcal{R}(\mathcal{Q})$ (3.51) als Funktion des Impulses $\mathcal{Q}$. Dargestellt ist das aus der Parametrisierung der Gitterdaten folgende numerische Resultat und die analytische Vorhersage (3.48), die sich aus der störungstheoretischen I-Größenverteilung (2.53) ergibt. Wie erwartet, nähern sich die beiden Vorhersagen für große $\mathcal{Q}$ an.

Die erste Näherung umfaßt die Vernachlässigung von Impulsüberträgen, die größer als $\frac{Q^2}{x}$ sind, was aufgrund der Unterdrückung von $\mathcal{R}(\mathcal{Q})$ bei großen $\mathcal{Q}^2$ gerechtfertigt ist. In der zweiten Näherung wurde ausgenutzt, daß die I-Verteilung ein ausgeprägtes Maximum aufweist[13]. Ein numerischer Vergleich der Näherung mit dem vollständigen Integral mittels der Parametrisierung (2.61) zeigt eine hervorragende Übereinstimmung. Aufgrund der Symmetrie zwischen Vorwärts- und Rückwärtsrichtung liefert der u-Term den gleichen Beitrag.

Damit liefert der dominierende planare Term im totalen Wirkungsquerschnitt einen Beitrag, der – wie in der üblichen pQCD – proportional zu $\frac{1}{Q^2}$ ist:

$$\widehat{\sigma}^{\gamma^* g}_{T,\,\mathrm{planar}}(x, Q^2) = 2\,\frac{\pi^7}{8}\,e_f^2\,\frac{\alpha_{\mathrm{em}}}{\alpha_{\mathrm{s}}}\,x(1-x)\,\frac{4}{3}\left(\int_0^\infty d\rho\; D(\rho)\,\rho^4\right)^2\,\frac{1}{Q^2}\,. \tag{3.59}$$

Der longitudinale Partonwirkungsquerschnitt ergibt sich analog. Aus den totalen Partonwirkungsquerschnitten $\widehat{\sigma}^{\gamma^* g}_{L,T}$ läßt sich mittels der Faktorisierung (3.12) der Anteil des Prozesses (3.21) zum Wirkungsquerschnitt der tiefinelastischen Streuung berechnen.

[13] Die Näherung $\rho \approx \overline{\rho}$ ist auch im Rahmen der üblichen Störungstheorie gerechtfertigt, da in diesem Fall der Faktor $(\rho\mathcal{Q})\,\mathrm{K}_1(\rho\mathcal{Q})$ zu einem effektiven Maximum führt.

3.2.3 Transformation ins Farbdipol-Bild

Nun wenden wir uns der Beschreibung von I-induzierten Prozessen im Farbdipol-Bild zu. Wie im Abschnitt 3.1.2 beschrieben, führt ein Saturationsmechanismus zum Abflachen des Anstiegs des Dipolwirkungsquerschnitts mit größer werdenden r. Die Frage, die hier beantwortet werden soll, ist, ob ein solches Ausflachen im Hintergrund eines Instantons auftritt und ob die Saturationsskala mit der intrinsische I-Längenskala verknüpft ist. Dazu werden wir aus den differentiellen Wirkungsquerschnitten die Produkte aus Wellenfunktion und Dipolwirkungsquerschnitt für ein longitudinales und ein transversales Photon berechnen.

Die Variablen im Dipolbild, z und r, werden formal mittels einer Sudakovzerlegung der relevanten Impulse nach Lichtkegel-Impulsen eingeführt (siehe dazu z.B. [93]). Zunächst wird das Dipolbild für den einfachsten I-induzierte Subprozeß $\gamma^*(q) + g(p) \to \overline{q}_R(k_1) + q_R(k_2)$ diskutiert[14]. Die Impulse der Quarks sind k_1 und $q - k_1$, z ist die Projektion des Impulses k_1 auf einen der Onshell-Impulse (für kleine x_{Bj} identisch mit der Projektion auf den Photonimpuls q) und $1 - z$ die entsprechende Projektion für $q - k_1$. Die Lichtkegel-Impulse spannen eine Ebene auf, in der Proton- und Photonimpuls liegen; der Impuls $l_\perp$ ist der Anteil des Viererimpulses k_1, der senkrecht zu dieser Ebenen ist. Die zwei Freiheitsgrade von $l_\perp$ werden durch den zweidimensionale Vektor $\boldsymbol{l}$ beschrieben[15].

Nutzt man die Onshell-Bedingungen $k_1^2 = k_2^2 = 0$ für die ausgehenden Quarks aus, so ist mit $\widehat{Q}$ aus Gleichung (3.18)[16]:

$$-t = Q'^2 = \frac{1}{z}(\widehat{Q}^2 + \boldsymbol{l}^2)\,, \tag{3.60}$$

$$-u = \frac{1}{1-z}(\widehat{Q}^2 + \boldsymbol{l}^2)\,, \tag{3.61}$$

$$x = \frac{\widehat{Q}^2}{\widehat{Q}^2 + \boldsymbol{l}^2}\,, \tag{3.62}$$

$$1 - x = \frac{\boldsymbol{l}^2}{\widehat{Q}^2 + \boldsymbol{l}^2}\,. \tag{3.63}$$

Vernachlässigt wurde hier der Transversalimpuls $p_\perp$ des Gluons, was im Rahmen der hier dargestellten, kollinearen Faktorisierung angebracht ist. In der sogenannten k_t-Faktorisierung ist dies nicht mehr angebracht. Eine Analyse des untersuchten Prozesses im Rahmen der k_t-Faktorisierung zeigte, daß sich analog zur Herleitung des Dipolwirkungsquerschnitts (3.19) in [96] die Ergebnisse annähern, wenn r nicht zu groß ist. Eine Dominanz der planaren Beiträge führt überdies dazu, daß die kollineare Faktorisierung auch für größere r benutzt werden kann.

Die Gleichungen (3.60) - (3.63) stellen einen direkten Zusammenhang zwischen den Dipolvariablen z und $\boldsymbol{l}$ und den ursprünglichen Variablen $-t$ und x her. Die zum Transversalimpuls $\boldsymbol{l}$ konjugierte Variable $\boldsymbol{r}$ ergibt sich mittels Fouriertransformation:

$$\widetilde{f}(\boldsymbol{r}) = \int \frac{d^2\boldsymbol{l}}{(2\pi)^2}\, e^{i\,\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{r}}\, f(\boldsymbol{l})\,. \tag{3.64}$$

[14] Wir betrachten den Graphen im t-Kanal (siehe Abbildung 3.2). Beim gekreuzten Graph sind k_1 und k_2 entsprechend vertauscht, wodurch sich auch die Rollen von $-t$ und $-u$ vertauschen.

[15] In einem entsprechend gewählten Koordinatensystem wäre z.B. $l_\perp^\mu = (0, 0, \boldsymbol{l})$; damit ist $l_\perp^2 = -\boldsymbol{l}^2$.

[16] Details finden sich im Anhang C.

Die Größe des Dipols r ist der Betrag des zweidimensionalen Ortsvektors $\boldsymbol{r}$:

$$r = |\boldsymbol{r}|\,. \tag{3.65}$$

Mittels der transformierten Funktion (3.64) läßt sich ein Integral über einen Transversalimpuls $\boldsymbol{l}$ durch ein Integral über die Dipolgröße darstellen:

$$\int d^2\boldsymbol{r}\; |\widetilde{f}(\boldsymbol{r})|^2 = \int d^2\boldsymbol{r} \int \frac{d^2\boldsymbol{l}}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2\boldsymbol{l}'}{(2\pi)^2}\; e^{i\,(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{l}')\cdot\boldsymbol{r}}\, f(\boldsymbol{l})\, f(\boldsymbol{l}')^* = \int \frac{d^2\boldsymbol{l}}{(2\pi)^2}\; |f(\boldsymbol{l})|^2\,, \tag{3.66}$$

wobei man die Fourierdarstellung der δ-Funktion

$$(2\pi)^2\, \delta^{(2)}(\boldsymbol{l}) = \int d^2\boldsymbol{r}\; e^{i\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{3.67}$$

benutzt. Aus den Gleichungen (3.64) und (3.67) folgt außerdem die für die transversale Komponente wichtige Relation:

$$\int d^2\boldsymbol{r}\; |\nabla\, \widetilde{f}(r)|^2 = \int d^2\boldsymbol{r} \int \frac{d^2\boldsymbol{l}}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2\boldsymbol{l}'}{(2\pi)^2}\; e^{i\,(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{l}')\cdot\boldsymbol{r}}\, \boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{l}'\, f(\boldsymbol{l})\, f(\boldsymbol{l}')^* = \int \frac{d^2\boldsymbol{l}}{(2\pi)^2}\; \boldsymbol{l}^2\, |f(\boldsymbol{l})|^2\,. \tag{3.68}$$

Hängt die zu transformierende Funktion $f(\boldsymbol{l})$ in Gleichung (3.64) nur von $|\boldsymbol{l}|$ ab, so läßt sich die zweidimensionale Integration auf ein eindimensionales Integral reduzieren:[17]

$$\int \frac{d^2\boldsymbol{l}}{(2\pi)^2}\; e^{i\,\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{r}}\, f(|\boldsymbol{l}|) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} dl\, l\; e^{i\,l\,r\cos\phi}\, f(l) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dl\, l\; \mathrm{J}_0(lr)\, f(l), \tag{3.69}$$

wobei die ϕ-Integration auf eine Bessel-J_0-Funktion führt.

Mit den Gleichungen (3.60) – (3.65) ist es möglich, durch eine einfache Transformation der Wirkungsquerschnitte der tiefinelastischen Streuung:

$$\sigma_{L,T}(x_{\mathrm{Bj}}, Q^2) = \int_{x_{\mathrm{Bj}}}^{1} \frac{dx}{x} \frac{x_{\mathrm{Bj}}}{x}\, G\left(\frac{x_{\mathrm{Bj}}}{x}, \mu_f^2\right) \int d(-t) \frac{d\,\widehat{\sigma}_{L,T}^{\gamma^* g}}{d(-t)}\,, \tag{3.70}$$

das Produkt aus Wellenfunktion $|\Psi_{L,T}|^2$ und Dipolwirkungsquerschnitt σ_{DP} zu berechnen. Zunächst wird es als Funktion des Transversalimpulses $\boldsymbol{l}$ ausgedrückt, was nach einer Fouriertransformation auf das gewünschte Resultat führt. Mit den differentiellen Wirkungsquerschnitten (3.49) und (3.50) lauten die transformierten Wirkungsquerschnitte (3.70) nach der Summation über alle

[17] o.B.d.A ist ϕ der Winkel zwischen $\boldsymbol{l}$ und $\boldsymbol{r}$ und $l = |\boldsymbol{l}|$

aktiven Flavours:[18]

$$\sigma_L(x_{\rm Bj},Q^2) = \frac{\pi^7}{2}\sum_{f=1}^{n_f}\frac{e_f^2}{Q^2}\frac{\alpha_{\rm em}}{\alpha_{\rm s}}\int\frac{dz}{(z(1-z))^2}\int d\boldsymbol{l}^2\, x_{\rm Bj}\,G\left(x_{\rm Bj},\mu_f^2\right)\frac{(\boldsymbol{l}^2\widehat{Q}^2)^2}{(\widehat{Q}^2+\boldsymbol{l}^2)^2} \tag{3.71}$$
$$\times\left(\frac{\mathcal{R}\left(\sqrt{\frac{\widehat{Q}^2+\boldsymbol{l}^2}{1-z}}\right)-\mathcal{R}(Q)}{\boldsymbol{l}^2-Q^2(1-z)^2}(1-z)-\frac{\mathcal{R}\left(\sqrt{\frac{\widehat{Q}^2+\boldsymbol{l}^2}{z}}\right)-\mathcal{R}(Q)}{\boldsymbol{l}^2-Q^2z^2}z\right)^2,$$

$$\sigma_\Sigma(x_{\rm Bj},Q^2) = \frac{\pi^7}{4}\sum_{f=1}^{n_f}\frac{e_f^2}{Q^2}\frac{\alpha_{\rm em}}{\alpha_{\rm s}}\int\frac{dz}{z(1-z)}\int d\boldsymbol{l}^2\, x_{\rm Bj}\,G\left(x_{\rm Bj},\mu_f^2\right)\frac{\boldsymbol{l}^2\widehat{Q}^2}{(\widehat{Q}^2+\boldsymbol{l}^2)^2} \tag{3.72}$$
$$\times\Bigg[\mathcal{R}\left(\sqrt{\frac{\widehat{Q}^2+\boldsymbol{l}^2}{1-z}}\right)^2+\mathcal{R}\left(\sqrt{\frac{\widehat{Q}^2+\boldsymbol{l}^2}{z}}\right)^2$$
$$+2\,(\widehat{Q}^2+\boldsymbol{l}^2)^2\,\frac{(\mathcal{R}\left(\sqrt{\frac{\widehat{Q}^2+\boldsymbol{l}^2}{1-z}}\right)-\mathcal{R}(Q))(\mathcal{R}\left(\sqrt{\frac{\widehat{Q}^2+\boldsymbol{l}^2}{z}}\right)-\mathcal{R}(Q))}{(\boldsymbol{l}^2-z^2Q^2)(\boldsymbol{l}^2-(1-z)^2Q^2)}\Bigg],$$

$$\sigma_T(x_{\rm Bj},Q^2) = \frac{1}{2}\left(\sigma_L(x_{\rm Bj},Q^2)+\sigma_\Sigma(x_{\rm Bj},Q^2)\right). \tag{3.73}$$

unter Verwendung der Relation

$$\frac{dx}{x}\,d(-t)=\frac{1}{x}\,\det\left(\frac{\partial(x,(-t))}{\partial(z,\boldsymbol{l}^2)}\right)\,dz\,d\boldsymbol{l}^2=\frac{1}{z(1-z)}\,dz\,d\boldsymbol{l}^2\,. \tag{3.74}$$

Die Funktion $\mathcal{R}(\mathcal{Q})$ (3.51) beschreibt die ρ-Integration. Ebenso wie bei der Herleitung des Dipolwirkungsquerschnitts (3.19) in [96] wurde von der Näherung

$$\frac{x_{\rm Bj}}{x}\,G\left(\frac{x_{\rm Bj}}{x},\mu_f^2\right)=x_{\rm Bj}\,G(x_{\rm Bj},\mu_f^2) \tag{3.75}$$

Gebrauch gemacht, um den Effekt des Instantons im Farbdipol-Bild klar heraus arbeiten zu können.

Die in den Integralen (3.71) und (3.72) auftretende Integration über das Quadrat $d\boldsymbol{l}^2$ läßt sich in die komplette zweidimensionale Integration $d^2\boldsymbol{l}$ überführen, da die Integranden nur von $\boldsymbol{l}^2$ abhängen:

$$\int d\boldsymbol{l}^2\; f(\boldsymbol{l}^2)=\int\frac{d\phi}{2\pi}\int dl\;2\,l\,f(\boldsymbol{l}^2)=\frac{1}{\pi}\int d^2\boldsymbol{l}\;f(\boldsymbol{l}^2),\quad\Rightarrow\quad d\boldsymbol{l}^2\to\frac{d^2\boldsymbol{l}}{\pi}\,. \tag{3.76}$$

Der nächste Schritt ist die Fouriertransformation der Integrale (3.71) und (3.72). Zunächst soll der für große Q^2 dominierende planare Anteil des transversalen Wirkungsquerschnitts berechnet

[18]Die in der I-Störungstheorie notwendige Berücksichtigung von minimalen Impulsüberträgen beeinflußt auch die Grenzen in der $\boldsymbol{l}$-Integration. Über die Anwendbarkeit der I-Störungstheorie im Farbdipol-Bild gibt der folgende Abschnitt Auskunft.

werden. Die gesamte r-Abhängigkeit ist durch die Fouriertransformierte[19]

$$\int \frac{d^2\boldsymbol{l}}{(2\pi)^2}\, e^{i\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{r}}\, \frac{1}{\widehat{Q}^2+\boldsymbol{l}^2}\,\mathcal{R}\left(\sqrt{\frac{\widehat{Q}^2+\boldsymbol{l}^2}{z}}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty d\rho\, D(\rho)\rho^5 \int_0^\infty dl\, l\, \mathrm{J}_0(l\, r)\, \frac{1}{\widehat{Q}^2+l^2}$$
$$\times\, \rho\sqrt{\frac{\widehat{Q}^2+\boldsymbol{l}^2}{z}}\,\mathrm{K}_1\left(\rho\sqrt{\frac{\widehat{Q}^2+\boldsymbol{l}^2}{z}}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty d\rho\, D(\rho)\rho^5\, \mathrm{K}_0\left(\widehat{Q}\sqrt{r^2+\tfrac{\rho^2}{z}}\right) \quad (3.77)$$

gegeben, wobei von der Relation (3.69) Gebrauch gemacht wurde. Eingesetzt in (3.68) läßt sich dann Gleichung (3.72) in den planaren Anteil des transversalen Wirkungsquerschnitt für I-induzierte Prozesse übersetzen. Mit

$$\left(|\Psi|^2\ \sigma_{\mathrm{DP}}\right)^{(I)}_{T,\ \mathrm{planar}} = \frac{\alpha_{\mathrm{em}}}{\alpha_s}\sum_{f=1}^{n_f} e_f^2\, \widehat{Q}^2\, x_{\mathrm{Bj}}\, G(x_{\mathrm{Bj}},\mu_f^2)\, \frac{\pi^6}{8}$$
$$\left\{\left[\int_0^\infty d\rho\, D(\rho)\rho^5\sqrt{\frac{r^2}{r^2+\frac{\rho^2}{z}}}\,\mathrm{K}_1\left(\widehat{Q}\sqrt{r^2+\tfrac{\rho^2}{z}}\right)\right]^2 + (z\leftrightarrow(1-z))\right\} \quad (3.78)$$

ist dann der Wirkungsquerschnitt im Farbdipol-Bild:

$$\sigma_i(x_{\mathrm{Bj}},Q^2) = \int dz \int d^2\boldsymbol{r}\ \left(|\Psi|^2\ \sigma_{\mathrm{DP}}\right)^{(I)}_i, \quad i = L, T, T-\mathrm{planar}. \quad (3.79)$$

In sehr guter Näherung gilt für den kompletten longitudinalen und transversalen Teil:[20]

$$\begin{aligned}\left(|\Psi|^2\ \sigma_{\mathrm{DP}}\right)^{(I)}_L &= |\Psi_L^{\mathrm{pQCD}}(z,r)|^2\ \frac{1}{\alpha_s}\, x_{\mathrm{Bj}} G(x_{\mathrm{Bj}},\mu_f^2)\, \frac{\pi^8}{12}\\ &\times\left\{\int_0^\infty d\rho\, D(\rho)\rho^5\ \left(f_L(z,r,\rho) - f_L(1-z,r,\rho)\right)\right\}^2, \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned}\left(|\Psi|^2\ \sigma_{\mathrm{DP}}\right)^{(I)}_\Sigma &= 2\ |\Psi_T^{\mathrm{pQCD}}(z,r)|^2\ \frac{1}{\alpha_s}\, x_{\mathrm{Bj}} G(x_{\mathrm{Bj}},\mu_f^2)\, \frac{\pi^8}{12}\\ &\times\left\{\left[\int_0^\infty d\rho\, D(\rho)\rho^5\, f_{\Sigma 1}(z,r,\rho)\right]^2 + \left[\int_0^\infty d\rho\, D(\rho)\rho^5\, f_{\Sigma 1}(1-z,r,\rho)\right]^2\right.\\ &\left.+\,2\left[\int_0^\infty d\rho\, D(\rho)\rho^5\, f_{\Sigma 2}(z,r,\rho)\right]\left[\int_0^\infty d\rho\, D(\rho)\rho^5\, f_{\Sigma 3}(1-z,r,\rho)\right]\right\}, \end{aligned} \quad (3.81)$$

$$\left(|\Psi|^2\ \sigma_{\mathrm{DP}}\right)^{(I)}_T = \frac{1}{2}\left[\left(|\Psi|^2\ \sigma_{\mathrm{DP}}\right)^{(I)}_\Sigma + \left(|\Psi|^2\ \sigma_{\mathrm{DP}}\right)^{(I)}_L\right]. \quad (3.82)$$

$\Psi^{\mathrm{pQCD}}_{L,T}$ sind die üblichen Wellenfunktionen (3.16) und (3.17) des Subprozesses $\gamma^* \rightarrow q\overline{q}$ in der perturbativen QCD. Dies deutet an, daß auch im Falle der Streuung mit einem Instanton im Hintergrund eine Faktorisierung in Wellenfunktion und polarisationsunabhängigen Dipolwirkungsquerschnitt – zumindest für große r – möglich ist.

[19]Siehe dazu die Integraltafel [98].
[20]Details der Rechnung finden sich im Anhang D.

Die Funktionen f_L, $f_{\Sigma 1}$, $f_{\Sigma 2}$ und $f_{\Sigma 3}$ ergeben sich durch Fouriertransformation:

$$f_L(z,r,\rho) \approx \frac{1}{\mathrm{K}_0(\widehat{Q}\,r)}\frac{1}{z}\left\{\mathrm{K}_0(\widehat{Q}\,\overline{r})\,\frac{r^2}{\overline{r}^2} - \mathrm{K}_1(\widehat{Q}\,\overline{r})\,\frac{2\,\rho^2}{z\,\widehat{Q}\,\overline{r}^3}\right\}\,, \qquad \overline{r} = \sqrt{r^2 + \tfrac{\rho^2}{z}}\,, \tag{3.83}$$

$$f_{\Sigma 1}(z,r,\rho) = \frac{1}{\mathrm{K}_1(\widehat{Q}\,r)}\,\frac{1}{\sqrt{z^2+(1-z)^2}}\,\mathrm{K}_1(\widehat{Q}\,\overline{r})\,\frac{r}{\overline{r}}\,, \tag{3.84}$$

$$f_{\Sigma 2}(z,r,\rho) \approx \frac{-1}{\mathrm{K}_1(\widehat{Q}\,r)}\,\frac{1}{\sqrt{z^2+(1-z)^2}}\,\frac{\partial}{\widehat{Q}\,\partial\,r}\left\{\mathrm{K}_0(\widehat{Q}\,\overline{r})\,\frac{(1-z)\,\rho^2}{z^2\,\overline{r}^2} + \mathrm{K}_1(\widehat{Q}\,\overline{r})\,\frac{2\,(1-z)\rho^2}{z^2\,\widehat{Q}\,\overline{r}^3}\right\}, \tag{3.85}$$

$$f_{\Sigma 3}(z,r,\rho) \approx \frac{1}{\mathrm{K}_1(\widehat{Q}\,r)}\,\frac{1}{\sqrt{z^2+(1-z)^2}}\,\left\{\mathrm{K}_0(\widehat{Q}\,\overline{r}) - Q\,\rho\,\mathrm{K}_1(Q\,\rho)\,\mathrm{K}_0(\widehat{Q}\,r)\right\}\,. \tag{3.86}$$

Die Funktion $f_{\Sigma 1}$ beschreibt den transversalen Anteil in Gleichung (3.78). Der longitudinale sowie der nichtplanare Anteil des transversalen Wirkungsquerschnitts sind Näherungslösungen (siehe Anhang D), die für kleine beziehungsweise große z gelten. In diesen Bereichen wird das zur exponentiellen Unterdrückung führende Argument $\sqrt{r^2 + \frac{\rho^2}{z}}$ bzw. $\sqrt{r^2 + \frac{\rho^2}{1-z}}$ in der Bessel-K_i-Funktion minimal. Der Bereich kleiner z bzw. $1-z$ entspricht dem der kollinearen Divergenz (3.41) für kleine $-t$. In z nimmt die Divergenz die Form (3.91) an.

Das auffälligste Merkmal der Gleichungen (3.80) - (3.82) ist der Wettbewerb zwischen den Skalen r und ρ. Dieser begründet tatsächlich ein Abflachen des Anstiegs des Dipolwirkungsquerschnitt, wenn r die Größenordnung der I-Skala $\langle\rho\rangle$ erreicht. Der nächste Abschnitt beleuchtet das Dipolbild in der konservativen I-Störungstheorie, die für kleinere Dipole benutzt werden kann, was eine Diskussion der Farbtransparenz im I-Hintergrund erlaubt. Danach werden Dipole betrachtet, deren Größe r die I-Skala $\langle\rho\rangle$ erreicht. Das unterschiedliche Verhalten für kleine und größere Dipole ist ein Spiegelbild des Wettbewerb zwischen den Skalen r und ρ, was abschließend diskutiert wird.

3.2.4 Beschreibung kleiner Dipole

In der üblichen I-Störungstheorie wird die I-Größenverteilung durch die störungstheoretische Form (2.53) beschrieben. In diesem Abschnitt wird die in den Produkten aus Wellenfunktion und Dipolwirkungsquerschnitt (3.80) - (3.82) enthaltene ρ-Integration mit dieser I-Größenverteilung ausgeführt. Anschließend wird diskutiert, für welche Werte der Dipolvariablen z und r die Ergebnisse der konservativen I-Störungstheorie gültig sind. Die Resultate erlauben die Diskussion des Bereichs kleiner r und insbesondere der Farbtransparenz.

Wie zuvor wird zunächst der dominierende planare Anteil des transversalen Wirkungsquerschnitts untersucht. Aus Gleichung (3.78) folgt mit der störungstheoretischen I-Verteilung (2.53):

$$\left(|\Psi|^2\ \sigma_{\mathrm{DP}}\right)^{I\text{-pert.}}_{T,\ \mathrm{planar}} = x_{\mathrm{Bj}}\, G(x_{\mathrm{Bj}},\mu_f^2)\,\frac{\alpha_{\mathrm{em}}}{\alpha_s}\,\frac{\pi^6}{8}\sum_{f=1}^{n_f} e_f^2\,\widehat{Q}^2 \left\{ d\left[\frac{2\pi}{\alpha_s(\mu_r)}\right]^6 e^{-\frac{2\pi}{\alpha_s(\mu_r)}}\right\}^2$$
$$\times\left\{\left[\int_0^\infty d\rho\,(\mu_r\,\rho)^b\sqrt{\frac{r^2}{r^2+\rho^2/z}}\mathrm{K}_1(\widehat{Q}\sqrt{r^2+\rho^2/z})\right]^2 + (z\leftrightarrow(1-z))\right\}. \quad (3.87)$$

Das im Rahmen der I-Störungstheorie auftretende Integral über ρ läßt sich analytisch ausführen:

$$\left(|\Psi|^2\ \sigma_{\mathrm{DP}}\right)^{I\text{-pert.}}_{T,\ \mathrm{planar}} = \mathcal{K}\,\Gamma\left(\tfrac{b+1}{2}\right)^2\,\left[z^{b+1}+(1-z)^{b+1}\right]\,(\widehat{Q}r)^{b+1}\,\mathrm{K}^2_{\frac{b-1}{2}}(\widehat{Q}r) \quad (3.88)$$

mit der nicht von z und r abhängenden Konstanten:

$$\mathcal{K} = x_{\mathrm{Bj}}\, G(x_{\mathrm{Bj}},\mu_f^2)\,\frac{\alpha_{\mathrm{em}}}{\alpha_s}\,\frac{\pi^6}{16}\sum_{f=1}^{n_f} e_f^2 \left\{ d\left[\frac{2\pi}{\alpha_s(\mu_r)}\right]^6 e^{-\frac{2\pi}{\alpha_s(\mu_r)}}\right\}^2 \left(2\frac{\mu_r^2}{\widehat{Q}^2}\right)^b. \quad (3.89)$$

In der üblichen störungstheoretischen QCD ist mit der Wellenfunktion (3.17) und dem Dipolwirkungsquerschnitt des Zweigluonenaustausches (3.19):

$$|\Psi_T^{\mathrm{pQCD}}(z,r)|^2\,\sigma_{\mathrm{DP}}(x_{\mathrm{Bj}},r) = x_{\mathrm{Bj}}\, G(x_{\mathrm{Bj}},\mu_f^2)\,\alpha_s\,\alpha_{\mathrm{em}}\,\tfrac{1}{2}\sum_{f=1}^{n_f} e_f^2[z^2+(1-z)^2]\,(\widehat{Q}r)^2\,\mathrm{K}_1^2(\widehat{Q}\,r)\,. \quad (3.90)$$

Ein Vergleich mit (3.88) zeigt die strukturelle Ähnlichkeit der Resultate der pQCD und der I-Störungstheorie. Die Bessel-Funktionen in (3.88) sind von einer deutlich höheren Ordnung als in der pQCD; selbiges gilt für den Faktor $z^{b+1}+(1-z)^{b+1}$ im Vergleich zu $z^2+(1-z)^2$. Dies reflektiert die höhere Ordnung des mit der kollinearen Divergenz verknüpften effektiven Propagators. Während in der üblichen Störungstheorie der Propagator des zwischen Photon und Gluon ausgetauschten offshell-Quarks zum Faktor $\frac{1}{-t}$ führt, liefert in der I-Störungstheorie das Integral $\mathcal{R}(\sqrt{-t})$ einen Faktor $\frac{1}{(-t)^{b+1}}$ (siehe Gleichung (3.41)). Die kollineare Divergenz des Dipolbildes in z folgt aus Gleichung (3.88) im Grenzwert kleiner $\widehat{Q}$:

$$\lim_{z\to 0}\left[\left(|\Psi|^2\ \sigma_{\mathrm{DP}}\right)^{I\text{-pert}}_{T,\ \mathrm{planar}}\right] \propto \lim_{z\to 0}\frac{1}{\widehat{Q}^{2\,b}}\left[z^{b+1}+(1-z)^{b+1}\right]\,(\widehat{Q}\,r)^{b+1}\,\mathrm{K}^2_{\frac{b-1}{2}}(\widehat{Q}\,r) \propto \frac{1}{z^{b-1}}\,, \quad (3.91)$$

wobei hier benutzt wurde, daß für kleine x und positive c

$$\lim_{x\to 0}\left[x^c\,\mathrm{K}_c(x)\right] = \Gamma(c)\,2^{c-1}\,. \quad (3.92)$$

ist. Gleichung (3.91) zeigt den direkten Zusammenhang zwischen kollinearer Divergenz $\frac{1}{(-t)^{b+1}}$ (3.41) und der Divergenz in z. Im Abschnitt 3.2.2 wurde explizit am Beispiel des Integrals $\mathcal{R}(\mathcal{Q})$ gezeigt, daß die mit dem Gebrauch der Gitterdaten verknüpfte Unterdrückung großer Instantonen zum Verschwinden der Divergenz führt.

Die kompletten longitudinalen und transversalen Ausdrücke in der üblichen I-Störungstheorie ergeben sich wie der planare Anteil (3.88) mit dem Ausdruck für $\left(|\Psi|^2\ \sigma_{\rm DP}\right)^{I\text{-pert.}}_{T,\ \rm planar}$ aus Gleichung (3.88) und der Konstanten $\mathcal{K}$ (3.89):

$$\begin{aligned}\left(|\Psi|^2\ \sigma_{\rm DP}\right)^{I\text{-pert.}}_{L} &= \mathcal{K}\,\Gamma\left(\tfrac{b+1}{2}\right)^2 \left[z^{\frac{b+1}{2}} - (1-z)^{\frac{b+1}{2}}\right]^2 \\ &\quad\times \left\{(\widehat{Q}r)^{b+1}\,\mathrm{K}^2_{\frac{b+1}{2}}(\widehat{Q}r) - (b+1)\,(\widehat{Q}r)^{b-1}\,\mathrm{K}^2_{\frac{b-1}{2}}(\widehat{Q}r)\right\}\,, \end{aligned} \tag{3.93}$$

$$\begin{aligned}\left(|\Psi|^2\ \sigma_{\rm DP}\right)^{I\text{-pert.}}_{\Sigma,\ \rm nonplanar} &= 4\,\mathcal{K}\,\left[z(1-z)\right]^{\frac{b+1}{2}}\ \Gamma\left(\tfrac{b+1}{2}\right)\ \Gamma\left(\tfrac{b+3}{2}\right) \\ &\quad\times (\widehat{Q}\,r)^{\frac{b-1}{2}}\mathrm{K}_{\frac{b-3}{2}}(\widehat{Q}\,r)\ \left\{(\widehat{Q}\,r)^{\frac{b+1}{2}}\ \mathrm{K}_{\frac{b+1}{2}}(\widehat{Q}\,r) - 2^{\frac{b+1}{2}}\ \Gamma\left(\tfrac{b+3}{2}\right)\right\}\,,\end{aligned} \tag{3.94}$$

$$\left(|\Psi|^2\ \sigma_{\rm DP}\right)^{I\text{-pert.}}_{T} = \frac{1}{2}\left(\left(|\Psi|^2\ \sigma_{\rm DP}\right)^{I\text{-pert.}}_{L} + \left(|\Psi|^2\ \sigma_{\rm DP}\right)^{I\text{-pert.}}_{\Sigma,\ \rm nonplanar}\right) + \left(|\Psi|^2\ \sigma_{\rm DP}\right)^{I\text{-pert.}}_{T,\ \rm planar}. \tag{3.95}$$

Gültigkeitsbereich

Die übliche I-Störungstheorie verlangt, daß nur kleine Instantonen beitragen, die durch die störungstheoretische $D(\rho)_{I\text{-pert.}}$ beschrieben werden, also $\rho \lesssim \rho_{\rm cut} \approx 0.35$ fm ist (siehe Abschnitt 2.3.2). Für die Abschätzung der Größe der im Dipolbild beitragenden Instantonen betrachten wir der Einfachheit halber den planaren Anteil zum transversalen Wirkungsquerschnitt. Anlehnend an Gleichung (3.42), die den Mittelwert der in der I-Störungstheorie beitragenden Instantonen als Funktion des relevanten Impulses angab, definiert man:

$$\langle\rho\rangle_{I\text{-pert.}}(z,r,Q^2) = \frac{\int_0^\infty d\rho\ \rho\ D(\rho)_{I\text{-pert.}}\ \rho^5\ \dfrac{\mathrm{K}_1\left(\widehat{Q}\sqrt{r^2+\frac{\rho^2}{z}}\right)}{\sqrt{r^2+\frac{\rho^2}{z}}}}{\int_0^\infty d\rho\ D(\rho)_{I\text{-pert.}}\ \rho^5\ \dfrac{\mathrm{K}_1\left(\widehat{Q}\sqrt{r^2+\frac{\rho^2}{z}}\right)}{\sqrt{r^2+\frac{\rho^2}{z}}}} = \sqrt{2\,\frac{z}{\widehat{Q}}}\,\sqrt{r}\,\frac{\Gamma\left(\frac{b+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)}\,\frac{\mathrm{K}_{\frac{b}{2}}(\widehat{Q}\,r)}{\mathrm{K}_{\frac{b-1}{2}}(\widehat{Q}\,r)}\,, \tag{3.96}$$

wobei das in (3.88) eingehende Integral benutzt wurde.

Aus der Forderung $\langle\rho\rangle_{I\text{-pert.}}(z,r,Q^2) \lesssim \rho_{\rm cut}$ folgen für feste Q^2 Bedingungen an die Variablen z und r. Die Ungleichung muß auch an der Stelle $1-z$ erfüllt sein, da in beiden Integralen in (3.78) nur kleine Instantonen beitragen sollen. Eine Analyse der effektiven I-Größe (3.96) für Werte von r, die klein gegen $\frac{1}{\widehat{Q}}$ sind, zeigt, daß das im Rahmen der üblichen I-Störungstheorie berechnete Ergebnis (3.88) gültig ist, wenn mit dem Impuls $\mathcal{Q}_{\rm cut} \approx \frac{b}{\rho_{\rm cut}}$ (siehe Gleichung (3.43))

$$\widehat{Q} = Q\,\sqrt{z(1-z)} \geq \mathcal{Q}_{\rm cut}\,, \tag{3.97}$$

ist. Für einen festen Wert von z steigt die mittlere I-Größe (3.96) mit r an, so daß für einen Wert von r die I-Störungstheorie zusammenbricht. Eine weitere Analyse der effektiven I-Größe zeigt, daß die I-Störungstheorie anwendbar bleibt, wenn

$$\frac{r}{\rho_{\rm cut}} \leq \frac{\widehat{Q}}{\mathcal{Q}_{\rm cut}} \tag{3.98}$$

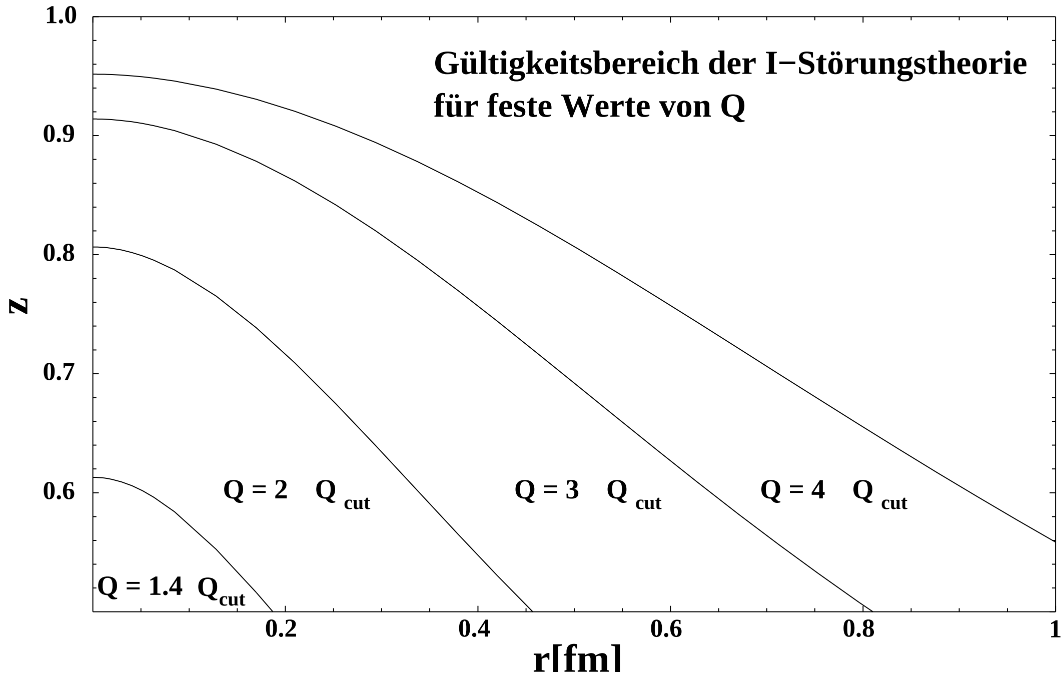


Abbildung 3.4: Gültigkeitsbereich der I-Störungstheorie für verschiedene Werte von Q, wobei $\mathcal{Q}_{\rm cut}$ zwischen 5 und 6 GeV liegt. Der Bereich $z \leq 0.5$ ergibt sich analog mittels der Ersetzung $z \leftrightarrow 1-z$.

ist. Abbildung 3.4 zeigt die Lösung der impliziten Gleichung $\langle\rho\rangle(z,r,Q^2) = \rho_{\rm cut}$ als Funktion von z und r; sie markiert die Grenze der Region, in der die I-Störungstheorie anwendbar ist. Offensichtlich weitet sich der Bereich mit zunehmenden Q aus. Für $Q \leq \mathcal{Q}_{\rm cut}$ gibt es keinen Bereich, der die Anwendung der I-Störungstheorie zuläßt.

Verhalten im Grenzwert kleiner r

Im vorherigen Abschnitt wurde für kleine r und große $\widehat{Q}$ die Anwendbarkeit der I-Störungstheorie im Farbdipol-Bild demonstriert. Somit ist es sinnvoll, den Grenzwert kleiner r im Rahmen der I-Störungstheorie zu diskutieren. Das Resultat wird dann mit dem entsprechenden Ausdruck (3.19) der pQCD verglichen. Ist $r \ll \frac{1}{\widehat{Q}}$ und auch $\widehat{Q}$ hinreichend groß, um die übliche I-Störungstheorie zu benutzen, läßt sich die Relation (3.92) benutzen, um den Grenzwert kleiner r der Gleichungen (3.88) und (3.93) - (3.95) zu berechnen. Sowohl der longitudinale als auch der transversale Teil strebt für $r \ll \frac{1}{\widehat{Q}}$ gegen eine Konstante:

$$\left(|\Psi|^2\,\sigma_{\rm DP}\right)_L^{I\text{-pert.}} \overset{r\ll\frac{1}{\widehat{Q}}}{\approx} \mathcal{K}\,\Gamma\left(\tfrac{b+1}{2}\right)^2\,\Gamma\left(\tfrac{b-1}{2}\right)^2\left[z^{\frac{b+1}{2}}-(1-z)^{\frac{b+1}{2}}\right]^2\;b(b-3)\,2^{b-3}\,, \tag{3.99}$$

$$\left(|\Psi|^2\,\sigma_{\rm DP}\right)_T^{I\text{-pert.}} \overset{r\ll\frac{1}{\widehat{Q}}}{\approx} \frac{1}{2}\left(|\Psi|^2\,\sigma_{\rm DP}\right)_L^{I\text{-pert.}}. \tag{3.100}$$

Während die Σ-Terme, die aus dem hadronischen Tensor durch Kontraktion mit $g^{\mu\nu}$ entstehen, im Grenzfall $r \to 0$ verschwinden, strebt der mit $P^\mu\,P^\nu$ kontrahierte Teil gegen einen Grenzwert, der die longitudinalen und transversalen Anteile bestimmt.

Die entsprechenden Relationen in der pQCD ergeben sich aus den üblichen Wellenfunktionen (3.16), (3.17) und dem für kleine r gültigen Wirkungsquerschnitt (3.90). Für kleine x ist $\mathrm{K}_1(x) \approx \frac{1}{x}$ und $\mathrm{K}_0(x) \approx \log(x)$ und damit:

$$|\Psi_L^{\mathrm{pQCD}}(z,r)|^2 \, \sigma_{\mathrm{DP}}(x_{\mathrm{Bj}}, r) \overset{r \ll \frac{1}{Q}}{\approx} x_{\mathrm{Bj}} \, G(x_{\mathrm{Bj}}, \mu_f^2) \, \alpha_s \, \alpha_{\mathrm{em}} \, 2 \sum_{f=1}^{n_f} e_f^2 z^2 (1-z)^2 Q^2 r^2 \log(\widehat{Q} r) \xrightarrow{r \to 0} 0 \,, \tag{3.101}$$

$$|\Psi_T^{\mathrm{pQCD}}(z,r)|^2 \, \sigma_{\mathrm{DP}}(x_{\mathrm{Bj}}, r) \overset{r \ll \frac{1}{Q}}{\approx} x_{\mathrm{Bj}} \, G(x_{\mathrm{Bj}}, \mu_f^2) \, \alpha_s \, \alpha_{\mathrm{em}} \, \tfrac{1}{2} \sum_{f=1}^{n_f} e_f^2 [z^2 + (1-z)^2] \,. \tag{3.102}$$

Der Integrand des totalen Wirkungsquerschnitt $\sigma_L(x_{\mathrm{Bj}}, Q^2) + \sigma_T(x_{\mathrm{Bj}}, Q^2)$ im Dipolbild (siehe Gleichung (3.79)) strebt sowohl in der pQCD als auch im Hintergrund eines Instantons gegen eine Konstante. Dies spiegelt die Farbtransparenz wider, nach der der Dipolwirkungsquerschnitt für kleine r mit r^2 verschwindet. Im Gegensatz zur pQCD verschwindet im I-Hintergrund der longitudinale Anteil des Integranden nicht. Dies hängt mit der Helizitätsstruktur der Amplitude des I-Prozesses zusammen. Der bei kleinen r nichtverschwindende longitudinaler Anteil stammt von dem helizitätsverletzenden Prozeß, der in der üblichen pQCD verboten ist (siehe z.B. [99]). Aufgrund der mit dem Instanton verbundenen Chiralitätsverletzung ist dieser Prozeß im I-Hintergrund erlaubt. Die Abweichungen im longitudinalen Teil sind für große $\widehat{Q}$ stark unterdrückt, da der Faktor $\mathcal{K}$ (3.89) in (3.99) sehr klein wird.

3.2.5 Übergang zu größeren Dipolen

Hier soll der Übergang zu größeren Dipolen erfolgen, der für die zentrale Frage der Saturation maßgeblich ist. Wie die Untersuchungen im vorherigen Abschnitt zeigten, ist dies nicht mehr im Rahmen der üblichen I-Störungstheorie möglich.

Setzt man die Parametrisierung $D(\rho)_{\mathrm{Gitter}}$ (2.61) in die Produkte (3.80) - (3.82) ein, werden Beiträge mit $\rho \geq \langle\rho\rangle$ unterdrückt. Somit ist für $r \gg \langle\rho\rangle$ auch $r \gg \rho$, obwohl ρ formal nicht beschränkt ist. Die in (3.80) - (3.82) auftretenden Funktionen $f_i(z,r)$ sind für $r \gg \frac{\rho}{\sqrt{z}}$ näherungsweise:

$$f_L(z,r,\rho) \overset{r \gg \frac{\rho}{\sqrt{z}}}{\approx} \frac{1}{z} \,, \tag{3.103}$$

$$f_{\Sigma\,1}(z,r,\rho) \overset{r \gg \frac{\rho}{\sqrt{z}}}{\approx} \frac{1}{\sqrt{z^2 + (1-z)^2}} \,, \tag{3.104}$$

$$f_{\Sigma\,2}(z,r,\rho) \overset{r \gg \frac{\rho}{\sqrt{z}}}{\approx} 0 \,, \tag{3.105}$$

$$f_{\Sigma\,3}(z,r,\rho) \overset{r \gg \frac{\rho}{\sqrt{z}}}{\approx} \frac{1}{\sqrt{z^2 + (1-z)^2}} \,. \tag{3.106}$$

Sie erreichen ihren Grenzwert für $r \gg \frac{\rho}{\sqrt{z}}$ (bzw. für die ebenfalls auftretende Funktion $f_i(1-z,r)$ für $r \gg \frac{\rho}{\sqrt{1-z}}$). Ist $(1-z) \ll z$, werden die Grenzwerte bereits im Bereich $r \approx \rho$ angestrebt.

Dies hat zur Folge, daß die Wellenfunktionen der üblichen Störungstheorie den Wirkungsquerschnitt weniger stark unterdrücken. Damit ist es möglich, die Funktionen $f_i(1-z,r)$ in (3.80) - (3.82) zu vernachlässigen, deren Anstieg erst später einsetzt. Mit diesen Überlegungen ist für den exemplarisch ausgewählten Fall $(1-z) \ll z$:[21]

$$\left(|\Psi|^2\, \sigma_{\rm DP}\right)^{(I)}_{L,T} \overset{\frac{r}{\langle\rho\rangle}\gg 1}{\approx} \left|\Psi^{\rm pQCD}_{L,T}(z,r)\right|^2 \frac{1}{\alpha_s}\, x_{\rm Bj} G(x_{\rm Bj},\mu_f^2)\, \frac{\pi^8}{12}\, \frac{1}{z^2} \left\{\int_0^\infty d\rho\, D_{\rm Gitter}(\rho)\, \rho^5\right\}^2 . \qquad (3.107)$$

Für den transversalen, aus Gleichung (3.82) folgenden Teil in (3.107) wurde nur der Teil σ_Σ berücksichtigt, was numerischen Betrachtungen zufolge gerechtfertigt ist und überdies mit den Überlegungen aus Abschnitt 3.2.1 überein stimmt. Dort wurde gezeigt, daß nur die hier berücksichtigten Beiträge in führender Ordnung $\frac{1}{Q^2}$ beitragen und nichtplanare sowie longitudinale Terme im Rahmen der I-Störungstheorie mit $\frac{Q^2_{\rm cut}}{Q^2}$ unterdrückt sind.

Das Produkt aus Wellenfunktion und Dipolwirkungsquerschnitt im I-Hintergrund faktorisiert also für große r in eine im Rahmen der üblichen Störungstheorie berechenbare Wellenfunktion und einen konstanten saturierten Wirkungsquerschnitt:

$$\left(|\Psi|^2\, \sigma_{\rm DP}\right)^{(I)}_{L,T} \overset{\frac{r}{\langle\rho\rangle}\gg 1}{\approx} \left|\Psi^{\rm pQCD}_{L,T}(z,r)\right|^2 \sigma^{(I)}_{\rm DP}\,, \qquad (3.108)$$

mit dem konstanten, I-induzierten Dipolwirkungsquerschnitt (für $1-z \ll z$ ist $\frac{1}{z^2} \approx 1$):

$$\sigma^{(I)}_{\rm DP} = \frac{1}{\alpha_s}\, x_{\rm Bj} G(x_{\rm Bj},\mu_f^2)\, \frac{\pi^8}{12} \left\{\int_0^\infty d\rho\, D_{\rm Gitter}(\rho)\, \rho^5\right\}^2 \approx \frac{1}{\alpha_s}\, x_{\rm Bj} G(x_{\rm Bj},\mu_f^2)\, \frac{\pi^8}{12}\, \mathcal{R}(0)^2 . \qquad (3.109)$$

Mittels Gleichung (3.56) läßt sich der Dipolwirkungsquerschnitt durch die charakteristischen Vakuumgrößen $\langle\rho\rangle$ (3.55) und κ (3.54) beschreiben:

$$\sigma^{(I)}_{\rm DP} \approx \frac{\pi^2}{3}\, \frac{1}{\alpha_s}\, x_{\rm Bj} G(x_{\rm Bj},\mu_f^2)\, \left[\pi^2 \langle\rho\rangle^2\right]\, \kappa^2 . \qquad (3.110)$$

Man erkennt eine starke Ähnlichkeit zum Dipolwirkungsquerschnitt (3.19), der sich im Rahmen der üblichen Störungstheorie für kleine r ergibt. Im Gegensatz dazu ist der im I-Hintergrund auftretende saturierte Dipolwirkungsquerschnitt proportional zur Fläche $\pi\langle\rho\rangle^2$ eines einzelnen Instantons im Vakuum. Die Faktor $\frac{1}{\alpha_s}$ spiegelt den nichtperturbativen Charakter des Instantons wider. Stammt der Faktor α_s in (3.19) unmittelbar vom quadrierten Gluonvertex, so liegt der Faktor $\frac{1}{\alpha_s}$ im Quadrat des klassischen I-Feld (2.32) begründet, welches das Gluon in der semiklassischen Näherung beschreibt. Weiterhin muß der Dipolwirkungsquerschnitt proportional zum von Instantonen eingenommen Teil κ des Vakuums sein.

[21]Für den anderen dominanten Fall $z \ll (1-z)$ ergibt sich mit $\frac{1}{(1-z)^2}$ ebenfalls ein Faktor der Ordnung 1.

3.2.6 Zusammenfassung

Die Integranden (3.80) - (3.82) der Wirkungsquerschnitte (3.79) im Farbdipol-Bild lauten mit den üblichen Wellenfunktionen (3.16) und (3.17) der pQCD [31, 32]:

$$\left(|\Psi|^2\,\sigma_{\rm DP}\right)^{(I)}_{L} \approx |\;\Psi_L^{\rm pQCD}(z,r)\;|^2\;\frac{1}{\alpha_{\rm s}}\,x_{\rm Bj}\,G(x_{\rm Bj},\mu^2)\,\frac{\pi^8}{12}$$
$$\times\left\{\int_0^\infty d\rho D(\rho)\,\rho^5\left(\frac{-\frac{d}{dr^2}\left(2r^2\frac{{\rm K}_1(\hat{Q}\sqrt{r^2+\rho^2/z})}{\hat{Q}\sqrt{r^2+\rho^2/z}}\right)}{{\rm K}_0(\hat{Q}r)}-(z\leftrightarrow 1-z)\right)\right\}^2, \tag{3.111}$$

$$\left(|\Psi_T|^2\,\sigma_{\rm DP}\right)^{(I)}_{T} \approx |\;\Psi_T^{\rm pQCD}(z,r)\;|^2\;\frac{1}{\alpha_{\rm s}}\,x_{\rm Bj}\,G(x_{\rm Bj},\mu^2)\,\frac{\pi^8}{12}$$
$$\times\left\{\left(\int_0^\infty d\rho D(\rho)\,\rho^5\,\frac{\frac{r\,{\rm K}_1(\hat{Q}\sqrt{r^2+\rho^2/z})}{\sqrt{r^2+\rho^2/z}}}{{\rm K}_1(\hat{Q}r)\sqrt{z^2+(1-z)^2}}\right)^2+(z\leftrightarrow 1-z)+\ldots\right\}. \tag{3.112}$$

Wie erwartet beobachtet man in den Gleichungen einen Wettbewerb zwischen den zwei entscheidenden Längenskalen: Der Größe r des Farbdipols und der typischen Größe $\langle\rho\rangle \approx 0.5$ fm des Instantons im Hintergrund. Wie in der pQCD dominieren die asymmetrischen Konfiguration aus den Regionen $z \gg 1-z$ und $1-z \gg z$.

Die konservative I-Störungstheorie mit $D(\rho) = D_{I-\text{pert.}}(\rho)$ ist anwendbar, wenn $\widehat{Q}$ hinreichend groß und r hinreichend klein ist. Ersetzt man $D(\rho)$ durch $D_{\text{Gitter}}(\rho)$ (2.61), ist diese Einschränkung zumindest nicht länger notwendig, um die Konvergenz der ρ-Integration zu gewährleisten, und man kann den Dipol langsam auf hadronische Dimensionen ausdehnen.

Die in den Gleichungen (3.111) und (3.112) auftretenden Funktionen verhalten sich wie folgt:

$$-\frac{d}{d\,r^2}\left(2\,r^2\frac{{\rm K}_1\left(\hat{Q}\sqrt{r^2+\rho^2/z}\right)}{\hat{Q}\sqrt{r^2+\rho^2/z}}\right) \approx \begin{cases} -\frac{{\rm K}_1\left(Q\,\rho\sqrt{1-z}\right)}{Q\,\rho\sqrt{1-z}}\,, & \frac{r^2\,z}{\rho^2}\to 0,\\ {\rm K}_0\left(\hat{Q}\,r\right)\,, & \frac{r^2\,z}{\rho^2}\ \text{groß}.\end{cases} \tag{3.113}$$

$$r\,\frac{{\rm K}_1\left(\hat{Q}\sqrt{r^2+\rho^2/z}\right)}{\sqrt{r^2+\rho^2/z}} \approx \begin{cases} \mathcal{O}(\frac{r\sqrt{z}}{\rho})\,, & \frac{r^2\,z}{\rho^2}\to 0,\\ {\rm K}_1\left(\hat{Q}\,r\right)\,, & \frac{r^2\,z}{\rho^2}\ \text{groß}.\end{cases} \tag{3.114}$$

Aufgrund des ausgeprägten Maximums von D_{Gitter} bei $\rho \approx \langle\rho\rangle$ ergeben sich für die Gleichungen

(3.111) und (3.112) folgende Grenzwerte (hier wird der Fall $z \gg 1-z$ diskutiert):

r	$(\mid \Psi_{L,T} \mid^2 \sigma_{\rm DP})^{(I)}$
$\to 0$	$\mathcal{O}(1)$, aber exponentiell unterdrückt für große $\hat{Q}$,
$\gtrsim \langle\rho\rangle$	$\mid \Psi_{L,T}^{\rm pQCD} \mid^2 \ \sigma_{\rm DP}^{(I)} \quad$ mit $\sigma_{\rm DP}^{(I)}(r,\ldots) = \frac{1}{\alpha_{\rm s}}\, x_{\rm Bj}\, G(x_{\rm Bj},\mu_f^2)\, \frac{\pi^8}{12} \left(\int_0^\infty d\rho\, D_{\rm Gitter}(\rho)\,\rho^5\right)^2.$

(3.115)

Offensichtlich zeigen die Gleichungen (3.111), (3.112) und (3.115), daß der Anstieg des Dipolwirkungsquerschnitt des einfachsten I-induzierten Prozesses ausflacht, wenn $r \approx \langle\rho\rangle$ ist und tatsächlich für große $\frac{r}{\langle\rho\rangle}$ einen saturierten, geometrischen Grenzwert erreicht, der proportional zur Fläche $\pi\,\langle\rho\rangle^2$ des Instantons ist. Ohne die Informationen vom Gitter bzgl. $D(\rho)$ wäre der Grenzwert unendlich. Beachtenswert ist der Faktor $\frac{1}{\alpha_{\rm s}}$ in $\sigma_{\rm DP}^{(I)}$, der den nichtperturbativen Charakter des Instantons widerspiegelt[22].

3.3 Instantoninduzierter Prozeß mit Endzustandsgluonen

Die Übersetzung der Resultate der I-Störungstheorie in das Farbdipol-Bild bezog sich auf den einfachsten Endzustand ohne Gluonen; nun werden die Gluonen mitberücksichtigt. Zunächst werden die Ergebnisse [19, 86] der I-Störungstheorie vorgestellt, die für nicht zu große Schwerpunktsenergien des relevanten I-Subprozesses gültig sind; anschließend werden sie ins Farbdipol-Bild transformiert. Dabei erfolgt die zur Diskussion der Saturation notwendige Fortsetzung zu höheren Energien, die den Gebrauch von Gitterdaten, welche die $I\bar{I}$-Abstandsverteilung beschreiben, involvieren. Es zeigt sich dabei, daß der Sphaleronkonfiguration in der QCD eine entscheidende Bedeutung für diesen Prozeß zukommt.

3.3.1 Zusammenfassung der bekannten Ergebnisse

Für den allgemeinen I-induzierten Prozeß mit n_g Gluonen und $2\,n_f$ Quarks im Endzustand ist die Valley-Methode, die der Aufsummierung der Endzustandsgluonen dient, von zentraler Bedeutung (siehe Abschnitt 2.4.2). Neben der üblichen Faktorisierung in einen harten Partonwirkungsquerschnitt und einer weichen Partonverteilung faktorisiert nun der Partonwirkungsquerschnitt selbst in einen I-induzierten Offshell-Wirkungsquerschnitt $q^*\,g \to (n_f-1)\,\overline{q}_R + n_f\,q_R + n_g\,g$ und einen Flußfaktor.

Als fundamentale Größe wird sich die Valley-Wirkung zwischen Instanton und Antiinstanton herausstellen. Wie schon die I-Größenverteilung $D(\rho)$ läßt sich diese im Rahmen der I-Störungstheorie herleiten. Ebenso erlauben es auch hier Gitterdaten, den Gültigkeitsbereich der Valley-Wechselwirkung abzuschätzen. Der quantitative Vergleich erfolgt erst im Rahmen des Farbdipol-Bildes, wobei sich zeigt, daß die Valley-Wirkung und damit die üblichen I-Störungstheorie anwendbar ist, solange der Abstand R zwischen Instanton und Antiinstanton groß genug ist.

[22] Die Wahl des Arguments in $\alpha_{\rm s}(\mu)$ ist nicht offensichtlich; naheliegend wäre die Wahl $\mu \sim \frac{1}{\langle\rho\rangle}$.

Im einfachsten Prozeß, in der die gesamte I-Dynamik durch $D(\rho)$ bestimmt war, war es möglich, die I-Störungstheorie anzuwenden, wenn alle relevanten Impulsüberträge größer waren als $\mathcal{Q}_{\rm cut}$. Auch bei der $I\bar{I}$-Wechselwirkung wird es möglich sein, durch geeignete Forderungen an äußere Variablen die störungstheoretische Valley-Form zu benutzen. Dafür darf dann die Energie $E \approx \sqrt{\frac{Q'^2}{x'}}$ des noch zu definierenden I-Subprozesses nicht zu groß sein.

Wirkungsquerschnitt

Mit der semiklassischen Näherung und der Valley-Methode, die im Abschnitt 2.4 vorgestellt wurden, stehen alle Bausteine zur Berechnung des Prozesses $\gamma^* g \xrightarrow{(I)} n_f\,(\overline{q}_R + q_R) + n_g\, g$ zur Verfügung. Die genaue Berechnung ist relativ umfangreich und findet sich in [19, 86]. Der Beitrag des allgemeinen I-induzierten Prozesses zum Wirkungsquerschnitt der $\gamma^* P$-Streuung ist:[23]

$$\sigma_{L,T}(x_{\rm Bj}, Q^2) = \int_{x_{\rm Bj}}^1 \frac{d\,x}{x}\,\frac{x_{\rm Bj}}{x}\,G\left(\frac{x_{\rm Bj}}{x}, \mu_f^2\right) \int dQ'^2 \frac{d\,\widehat{\sigma}_{L,T}^{\gamma^* g}(x, Q'^2, Q^2)}{d\,Q'^2}\,; \tag{3.116}$$

$$\frac{d\,\widehat{\sigma}_{L,\Sigma}^{\gamma^* g}}{d\,Q'^2} = \frac{8\pi^2\alpha_{\rm em}}{Q^2} \sum_{f=1}^{n_f} e_f^2 \int \frac{dx'}{x'}\,\frac{x}{x'}\,P_{L,\Sigma}\left(x, x', \frac{Q'^2}{Q^2}\right) \sigma_{q^* g}^{(I)}(x', Q'^2)\,, \tag{3.117}$$

$$\frac{d\,\widehat{\sigma}_{T}^{\gamma^* g}}{d\,Q'^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\,\widehat{\sigma}_{\Sigma}^{\gamma^* g}}{d\,Q'^2} + \frac{d\,\widehat{\sigma}_{L}^{\gamma^* g}}{d\,Q'^2}\right) \tag{3.118}$$

mit den $\gamma^* \to \overline{q}\,q$ Flußfaktoren:

$$P_{L}\left(x, x', \frac{Q'^2}{Q^2}\right) = \frac{3}{16\pi^3}\frac{x}{x'}\left[2\,\frac{x}{x'}\,\frac{Q'^2}{Q^2}\left(1 - \frac{Q'^2}{Q^2}\frac{x}{x'}\right)\frac{1-x'}{x'}\right], \tag{3.119}$$

$$P_{\Sigma}\left(x, x', \frac{Q'^2}{Q^2}\right) = \frac{3}{16\pi^3}\frac{x}{x'}\left[1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x'} - \frac{Q'^2}{Q^2}\right]. \tag{3.120}$$

Nach (2.71) ist neben der $q^* g$-Streuung (2.66) das Splitting $\gamma^* \to \overline{q}q$ ein Teil der $\gamma^* g$-Streuung, das durch die Flußfaktoren $P_{L,\Sigma}$ beschrieben wird. Die Transformation in das Farbdipol-Bild im Kapitel 3.3.2 wird zeigen, daß diese Flußfaktoren unmittelbar mit den Wellenfunktionen $|\Psi_{L,T}^{\rm pQCD}|^2$, die das Photonsplitting $\gamma^* \to \overline{q}q$ im Farbdipol-Bild beschreiben, zusammenhängen.

Aufgrund des komplexeren Endzustandes enthält der differentielle Wirkungsquerschnitt (Gleichung (3.117) und (3.118)) eine Integration über die Bjorken-x' Variable

$$1 \geq x' = \frac{Q'^2}{2\,p \cdot q'} \geq x \geq 0, \quad Q'^2 = -q'^2, \tag{3.121}$$

des I-induzierten Subprozesses:

$$\{\overline{q}^* \text{ oder } q^*\}\ \ (q') + g\ (p) \ \xrightarrow{(I)}\ n_f\,(q_R + \overline{q}_R) + n_g\, g\,. \tag{3.122}$$

[23] Siehe Gleichung (3.49) und (3.50) für die entsprechenden differentiellen Wirkungsquerschnitte des einfachsten I-induzierten Prozesses. Der Impulsaustausch $-t$ wird hier durch die Virtualität Q'^2 des Quarks q^* beschrieben.

Wie bereits erwähnt, enthält der Wirkungsquerschnitt $\sigma^{(I)}_{q^*g}(x', Q'^2)$ der Reaktion (3.122) den Hauptteil der I-Dynamik. Er lautet nach [19]:

$$\begin{aligned}\sigma^{(I)}_{q^*g}(x', Q'^2) = &\int_0^\infty d\rho\, D(\rho)\, \rho^5\, (\rho\, Q')\, \mathrm{K}_1(\rho\, Q') \int_0^\infty d\overline{\rho}\, D(\overline{\rho})\, \overline{\rho}^5\, (\overline{\rho}\, Q')\, \mathrm{K}_1(\overline{\rho}\, Q') \\ &\times \int d^4R\, \exp\{i(p+q')\cdot R\} \int dU\, \exp\left\{-\frac{4\pi}{\alpha_s}\Omega\left(\frac{R^2}{\rho\overline{\rho}}, \frac{\rho}{\overline{\rho}}, U\right)\right\} s \\ &\times \frac{1}{(\sqrt{\rho\,\overline{\rho}})^3} \left[\omega\left(\frac{R^2}{\rho\,\overline{\rho}}, \frac{\rho}{\overline{\rho}}, U\right)\right]^{2n_f-1} \frac{2}{3}\, \frac{\pi^5}{\alpha_s}\, \frac{Q'^2(p\cdot q')}{((p+q')^2)^{3/2}}\,.\end{aligned} \tag{3.123}$$

Die Integration über den Abstand R des $I\overline{I}$-Paares ist mit der Valley-Methode verbunden (siehe Abschnitt 2.4.2). Dort wurde die Wirkung[24] (2.78) und die konforme Variable ξ (2.77) eingeführt.

In Abschnitt 3.2.1 wurde gezeigt, daß sich im einfachsten I-induzierten Prozeß die Integration über die I-Position und damit auch über R ausführen läßt. Sie führte auf eine $\delta^{(4)}$-Funktion, die die Impulserhaltung $q+p = k_1+k_2$ manifestierte; dies trifft prinzipiell auch auf die R-Integration zu. Aufgrund des reicheren Endzustands ist nun die zugehörige Impulserhaltung komplexer [19]:

$$(2\pi)^4\, \delta^{(4)}\left(p+q' - \sum_i k_i\right) = \int d^4R\, \exp\left\{i\left(p+q'-\sum_i k_i\right)\cdot R\right\}, \tag{3.124}$$

wobei die k_i die Impulse der Endzustandsgluonen und -quarks bezeichnen. Während die Auswirkung der Endzustandsgluonen in der $I\overline{I}$-Wechselwirkung Ω absorbiert sind, treten die Endzustandsquarks, die im Rahmen der semiklassischen Näherung durch Nullmoden $\kappa^{(I)}$ bzw. $\phi^{(I)}$ beschrieben werden, in Form von Diskontinuitäten fermionischen Überlappfunktionen auf; dies folgt aus der Anwendung des optischen Theorems (siehe Schnitte Abbildung 2.5 im Endzustand). Diese Diskontinuitäten werden mittels der sogenannten Cutkosky-Regeln in Minkowski-Raumzeit ausgewertet [100]:

$$\begin{aligned}\omega\,(\xi, U) &= \mathrm{Disc}\left[\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-i\,k\cdot R}\, \mathrm{tr}\left[\overline{\kappa}^{(\overline{I})}(-k)(-i\,k)\kappa^{(I)}(k)\right]\right] = -i\,(2\pi)^2\, (\rho\,\overline{\rho})^{3/2} \\ &\times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3}\, e^{-i\,k\cdot R}\, \delta^{(+)}(k^2)\, \mathrm{tr}\left[k\,\overline{U}\,\right] = 4\, \frac{(\rho\,\overline{\rho})^{3/2}}{\left(-R^2+i\,\epsilon\, R_0\right)^2}\, \frac{\mathrm{tr}\left[R\,\overline{U}\,\right]}{2}\,.\end{aligned} \tag{3.125}$$

Setzt man die Überlappfunktion ins Euklidische fort, so erhält man:

$$\omega\,(\xi, U) = \frac{4}{\left(\xi - \frac{\rho^2+\overline{\rho}^2}{\rho\,\overline{\rho}}\right)^{3/2}}\, \frac{\mathrm{tr}\left[\widehat{R}\,\overline{U}\,\right]}{2} \tag{3.126}$$

mit der konformen Variablen ξ (2.77) und dem Einheitsvektor $\widehat{R}$ in Richtung des $I\overline{I}$-Abstandsvektors R. Die Potenz $2\,n_f-1$, mit der ω in Gleichung (3.123) auftritt, ergibt sich unmittelbar

[24] $\Omega(\xi, U) = S^{(I\overline{I})}(\xi, U) - 1$ ist so definiert, daß im wechselwirkungsfreien Grenzfall (also für große Abstände) Ω gegen 0 und damit der Exponentialfaktor in Gleichung (3.123) gegen 1 geht.

aus der Anzahl der auslaufenden Quarks (wie schon im einfachsten Prozeß wird das aus dem Photonsplitting hervorgehende Quark nicht als Nullmode behandelt).

Im nächsten Schritt wird zunächst die U-Integration in Gleichung (3.123) durchgeführt, die, da $\frac{4\pi}{\alpha_s}$ groß ist, in einer Sattelpunktsnäherung durchgeführt werden kann (siehe für weitere Details den folgenden Abschnitt). Berücksichtigt man nur die U-abhängigen Terme, so ist [19]:

$$\int dU \, \exp\left\{-\frac{4\pi}{\alpha_s}\Omega(\xi,U)\right\} \omega(\xi,U)^{2n_f-1} = \omega(\xi)^{2n_f-1} \exp\left\{-\frac{4\pi}{\alpha_s}\Omega(\xi)\right\} \frac{1}{9\sqrt{\pi}} \left[\frac{\alpha_s}{4\pi}\frac{6}{\xi\,\Omega'(\xi)}\right]^{7/2} . \tag{3.127}$$

Der Sattelpunktswert der U-Integration und damit die bevorzugte relative Orientierung des $I\bar{I}$-Paares im Farbraum lautet (für u_λ siehe (2.80)):

$$U^* = \widehat{R}_\mu \, \sigma_\mu = \widehat{R} \,, \qquad u^*_\mu = \widehat{R}_\mu \,. \tag{3.128}$$

Die Funktionen $\omega(\xi)$ und $\Omega(\xi)$ in Gleichung (3.127) sind dann die Werte der Funktionen $\omega(\xi,U)$ und $\Omega(\xi,U)$ am Sattelpunkt U^*. Aus den Gleichungen (2.78), (3.126) und (3.128) folgt [100]:

$$\Omega(\xi) = S^{(I\bar{I})}(\xi, U = U^*) - 1 = -6\,\frac{(3 - 2\,\eta^2 - \eta^4) + (2 + 6\,\eta^2)\,\log\eta}{(\eta^2-1)^3} \,, \tag{3.129}$$

$$\omega(\xi) = \omega(\xi, U = U^*) = \frac{4}{\left(\xi - \frac{\rho^2+\overline{\rho}^2}{\rho\,\overline{\rho}}\right)^{3/2}} \,, \tag{3.130}$$

mit η aus Gleichung (2.79). Mit den Funktionen (3.129) und (3.130) und der U-Integration (3.127) führt (3.123) auf [19, 86]:

$$\begin{aligned} \sigma^{(I)}_{q^*g}(x', Q'^2) = {} & \int_0^\infty d\rho\; D(\rho)\,\rho^5\,\rho\,Q'\,\mathrm{K}_1(\rho\,Q') \int_0^\infty d\overline{\rho}\; D(\overline{\rho})\,\rho^5\,\overline{\rho}\,Q'\,\mathrm{K}_1(\overline{\rho}\,Q') \\ & \times \int \frac{d^4R\,\sqrt{Q'^2}}{(\sqrt{\rho\,\overline{\rho}})^3}\, e^{i(p+q')\cdot R - \frac{4\pi}{\alpha_s}\,\Omega(\xi)}\, \omega\,(\xi)^{2n_f-1}\, \frac{2}{3}\frac{\pi^5}{\alpha_s} \sqrt{\frac{x'}{1-x'}}\frac{1}{2}\frac{1}{1-x'}\frac{1}{9\sqrt{\pi}} \left[\frac{\alpha_s}{4\pi}\frac{6}{\xi\,\Omega'(\xi)}\right]^{7/2} \,, \end{aligned} \tag{3.131}$$

wobei überdies von der Definition (3.121) der I-Subprozeßvariablen Gebrauch gemacht wurde.

Es ist wichtig zu erwähnen, daß die Sattelpunktsintegration (3.127) nur dann Gültigkeit besitzt, wenn $\frac{4\pi}{\alpha_s}\,\Omega(\xi) \gg 1$ ist. Dies ist der Fall, solange ξ nicht zu groß ist, wobei gleichzeitig die Anwendung der Valley-Methode $R^2 \gg \rho\,\overline{\rho}$ und somit $\xi \gg 2$ verlangt. Daher divergiert für $n_f \leq 2$ der Integrand in Gleichung (3.131) für $\xi \to \infty$, was bei korrekter Ausführung der U-Integration nicht der Fall wäre. Phänomenologisch hat dies im Rahmen der I-Störungstheorie kaum Auswirkungen, da die verbleibende Integration über R mittels Sattelpunktsmethode durchgeführt wird und der Sattelpunkt ξ^* nur für $x' \approx 1$ von einer Größenordnung ist, die die Sattelpunktsnäherung der U-Integration zusammen brechen läßt; für solche x' ist der Wirkungsquerschnitt aber stark unterdrückt.

Sattelpunkt in der Instanton-Störungstheorie

Wie bereits erwähnt ist es möglich, für bestimmte Werte von x' und Q'^2 den Wirkungsquerschnitt $\sigma^{(I)}_{q^*g}$ im Rahmen der herkömmlichen I-Störungstheorie, also nur mittels der störungstheoretischen

I-Größenverteilung $D(\rho)$ (2.61) und der Valley-Wirkung (2.78) zu berechnen. Dies geschieht mittels der Sattelpunktsmethode. Der notwendige große Faktor im Exponenten ist im Falle des Integrals (3.131) $\frac{4\pi}{\alpha_s}$. Damit lautet die Funktion Γ, deren Minimierung auf den Sattelpunkt führt, in der I-Störungstheorie [19]:

$$-\Gamma = i(p+q')\cdot R - Q'(\rho+\overline{\rho}) - \left(\frac{4\pi}{\alpha_s(\mu_r)} - \Delta_1\,\beta_0\,\log(\rho\overline{\rho}\mu_r^2)\right) S^{(I\bar{I})}(\xi) - \Delta_2\,\log(\rho\overline{\rho}\mu_r^2)\,. \quad (3.132)$$

Sie folgt aus Gleichung (3.131), wenn man für $D(\rho)$ die störungstheoretische Form (2.53) einsetzt. Der in führender Ordnung auftretende Sattelpunkt wurde bereits in [82, 101] diskutiert. Für die störungstheoretische Form (2.53), die die Abhängigkeit von der Renormierungsskala μ_r deutlich reduziert, ergeben sich die Koeffizienten Δ_1 und Δ_2 aus den Exponenten b (2.54) der I-Größenverteilung.

Das Minimum von (3.132) und damit der bestimmende Sattelpunkt in den Variablen R, ρ und $\overline{\rho}$ ergibt sich am einfachsten im q^*g-Schwerpunktssystem. Dort ist:

$$\rho^* = \overline{\rho}^* \sim \frac{1}{\alpha_s\, Q'}\,, \quad (3.133)$$

$$R^*_\mu = (-i\,\rho^*\,\sqrt{\xi^*(x')-2}, \mathbf{0})\,. \quad (3.134)$$

Die vollständige Form des sich aus (3.132) ergebenen Sattelpunktes ξ^* ist kompliziert und findet sich in [19]. Für große Werte von Q' ist:

$$\xi^* \overset{Q'\gg\mathcal{Q}_{\rm cut}}{\approx} 2\,\frac{1+x'}{1-x'}\,. \quad (3.135)$$

Nun verlangt der Gebrauch der Valley-Wirkung, daß ξ groß genug ist. Diese Bedingung übersetzt sich mittels Gleichung (3.135) in eine Forderung an die Bjorken-Variable x':

$$x' \geq x_{\rm cut}, \quad (3.136)$$

analog zur im einfachsten Prozeß auftretenden Bedingung, wonach alle Impulse größer als $\mathcal{Q}_{\rm cut}$ sein müssen, so daß keine großen Instantonen $\rho \geq \rho_{\rm cut}$ beitragen, die nicht durch die störungstheoretische I-Größenverteilung beschrieben werden können. Eine genaue gittergestützte Analyse in [50] zeigt, daß

$$x_{\rm cut} \approx 0.35 \quad (3.137)$$

die Anwendung der Valley-Methode in der I-Störungstheorie sicherstellt.

Führt man die R-Integration in Gleichung (3.131) in der Sattelpunktsnäherung aus, so ist in Einschleifenordnung [86] für $x' \geq x_{\rm cut}$ und $Q'^2 \geq \mathcal{Q}^2_{\rm cut}$:[25]

$$\begin{aligned}\sigma^{(I)}_{q^*g}(x', Q'^2) = {}& \frac{1}{Q'^2}\,\frac{d^2\,\sqrt{6}\,\pi^{15/2}}{64}\,\frac{x'^2}{(1-x')^{15/2}}\,\left(\frac{dF}{dx'}\right)^{-5/2}\left(\frac{(1-x')^3}{4\,x'^2}\right)^{n_f}\left(\frac{4\,\pi}{\alpha_s(\mu_r)}\right)^{21/2} \\ & \times\left(\frac{4\,\pi}{\alpha_s(\mu_r)}\,\frac{\mu_r}{Q'}\,x'(1-x')\,\frac{dF}{dx'}\right)^{2\,\beta_0\,F(x')}\exp\left\{-\frac{4\,\pi}{\alpha_s(\mu_r)}\,F(x')\right\}\end{aligned} \quad (3.138)$$

[25]Für die aus phänomenologischen Gründen gebotene höhere Ordnung siehe [19].

mit der sogenannten „holy-grail“ Funktion:

$$F(x') = S^{(I\bar{I})}(\xi^*(x'))\,, \tag{3.139}$$

die den Wert der Valley-Wirkung (2.78) am Sattelpunkt beschreibt. Sie bewirkt im dominierenden Faktor $\exp\left\{-\frac{4\pi}{\alpha_s}F(x')\right\}$ eine Abschwächung der exponentiellen Unterdrückung. Die mit der Emission vieler Eichbosonen verknüpfte Erhöhung des Wirkungsquerschnitts wurde bereits in [26] diskutiert.

Eine weitergehende Diskussion der Sattelpunktsgleichung sowie des Sattelpunktes außerhalb der üblichen I-Störungstheorie findet sich im Rahmen des Dipolmodells im folgenden Abschnitt. Es wird sich zeigen, daß der starke Anstieg des Wirkungsquerschnitts $\sigma^{(I)}_{q^*g}(x', Q'^2)$ mit der Energie des I-Subprozesses $E \approx \frac{\sqrt{Q'^2}}{\sqrt{x'}}$ nur anhält, bis die Energie die Masse des Sphaleron $M_{\mathrm{Sph}}(\rho)$ erreicht. Die Masse des Sphalerons in der QCD bestimmt die Höhe der Potentialbarriere zwischen den inäquivalenten Vakua. Die Bedeutung des Sphalerons für die Erhöhung des Wirkungsquerschnitts mit zunehmender Energie bzw. kleiner werdenen x' wurde in [25] diskutiert.

3.3.2 Transformation ins Farbdipol-Bild

Nun werden die eben vorgestellten Ergebnisse ins Farbdipol-Bild transformiert. Zuvor wurde illustriert, daß die mit den Gluonen verbundene Valley-Methode zu einer nichttrivalen Abhängigkeit von der Energie des I-Subprozesses führt, die mit der Bjorken-Variablen x' verknüpft ist:

$$x' = \frac{Q'^2}{E^2 + Q'^2}\,, \quad E = \sqrt{(q'+p)^2}\,. \tag{3.140}$$

Es ist im Farbdipol-Bild notwendig, die Resultate der I-Störungstheorie zu größeren Energien fortzusetzen. Dazu werden Gitterinformation über die $I\bar{I}$-Abstandsverteilung berücksichtigt, die über die in der I-Störungstheorie benutzte Valley-Wirkung hinausgehen. Die Ausführungen orientieren sich an [32].

Parallel zur Transformation der Wirkungsquerschnitte (3.49) und (3.50) des einfachsten instantoninduzierten Prozesses müssen die in der kollinearen Faktorisierung auftretenden Variablen in die Dipolvariablen $z, \boldsymbol{l}$ übersetzt werden. Neben den bereits im Abschnitt 3.2.3 eingeführten Variablen kommt nun die Bjorken-Variable x' des Prozesses $q^*_L(q') + g(q) \xrightarrow{(I)} n_f q_R + (n_f-1)\bar{q}_R + n_g g$ hinzu. An die Stelle des Impulsübertrags $-t$ tritt nun die Virtualität Q'^2 des Quarks q^*.

Die den Gleichungen (3.60) - (3.63) entsprechenden Transformationen sind:

$$Q'^2 = \frac{1}{1-z}(\widehat{Q}^2 + \boldsymbol{l}^2)\,, \tag{3.141}$$

$$\frac{x}{x'} = \frac{\widehat{Q}^2}{\widehat{Q}^2 + \boldsymbol{l}^2}\,, \tag{3.142}$$

$$z = \frac{Q'^2}{Q^2}\frac{x}{x'}\,. \tag{3.143}$$

Zusammen mit der Definition von x' (3.140) erlauben sie die Übersetzung des Wirkungsquerschnitts (3.118) der tiefinelastischen Streuung in das Dipolbild. Nach einer Vertauschung der Integrationen über x' und Q'^2 ist der totale Wirkungsquerschnitt näherungsweise [32]:[26]

$$\sigma_{L,T}(x_{\mathrm{Bj}}, Q^2) \approx \int dz \int \frac{d^2\boldsymbol{l}}{(2\pi)^2} \mid \widetilde{\Psi}^{\mathrm{pQCD}}_{L,T}(z,l) \mid^2 \widetilde{\sigma}^{(I)}_{\mathrm{DP}}(l, x_{\mathrm{Bj}}, \ldots)\,. \tag{3.144}$$

Die Wellenfunktionen $\widetilde{\Psi}_{L,T}$ im Impulsraum sind die Fouriertransformierten der Wellenfunktionen in der üblichen störungstheoretischen QCD:

$$\left|\widetilde{\Psi}_T(z,l)\right|^2 = \frac{6\,\alpha_{\mathrm{em}}}{(\widehat{Q}^2 + l^2)^2} \sum_{f=1}^{n_f} e_f^2\, l^2\, [z^2 + (1-z)^2]\,, \tag{3.145}$$

$$\left|\widetilde{\Psi}_L(z,l)\right|^2 = \frac{6\,\alpha_{\mathrm{em}}}{(\widehat{Q}^2 + l^2)^2} \sum_{f=1}^{n_f} e_f^2\, 4Q^2\, z^2(1-z)^2\,. \tag{3.146}$$

Der „Dipolwirkungsquerschnitt“ $\widetilde{\sigma}^{(I)}_{\mathrm{DP}}$ als Funktion von l enthält den Wirkungsquerschnitt des I-induzierten Subprozesses sowie die Integration über die Bjorken-Variablen x', die mittels (3.140) in eine Integration über die Energie E transformiert wurde:

$$\widetilde{\sigma}^{(I)}_{\mathrm{DP}}(l, x_{\mathrm{Bj}}, \ldots) \approx x_{\mathrm{Bj}}\, G(x_{\mathrm{Bj}}, \mu_f^2) \int_0^{\sqrt{s'_{\max}}} dE \left[\frac{((p+q')^2)^{3/2}}{4\,(p\cdot q')\,Q'^2}\, \sigma^{(I)}_{q^* g}\left(E, \frac{\widehat{Q}^2 + l^2}{z}\right)\right]. \tag{3.147}$$

Hierbei wurde erneut die Näherung (3.75) benutzt. Für kleine x_{Bj} ist die maximale Schwerpunktsenergie $\sqrt{s'_{\max}}$ nur durch die I-Dynamik beschränkt. Verlangt man wieder die strikte Einhaltung der I-Störungstheorie, so muß $x' \geq x'_{\mathrm{cut}}$ bzw. $E \leq \sqrt{s'_{\max}} = Q' \sqrt{\frac{1-x'_{\mathrm{cut}}}{x'_{\mathrm{cut}}}}$ sein. Setzt man den Wirkungsquerschnitt (3.123) des I-Subprozesses ein, erhält man aus Gleichung (3.147) den differentiellen Dipolwirkungsquerschnitt in der $(z, \boldsymbol{l})$-Ebene:

$$\begin{aligned}\frac{d\,\widetilde{\sigma}^{(I)}_{\mathrm{DP}}}{d\,E} \approx \frac{\pi^5}{6\,\alpha_s}\, x_{\mathrm{Bj}}\, G(x_{\mathrm{Bj}}, \mu_f^2) \int_0^\infty d\rho\, D(\rho)\, \rho^5\, (\rho\, Q')\, \mathrm{K}_1(\rho\, Q') \int_0^\infty d\overline{\rho}\, D(\overline{\rho})\, \overline{\rho}^5\, (\overline{\rho}\, Q')\, \mathrm{K}_1(\overline{\rho}\, Q') \\ \times \int \frac{d^4R}{(\sqrt{\rho\,\overline{\rho}})^3}\, e^{i\,(p+q')\cdot R} \int d\,U\, \exp\left\{-\frac{4\pi}{\alpha_s}\, \Omega_{\mathrm{valley}}\left(\xi\left(\frac{R^2}{\rho\,\overline{\rho}}, \frac{\rho}{\overline{\rho}}\right), U\right)\right\} \omega(\xi, U)^{2\,n_f - 1}\end{aligned} \tag{3.148}$$

mit der zuvor definierten fermionischen Überlappfunktion $\omega(\xi, U)$ (3.125) und der $I\bar{I}$-Wechselwirkung $\Omega_{\mathrm{valley}} = S^{(I\bar{I})} - 1$ (2.78). Die zweite Zeile in Gleichung (3.148) ist in der Hauptsache mit den Endzustandsgluonen assoziiert.

Sattelpunkt und das QCD-Sphaleron

Der nächste Schritt ist die Transformation der Gleichung (3.148) in die $(z, \boldsymbol{r})$ Farbdipol-Ebene, um so die Verallgemeinerung der Gleichung (3.107) zu erhalten. Dabei ist es notwendig, sich über

[26] Dies gilt näherungsweise im dominierenden Bereich $z \gg (1-z)$ (entsprechend für $(1-z) \gg z$) in der planaren Näherung. Schon im einfachsten Prozeß zeigte sich eine deutliche Ähnlichkeit der planaren Terme im I-Hintergrund zur üblichen störungstheoretischen QCD.

weitere, von den zusätzlichen Gluonen stammende $l^2 = l^2\left(Q'^2, \frac{x}{x'}, Q^2\right)$-Abhängigkeiten klar zu werden[27]. Dazu werden einige Eigenschaften von $\frac{d\,\tilde{\sigma}^{(I)}_{\rm DP}}{d\,E}$ im Bereich weicher Q' mittels Gitterergebnissen untersucht analog zum einfachsten I-induzierten Prozeß, in dem mit den Gitterdaten der Dipolwirkungsquerschnitt für große r bestimmt wurde.

Neben der I-Größenverteilung $D(\rho)$ stellt die $I\bar{I}$-Wechselwirkung Ω in Gleichung (3.148) die zweite wichtige Größe des I-Kalküls dar. Abbildung 3.5(a) zeigt die normierten UKQCD-Gitterdaten [22,49,50] der $I\bar{I}$-Abstandsverteilung aufgetragen gegen den Euklidischen $I\bar{I}$-Abstand $R \equiv \sqrt{R^{2\,(E)}}$ in Einheiten der mittleren I-Größe $\langle\rho\rangle$. Diese Simulation des Vakuums wurde in quenched QCD also für $n_f = 0$ durchgeführt. Zusammen mit der Gittersimulation ist in Abbildung 3.5(a) die Vorhersage der $I\bar{I}$-Abstandsverteilung des $I\bar{I}$-Valley-Zugangs [50] dargestellt:

$$\frac{d\,n^{\rm valley}_{I\bar{I}}}{d^4x\,d^4R} = \int_0^\infty d\rho\, D_{\rm Gitter}(\rho) \int_0^\infty d\overline{\rho}\, D_{\rm Gitter}(\overline{\rho}) \int d\,U\;\exp\left\{-\frac{4\pi}{\alpha_{\rm s}\left(\frac{s}{\sqrt{\rho\,\overline{\rho}}}\right)}\,\Omega_{\rm valley}\left[\xi\left(\frac{R^2}{\rho\overline{\rho}}, \frac{\rho}{\overline{\rho}}\right), U\right]\right\}. \tag{3.149}$$

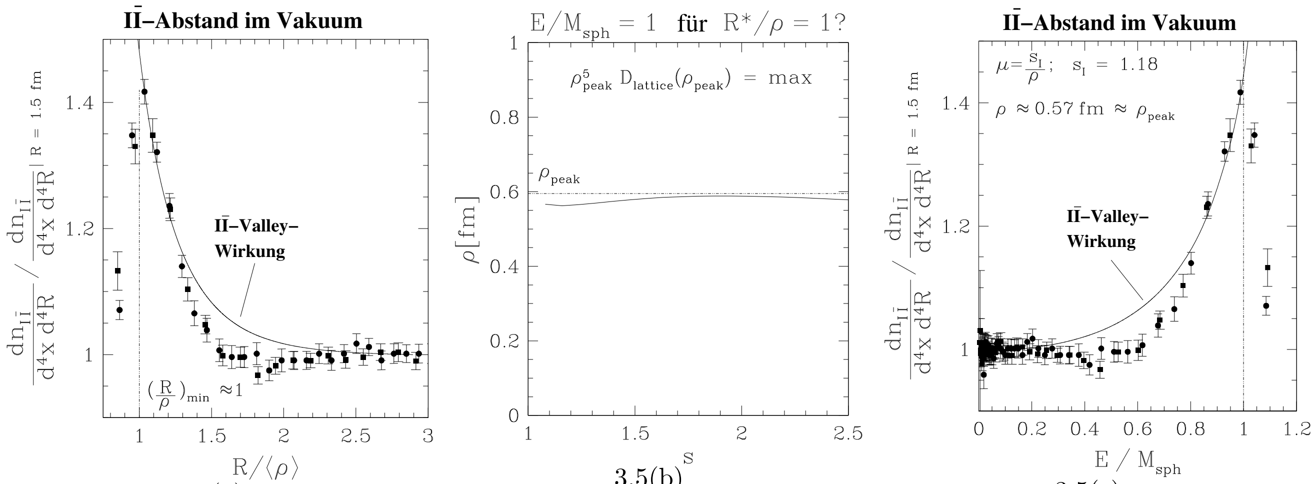
Beachtenswert ist die Ähnlichkeit mit $\frac{d\,\tilde{\sigma}^{(I)}_{\rm DP}}{d\,E}$ (3.148), insbesondere im Bereich weicher Q', in dem die dynamische, exponentielle Unterdrückung der großen Instantonen in Gleichung (3.148) langsam verschwindet, also $(\rho Q')\,{\rm K}_1(\rho Q') \approx 1$ ist. Dies führt dazu, daß ρ nicht mehr durch den harten Sattelpunktswert $\sim \frac{1}{\alpha_s\,Q'}$ (3.133) dominiert wird, sondern $\rho \approx \overline{\rho} \approx \rho_{\rm peak} \approx \langle\rho\rangle$ ist.

Abb. 3.5(a) zeigt den Gültigkeitsbereich der $I\bar{I}$-Valley-Wechselwirkung $\Omega_{\rm valley}$. Es zeigt sich, daß die $I\bar{I}$-Valley-Näherung bis $\left(\frac{R}{\langle\rho\rangle}\right)_{\rm min} \approx 1$ zuverlässig ist. Dort weist die $I\bar{I}$-Abstandsverteilung ein scharfes Maximum auf, während die Valley-Vorhersage (3.149) weiter bis ins Unendliche anwächst. Nach Gleichung (2.77) ist für $\rho \approx \overline{\rho}$ das Maximum der Gitterdaten bei $R \approx \langle\rho\rangle$ mit $\xi_{\rm peak} \approx 3$ assoziiert. An diesem Punkt ist für die attraktivste $I\bar{I}$-Orientierung $U = U^*$ die Wirkung $S^{(I\bar{I})}_{\rm valley}(\xi_{\rm peak} = 3, U^*) \approx \frac{1}{2}$. Diese Farborientierung dominiert das U-Integral in (3.148), wenn $\frac{4\pi}{\alpha_{\rm s}}$ groß genug ist, um einen ausgeprägten Sattelpunkt zu formen. Für große ξ flacht der Sattelpunkt mit $\Omega_{\rm valley}$ zu sehr aus, um die U-Integration wie in Gleichung (3.127) auszuführen. Der Effekt ist phänomenologisch nicht sehr wichtig, da die Beiträge großer ξ bzw. R^2 in der R-Integration stark unterdrückt sind.

Daß die $I\bar{I}$-Wirkung bei $\xi \approx 3$ ihren maximalen Wert $\frac{1}{2}$ erreicht, ist ein wichtiges Resultat und stimmt hervorragend mit einer allgemeinen theoretischen Vorhersage [57,102] überein, nach der der maximale I-induzierte Wirkungsquerschnitt eine sogenannte „square-root“-Erhöhung gegenüber der reinen Tunnelamplitude bei $E = 0$ zeigt. Dort ist die Wirkung $S^{(I\bar{I})}_{\rm valley}(\xi = \infty, U^*) = 1$. Der relevante Exponentialfaktor $\exp\left\{-\frac{4\pi}{\alpha_s}\,S^{(I\bar{I})}_{\rm valley}\right\}$ ist damit bei hohen Energien, wenn die relevante Wirkung $S^{(I\bar{I})}_{\rm valley} = \frac{1}{2}$ ist, um eine Potenz $\frac{1}{2}$ unterdrückt.

Das Maximum der auf dem Gitter gemessenen $I\bar{I}$-Abstandsverteilung in Abbildung 3.5(a) steht im unmittelbaren Zusammenhang mit dem Gipfel der Potentialbarriere zwischen den topologisch inäquivalenten Vakua (siehe Abbildung 2.1). Die Höhe der Barriere ist durch die Sphaleronmasse $M_{\rm sph}$ (2.30) bestimmt.

[27] Im einfachsten Prozeß stammen die l^2-Abhängigkeit von der üblichen störungstheoretischen Wellenfunktion und von der auch in Gleichung (3.148) auftretenden Funktion $\rho Q'\,{\rm K}_1(\rho Q')$



3.5(a) 3.5(b) 3.5(c)

Abbildung 3.5: (a): UKQCD-Gitterdaten [22, 49, 50] der (normalisierten) $I\bar{I}$-Abstandsverteilung aufgetragen gegen den $I\bar{I}$-Abstand R in Einheiten der mittleren I-Größe $\langle\rho\rangle$ in quenched QCD ($n_f = 0$). Die $I\bar{I}$-Valley-Näherung beschreibt die Verteilung gut bis $\frac{R}{\langle\rho\rangle} \approx 1$, wo die Verteilung zusammenbricht.
(b): Für den im Regime weicher Q' relevanten Fall $\rho \approx \rho_{\rm peak}$ ist die Sattelpunktsrelation (3.150) für den durch das Gitter ausgezeichneten Wert $\frac{R^*}{\rho} = 1$ assoziiert mit $\frac{E}{M_{\rm sph}} = 1$. Die Kurve zeigt die Werte für die der Peak bei $\frac{R}{\rho}$ mit $E \approx M_{\rm Sph}$ übereinstimmt. Die schwache s-Abhängigkeit zeigt die näherungsweise geltende Invarianz der Renormierungsgruppe ($\mu_r = \frac{s}{\rho}$).
(c): Die $I\bar{I}$-Abstandsverteilung als Funktion der Energie E in Einheiten der QCD-Sphaleronmasse $M_{\rm sph}$. Während die Valley-Vorhersage für $E \geq M_{\rm sph}$ weiter ansteigt, zeigen die Gitterdaten erstmals direkt, daß der $I\bar{I}$-Valley-Zugang unmittelbar bis zur Energie $E \approx M_{\rm sph}$ gerechtfertigt ist, von wo auch die dominierenden Beiträge zum Streuprozeß herstammen.

Das Integral (3.148) wird für große Q'^2 von einem einzigen Sattelpunkt in allen Integrationsvariablen dominiert. Für große Q'^2 ist der bekannte Sattelpunkt aus [19] realisiert (siehe (3.133) und (3.134)), der sich aus der Stationarität des aus (3.148) hervorgehenden effektiven Exponenten Γ ergibt. Insbesondere besitzt die Kombination der Gleichungen $\frac{\partial\Gamma}{\partial\xi} = 0$ und $\frac{\partial\Gamma}{\partial\rho} = 0$ für große Q' eine eindeutige Lösung[28] $\xi^* = \xi^*(x', \dots)$ für alle physikalischen Werte von x', $x \leq x' \leq 1$. Die Situation ändert sich drastisch im Bereich weicherer Q', wo die Approximation $\rho \approx \langle\rho\rangle$ in (3.148) angebracht ist. Da $\rho \approx \langle\rho\rangle$ festgelegt ist, verbleibt nur die Sattelpunktsgleichung $\frac{\partial\Gamma}{\partial\xi} = 0$, die zusammen mit Gleichung (2.30) auf eine Verbindung zwischen $\frac{E}{M_{\rm sph}(\rho)}$ und $\xi^* = 2 + \frac{R^{2\,(E)\,*}}{\rho^2}$ für $\rho \to \rho_{\rm peak}$ führt. Nach [19] ist in der Zweischleifenordnung mit der Renormierungsskala $\mu = \frac{s}{\rho}$:[29]

$$\frac{E}{M_{\rm sph}} = \frac{32}{3}\,\frac{d\,\Omega_{\rm valley}(\xi^*)}{d\,\xi}\,\sqrt{\xi^* - 2}\,\left[1 - \frac{1}{2\,\pi}\ln(s)\,\alpha_{\rm s}\left(\frac{s}{\rho}\right)\beta_0 - \frac{1}{8\,\pi^2}\,\ln(s)\,\alpha_{\rm s}\left(\frac{s}{\rho}\right)^2\beta_1\right]. \quad (3.150)$$

Genauere Untersuchungen zeigen, daß Gleichung (3.150) für weiche Q' nur für nicht zu große $\frac{E}{M_{\rm sph}}$ eine Lösung aufweist, da $\frac{32}{3}\frac{d\,\Omega_{\rm valley}(\xi^*)}{d\xi}\sqrt{\xi^* - 2} \lesssim 3.5$ ist. Abbildung 3.5(b) zeigt die Werte von ρ

[28]Der Einfachheit halber wird die Sattelpunktsrelation $\rho^* = \overline{\rho}^*$, $\mathbf{R}^* = 0$, $U = U^*$ als bereits erfüllt betrachtet.
[29]Es ist allgemein $s = \mathcal{O}(1)$. Nach [50] ist $s_I \approx 1.18$.

und s, für die sich $\xi_{\rm peak} = 3$ für $E = M_{\rm sph}$ als Lösung von Gleichung (3.150) ergibt.

In Abbildung 3.5(c) ist der Verlauf der $I\bar{I}$-Verteilung als Funktion der Energie E zu sehen. Dazu wird aus Gleichung (3.150) der E-abhängige Sattelpunktswert $R^*(E)$ berechnet und dann der in Abbildung 3.5(a) geltende Zusammenhang zwischen R und der $I\bar{I}$-Verteilung benutzt. Dabei wurde die Dreischleifenform für $\alpha_{\rm s}$ und $\Lambda^{(\rm nf=0)}_{\overline{\rm MS}} = 238$ MeV [72] verwendet. Die Abbildung 3.5(b) bestätigt den erwarteten Zusammenhang zwischen den Peak der Gitterdaten bei $R \approx \langle\rho\rangle$ und der Sphaleronmasse $M_{\rm sph}$, der weitgehend unabhängig von der Renormierungsskala ist.

Fassen wir die aus den Betrachtungen des Sattelpunkts folgenden Erkenntnisse zusammen: Für weiche, $\rho \approx \rho_{\rm peak}$ implizierende Q' und anwachsende Energien E des I-Subprozesses (3.122), $0 \lesssim E < M_{\rm sph}(\rho_{\rm peak})$, fällt der Wert der Euklidischen Sattelpunktslösung ξ^* ab. Dies hat zur Folge, daß $\frac{d\tilde{\sigma}^{(I)}_{\rm DP}}{dE}$ stark anwächst bis ein ausgeprägtes Maximum erreicht ist. Abbildung 3.5(c) demonstriert dies durch die Darstellung der $I\bar{I}$-Abstandsverteilung als Funktion von $\frac{E}{M_{\rm sph}}$, die den Faktor $\langle \exp\{-4\pi/\alpha_{\rm s}(s/\rho_{\rm peak})\,\Omega_{\rm valley}(\xi,U)\}\rangle_U$ und damit auch $\frac{d\tilde{\sigma}^{(I)}_{\rm DP}}{dE}$ bestimmt.

Für $E > M_{\rm sph}$ liefert Gleichung (3.150) keine Sattelpunktslösung mehr. Dies hat zur Folge, daß $\frac{d\tilde{\sigma}^{(I)}_{\rm DP}}{dE}$ aufgrund des Maximums in den Gitterdaten bei $\xi^*(E = M_{\rm Sph})$ beginnt abzufallen. Die Unterdrückung I-induzierter Prozesse für Energien, die größer als $M_{\rm Sph}$ sind, wurde jüngst in einer umfangreichen numerischen Studie bestätigt [103].

Die Gitterdaten haben überdies bestätigt, daß die zugrunde liegende $I\bar{I}$-Valley-Näherung verläßlich den Übergang zwischen den reinen Tunnelregime bei $E = 0$ und den Sphaleron auf dem Gipfel der Potentialbarriere bei $E = M_{\rm sph}$ beschreibt. Die hier vorgestellten Resultate finden sich in [32] und stehen in Übereinstimmungen mit den Betrachtungen in [28, 29, 102].

Ergebnisse

Es ist möglich, die Integrationen in den Gleichungen (3.147) und (3.148) bis zur Energie $E \to \infty$ auszudehnen, da der starke Abfall der $I\bar{I}$-Wirkung Beiträge in $\frac{d\,\tilde{\sigma}^{(I)}_{\rm DP}}{dE}$ für $E \geq M_{\rm sph}$ unterdrückt:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}^{(I)}_{\rm DP}(l,\ldots) \approx \int_0^\infty dE\,\frac{d\,\tilde{\sigma}^{(I)}_{\rm DP}}{d\,E} \approx \frac{\pi^5}{6\,\alpha_{\rm s}}\,x_{\rm Bj}\,G(x_{\rm Bj},\mu_f^2)\\ \times \int_0^\infty d\rho\,D(\rho)\,\rho^5\,(\rho\,Q')\mathrm{K}_1(\rho\,Q')\int_0^\infty d\overline{\rho}\,D(\overline{\rho})\,\overline{\rho}^5\,(\overline{\rho}\,Q')\mathrm{K}_1(\overline{\rho}\,Q')\,H_{\rm sph}(\rho,\overline{\rho})\end{aligned} \tag{3.151}$$

mit der dimensionslosen, mit den Endzustandsgluonen assoziierten Funktion:[30]

$$\begin{aligned}H_{\rm sph}(\rho,\overline{\rho}) \approx \int_0^\infty dE\,\int \frac{d^4R}{(\rho\,\overline{\rho})^{3/2}}\,e^{i\,(p+q')\cdot R}\\ \times \int dU\,\exp\left\{-\frac{4\pi}{\alpha_{\rm s}(s/\sqrt{\rho\overline{\rho}})}\,\Omega_{\rm Gitter}\left[\xi\left(\frac{R^2}{\rho\overline{\rho}},\frac{\rho}{\overline{\rho}}\right),U\right]\right\}\,\omega\left[\xi\left(\frac{R^2}{\rho\overline{\rho}},\frac{\rho}{\overline{\rho}}\right),U\right]^{2\,n_f-1}.\end{aligned} \tag{3.152}$$

[30] In Gleichung (3.152) kann $\Omega_{\rm Gitter}\left[\xi\left(\frac{R^2}{\rho\,\overline{\rho}},\frac{\rho}{\overline{\rho}}\right),U\right]$ für $E \leq M_{\rm Sph}$ durch die $I\bar{I}$-Valley-Wechselwirkung beschrieben werden. Für $E > M_{\rm sph}$ müssen die Erkenntnisse der Gitterdaten implementiert werden (siehe dazu Abbildung 3.5).

Im Bereich weicher Q' induziert die Funktion $H_{\rm sph}(\rho,\overline{\rho})$ (3.151) keine l-Abhängigkeit, die über die des „Master-Integrals“ $\mathcal{R}\left(\frac{\hat{Q}^2+l^2}{z}\right)$ (3.51) hinausgeht; dies steht in Analogie zum Verhalten für den einfachsten I-induzierten Prozeß. Somit läßt sich die $2d$-Fouriertransformation $(\mathbf{l}\to\mathbf{r})$ genauso wie im Falle des einfachsten Prozeß durchführen und man erhält schließlich (erneut sei o.B.d.A. $z \gg (1-z)$) für den beispielhaft angeführten longitudinalen Fall:

$$\left(|\Psi_L|^2\,\sigma_{\rm DP}\right)^{(I)} \approx |\;\Psi_L^{\rm pQCD}(z,r)\;|^2\;\frac{1}{\alpha_{\rm s}}\,x_{\rm Bj}\,G(x_{\rm Bj},\mu_f^2)\,\frac{\pi^5}{6} \tag{3.153}$$
$$\times\int_0^\infty d\rho\,D(\rho)\,\rho^5\int_0^\infty d\overline{\rho}\,D(\overline{\rho})\,\overline{\rho}^{\,5}\,H_{\rm sph}(\rho,\overline{\rho})\frac{-\frac{d}{dr^2}\left(2r^2\frac{{\rm K}_1(\hat{Q}\sqrt{r^2+\rho^2/z})}{\hat{Q}\sqrt{r^2+\rho^2/z}}\right)\times(\rho\leftrightarrow\overline{\rho})}{{\rm K}_0(\hat{Q}r)^2}\,.$$

Eine ähnliche Relation erhält man für den transversalen Anteil, bei dem wie im einfachsten I-induzierten Prozeß die Funktion (3.83) in Gleichung (3.153), durch die Funktion (3.84) zu ersetzen ist. Wie schon im Falle des einfachsten I-induzierten Prozeß lassen sich für $r \gtrsim \langle\rho\rangle$ die Eigenschaften der Funktionen (3.83) - (3.86) sowie das ausgeprägte Maximum der I-Größenverteilung $D(\rho)$ ausnutzen. Dies führt zu einer Faktorisierung in die Wellenfunktionen der üblichen störungstheoretischen QCD und einen konstanten, saturierten Dipolwirkungsquerschnitt

$$\left(|\Psi_{L,T}|^2\,\sigma_{\rm DP}\right)^{(I)} \approx |\;\Psi_{L,T}^{\rm pQCD}(z,r)\;|^2\;\sigma_{\rm DP}^{(I)\,\rm gluons} \tag{3.154}$$

mit dem saturierten Dipolwirkungsquerschnitt, der Gluonen im Endzustand berücksichtigt:

$$\sigma_{\rm DP}^{(I)\,\rm gluons} = \frac{1}{\alpha_{\rm s}}\,x_{\rm Bj}\,G(x_{\rm Bj},\mu_f^2)\,\frac{\pi^5}{6}\left(\int_0^\infty d\rho\,D_{\rm Gitter}(\rho)\rho^5\right)^2 H_{\rm sph}(\langle\rho\rangle,\langle\rho\rangle)\,. \tag{3.155}$$

Analog zum einfachsten I-induzierten Prozeß (3.110) erhält man also einen saturierten, geometrischen Grenzwert des Dipolwirkungsquerschnitts, der proportional zur Fläche $\pi\langle\rho\rangle^2$ des Instantons im Vakuum ist.

Die Übersetzung der Ergebnisse der I-Störungstheorie in das Farbdipol-Bild zeigte:

- Für große r nimmt der Dipolwirkungsquerschnitt einen konstanten, saturierten Wert an, der proportional zur Fläche $\pi\langle\rho\rangle^2$ des Instantons ist;
- die Saturationsskala wird in diesem Zugang durch $\langle\rho\rangle$ bestimmt;
- im allgemeinen Prozeß mit Endzustandsgluonen stammen die Hauptbeiträge aus der Region $E \approx M_{\rm Sph}$.

Kapitel 4

Instantonen und Saturation in der nichtabelschen Eikonalnäherung

Nun wenden wir uns dem zweiten Zugang zu, in dem der mögliche Zusammenhang zwischen Instantonen und Saturation beleuchtet wird. In diesem Zugang wird der $q\overline{q}$-Farbdipol innerhalb der nichtabelschen Eikonalnäherung [40–46] durch einen nur vom Instantoneichfeld im Hintergrund abhängenden Wilson-Loop dargestellt und aus diesem der Dipolwirkungsquerschnitt in analytischer Form berechnet.

4.1 Dipolstreuung und Renormierungsgruppengleichung

Zu Beginn werden der Dipolwirkungsquerschnitt mittels des Wilson-Loops definiert und die nichtlinearen, eine Evolution in $\tau = \log \frac{1}{x_{\mathrm{Bj}}}$ beschreibenden BK-Gleichungen, angelehnt an [37], vorgestellt.

4.1.1 Wilson-Linien und Dipolstreuamplitude

Im Farbdipol-Bild (siehe Abbildung 3.1) fluktuiert das virtuelle Photon in ein $q\overline{q}$-Paar, das mit dem Proton wechselwirkt. Bei hohen Energien kann die Rückstreuung der Quarks im Dipol durch die emittierten Gluonen vernachlässigt werden, was den Gebrauch der Eikonalnäherung [41, 104, 105] rechtfertigt, in der die Wechselwirkung des Quarks mit dem Farbfeld des Protons nur die Phase aber nicht die Richtung des Quarks ändert.

Der geeignete Freiheitsgrad für ein Teilchen, das sich gradlinig längs seines Geschwindigkeitsvektors bewegt, ist die Wilson-Linie. In der nichtabelschen Eikonalnäherung verhalten sich die Quarks so, daß der Farbdipol sich durch zwei Wilson-Linien beschreiben läßt, die sich parallel zur Trajektorie des Photons bewegen. Im Grenzwert $x_{\mathrm{Bj}} \to 0$ bewegen sich im Dipolsystem sowohl Proton als auch Photon annähernd mit Lichtgeschwindigkeit, so daß die Trajektorien der Quarks kollinear zur lichtartigen Richtung $n_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \mathbf{0}, 1)$ liegen.

Es ist sinnvoll, zunächst die Wilson-Linie entlang einer sich parallel zum Photonimpuls q verlaufenden, noch nicht vollständig lichtartigen Trajektorie zu definieren. Der Grenzwert zum lichtartigen Verlauf, der zusätzliche Divergenzen aufweisen kann, wird durch $x_{\mathrm{Bj}} \to 0$ vermittelt.

Die Wilson-Linie eines durch das Photonsplitting produzierten Quarks innerhalb des Dipols lautet in diesem Fall (siehe z.B. [41, 105, 106]):

$$W(\boldsymbol{x}) = \mathrm{P}\,\exp\left\{-i\,g_s \int_{-\infty}^{\infty} d\,\lambda\; q^\mu\, A_\mu(\lambda\, q + x_\perp)\right\}\,. \tag{4.1}$$

P beschreibt die Pfadordnung und A_μ das weiche, entlang der Trajektorie des Quarks ausgewertete Gluonfeld. $x_\perp = (0, \boldsymbol{x}, 0)$ ist ein Vierervektor, der nur von Null verschiedene Komponenten senkrecht zur vom Proton- und Photonimpuls aufgespannten Ebene besitzt. $W(\boldsymbol{x})$ ist wie auch A_μ ein Element der Eichgruppe $\mathsf{SU}(3)$. Die die Quarks repräsentierenden, Farbe tragenden Wilson-Linien werden zu einen farbneutralen, den Dipol beschreibenden Wilson-Loop verbunden (siehe z.B. [37, 92]):

$$\mathcal{W}_C(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{N_c}\mathrm{tr}\left[W(\boldsymbol{x})\, W^\dagger(\boldsymbol{y})\right]\,. \tag{4.2}$$

Der Wilson-Loop bestimmt die Wechselwirkung eines Dipols mit einem spezifischen Gluonfeld A_μ entlang eines Weges C im Rahmen der Eikonalnäherung. In den Arbeiten [43–45] wurde in einem semiklassischen Zugang die Strukturfunktion bei kleinem x_{Bj} untersucht. Diese beruhen auf der Annahme, daß das Proton als Quelle der klassischen Farbfelder in (4.1) auftritt. In diesem Fall ist die Streuamplitude für die Wechselwirkung zwischen Dipol und Proton (siehe z.B. auch [37]):

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \langle 1 - \mathcal{W}_C(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\rangle\,, \tag{4.3}$$

wobei $\langle \ldots \rangle$ die Mittelung über die möglichen Feldkonfigurationen beschreibt. Integriert man diese Amplitude über den Impaktparameter $\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{2}$, ergibt sich aus dem optischen Theorem der Dipolwirkungsquerschnitt:

$$\sigma_{\mathrm{DP}}(r) = 2 \int d^2\boldsymbol{b}\, \mathcal{N}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\,, \tag{4.4}$$

wobei $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ der Abstand der Dipole in der Transversalebene ist. Im Rahmen dieses Zugangs werden im Abschnitt 4.2 die Beiträge zum Dipolwirkungsquerschnitt berechnet, die von einer klassischen I-Feldkonfiguration stammen. Unklar ist in diesem Modell, inwieweit I-Konfiguration zu den klassischen Feldern beitragen, wodurch ein Faktor im Dipolwirkungsquerschnitt unbestimmt bleibt.

In einem erweiterten semiklassischen Zugang [46] ist das Proton aus Dipolen aufgebaut, die dann im Rahmen der nichtabelschen Eikonalnäherung mit dem Photon-Dipol wechselwirken. Dieses Modell liefert konsistente Ergebnisse.

4.1.2 Evolutionsgleichung der Dipolstreuamplitude

In diesem Abschnitt soll die Herleitung der Evolutionsgleichung der Dipolstreuamplitude – angelehnt an [37] – kurz wiederholt werden.

Die der Gleichung (3.15) zugrunde liegende Faktorisierung in eine Wellenfunktion und einen Dipolwirkungsquerschnitt beruht auf einer Ordnung in der Rapidität $\tau = \log\frac{1}{x_{\mathrm{Bj}}}$. Die Gluonen mit einer hohen Rapidität werden dem Quadrat der Wellenfunktion zugeordnet, während die langsamen Gluonen den Dipol formen. Mit der Anordnung ist die Wahl einer Rapidität verknüpft, die festlegt, was schnell und was langsam bedeutet. Natürlich dürfen Observablen nicht von dieser

Variablen abhängen, was durch die Evolutionsgleichung für $\mathcal{N}_\tau$ sicher gestellt wird. Dies entspricht dem Vorgehen bei der Faktorisierung im üblichen Partonmodell (siehe Gleichung (1.6)), in der die DGLAP-Gleichungen eine Unabhängigkeit von der Faktorisierungsskala μ_f garantieren.[1]

Um den Zuwachs von $\mathcal{N}_\tau$ bei einer höheren Rapidität $\tau + \delta\tau$ als Funktion von τ zu bestimmen, werden die Beiträge schneller, bisher nicht zum Dipolwirkungsquerschnitt beitragenden Gluonen aus dem Streifen $\delta\eta$ integriert. Bei kleinen Dipoldichten führt die Evolution zu einer unabhängigen, auch durch die lineare BFKL-Gleichung [36] beschriebenen Verzweigung der Dipole. Saturationseffekte werden im Rahmen der üblichen Störungstheorie wichtig, wenn dieser Anstieg die Dipole zur Wechselwirkung zwingt.

Die nichtlineare Evolutionsgleichung im Grenzwert großer N_c lautet mit $\tau = \log \frac{1}{x_{\rm Bj}}$ [37]:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\mathcal{N}_\tau(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = N_c\,\frac{\alpha_s}{\pi}\int\frac{d^2\boldsymbol{z}}{2\pi}\,&\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2}{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})^2\,(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})^2}\\ &\times\left[\mathcal{N}_\tau(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+\mathcal{N}_\tau(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})-\mathcal{N}_\tau(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-\mathcal{N}_\tau(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\,\mathcal{N}_\tau(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})\right]\\ &+\int d^2\boldsymbol{z}\;d^2\boldsymbol{z}'\;\mathcal{K}_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z},\boldsymbol{z}',\boldsymbol{x})\,\mathcal{N}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\,\mathcal{N}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z}')\,\mathcal{N}(\boldsymbol{z}',\boldsymbol{y})+\dots\;. \end{aligned}\tag{4.5}$$

Für große N_c faktorisieren die aus mehreren Wilson-Linien (z.B. 4) bestehenden Korrelatoren in ein Produkt aus Dipolstreuamplituden (z.B. 2), was es erlaubt, die BK-Gleichungen in der geschlossenen Form (4.5) zu schreiben. Sie ist eine Entwicklung nach der Anzahl von wechselwirkenden Dipolen (der Integrationskern $\mathcal{K}_3$ beschreibt die Wechselwirkung dreier Dipole). Die einzelnen Integrationskerne $\mathcal{K}_i$ lassen sich wiederum störungstheoretisch nach α_s entwickeln (Gleichung (4.5) zeigt $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ bis zur Ordnung α_s). Der in $\mathcal{N}$ lineare Anteil $\mathcal{K}_1$ führt auf die BFKL-Gleichungen.

Gleichung (4.5) wurde – unter Vernachlässigung der höheren Nichtlinearitäten ($\mathcal{K}_{n\geq 3}$) – mit numerischen [11–13] und semianalytischen [14, 15] Methoden studiert. Dabei konnte die gewünschte Unterdrückung der Partonverteilungen nachgewiesen und überdies die damit verknüpfte Saturationsskala $Q_s(x_{\rm Bj})$ abgeschätzt werden. Eine Berechnung des schon in der führenden Ordnung α_s^2 sehr komplexen Kerns $\mathcal{K}_3$ findet sich in [37].

4.1.3 Lichtkegel-Variablen

Lichtkegel-Variablen sind geeignet, den Grenzwert großer Rapiditäten zu diskutieren, in dem das klassische, das Proton repräsentierende Gluonfeld so weit kontrahiert ist, daß es dem sich längs des Lichtkegels bewegenden Dipol als Schockwelle erscheint [37], wodurch die Anzahl der Freiheitsgrade reduziert ist (siehe Abbildung 3.1).

Sie sind Projektionen auf lichtartige Impulse. Dazu werden zwei lichtartige Impulse definiert,[2] die den Bedingungen

$$n^2 = n^{*\,2} = 0\,, \qquad n\cdot n^* = 1\,, \tag{4.6}$$

[1] In endlicher Ordnung Störungstheorie sind die Observablen natürlich weiterhin abhängig von der Faktorisierungsskala.

[2] Definiert man einfach – wie z.B. in [94] – $x_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 \pm x_3)$, ist $n_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,\mathbf{0},1)$ und $n^*_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,\mathbf{0},-1)$.

genügen. Diese Vektoren sollen in der vom Proton- und Photonimpuls aufgespannten Ebene liegen. Zerlegt man die Impulse nach q und P, erhält man für eine vernachlässigbare Protonmasse $P^2 = 0$:

$$p = Q\, n^* \,, \tag{4.7}$$

$$q = -x_{\mathrm{Bj}}\, Q\, n^* + \frac{Q}{2x_{\mathrm{Bj}}}\, n \,, \tag{4.8}$$

womit die Relationen $q^2 = -Q^2$ und $2\,q \cdot p = \frac{Q^2}{x_{\mathrm{Bj}}}$ erfüllt sind. Damit bewegt sich das masselose Proton längs n^*. Für $x_{\mathrm{Bj}} \to 0$ nähert sich das Photon n an. Die Zerlegung eines allgemeinen Vektors a ist:

$$a = a_+\, n^* + a_-\, n + a_\perp \quad \text{mit} \quad a_\perp \cdot n = a_\perp \cdot n^* = 0 \,, \tag{4.9}$$

womit sich die Lichtkegel-Variablen als Projektion ergeben:

$$a_+ = a \cdot n, \quad a_- = a \cdot n^*, \quad a_\perp = a - (a \cdot n)\, n^* - (a \cdot n^*)\, n \,. \tag{4.10}$$

Ein Skalarprodukt lautet in den Lichtkegel-Variablen a_+, a_- und $\boldsymbol{a}$:

$$a \cdot b = a_+ b_- + a_- b_+ + a_\perp \cdot b_\perp = a_+ b_- + a_- b_+ - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}, \quad a^2 = 2\, a_+ a_- - \boldsymbol{a}^2 \,. \tag{4.11}$$

Hierbei ist $\boldsymbol{a}$ die zweidimensionale, nichtverschwinde Komponente des Vektors $a_\perp = (0, \boldsymbol{a}, 0)$ mit $a_\perp^2 = -\boldsymbol{a}^2$ ($\boldsymbol{a}$ ist Euklidisch und $a_\perp$ ein Vektor in der Minkowski-Raumzeit). Die Lichtkegel-Komponenten des Photon- q bzw. Protonimpulses P sind:

$$q_+ = -x_{\mathrm{Bj}}\, Q \,, \qquad q_- = \frac{Q}{2\, x_{\mathrm{Bj}}}, \qquad \boldsymbol{q} = 0 \,; \tag{4.12}$$

$$P_+ = Q \,, \qquad P_- = 0 \,, \qquad \boldsymbol{P} = 0 \,. \tag{4.13}$$

Mit den so eingeführten Variablen ist die Wilson-Linie (4.1) für $x_{\mathrm{Bj}} \to 0$ ($q_+ \to 0$):

$$\begin{aligned}
\lim_{x_{\mathrm{Bj}} \to 0} W(\boldsymbol{x}) &= \lim_{x_{\mathrm{Bj}} \to 0} \mathrm{P}\, \exp\left\{ -i\, g_s \int_{-\infty}^{\infty} d\,\lambda\ [q_+\, A_-(q_+\, \lambda, q_-\, \lambda, \boldsymbol{x}) + q_-\, A_+(q_+\, \lambda, q_-\, \lambda, \boldsymbol{x})] \right\} \\
&= \lim_{x_{\mathrm{Bj}} \to 0} \mathrm{P}\, \exp\left\{ -i\, g_s \int_{-\infty}^{\infty} d\,x_-\ \left[A_+\left(\frac{q_+}{q_-} x_-, x_-, \boldsymbol{x} \right) + \frac{q_+}{q_-}\, A_-\left(\frac{q_+}{q_-} x_-, x_-, \boldsymbol{x} \right) \right] \right\} \\
&\approx \mathrm{P}\, \exp\left\{ -i\, g_s \int_{-\infty}^{\infty} d\,x_-\ A_+(0, x_-, \boldsymbol{x}) \right\} \,,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

was der Integration (1.3) längs des Lichtkegels entspricht. Die Näherung in Gleichung (4.14) ist in dieser Form nicht streng auf das I-Eichfeld (2.32) in der singulären Eichung übertragbar, da es im wesentlichen nur von x^2 und damit von $x_+\, x_-$ abhängt.

4.2 Dipolwirkungsquerschnitt mit dem Proton als klassische Farbfeldquelle

In diesem Abschnitt wird der Dipolwirkungsquerschnitt (4.4) analog zum Zugang in [43–45] berechnet, in dem das Proton lediglich als Quelle der Farbfelder, die in die Wilson-Linie (4.1) eingehen, betrachtet wird. Hier werden explizit die Anteile der I-Eichfelder berechnet. Im resultierenden Dipolwirkungsquerschnitt muß ein Faktor unbestimmt bleiben, da nicht klar ist, inwieweit Instantonen zu den Farbfeldern, die vom Proton erzeugt werden, beitragen.

Trotz der Unsicherheiten ist es interessant, den Dipolwirkungsquerschnitt in diesem Zugang zu berechnen. Zum einen verdeutlicht es an einem konkreten Beispiel den direkten Zusammenhang zwischen der Ausdehnung einer klassischen Feldkonfiguration und der Saturationsskala. Die klassischen Feldkonfigurationen mit hoher Feldstärke sind im Hinblick auf das Farbglaskondensat [15] (siehe dazu die Diskussion im Abschnitt 3.1.2) für den Bereich, in dem Saturationsphänomene relevant werden, von Bedeutung. Darüberhinaus kann diese konkrete Lösung als Anfangsbedingung der BK-Gleichungen verstanden werden, was insbesondere dahingehend interessant ist, daß sowohl die BK-Gleichungen [107] als auch der I-Sektor [56] invariant unter konformen Transformationen sind.

Zunächst wird der die Wechselwirkung des Dipols mit dem I-Feld beschreibende Wilson-Loop im Hintergrund eines Instantons analytisch berechnet und daran anschließend aus dem Wilson-Loop der Dipolwirkungsquerschnitt konstruiert.

4.2.1 Wilson-Loop im klassischen Instantonhintergrund

Wir berechnen den Wilson-Loop für das klassische I-Eichfeld $A_\mu^{(I)}$ (2.32); ähnliche Rechnungen wurden in [28] in einem anderen Zusammenhang durchgeführt. Der Ausgangspunkt ist die Wilson-Linie (4.1) vor der Mittelung über die kollektiven Koordinaten:

$$\begin{aligned} W^{(I)}(\boldsymbol{x}; z, \rho, U; q) &= \mathrm{P}\,\exp\left\{-i\,g_s \int_{-\infty}^{\infty} d\,\lambda\; q^\mu\, A_\mu^{(I)}(\lambda\, q + x_\perp - z)\right\} \\ &= \exp\left\{-H(\boldsymbol{x}; z, U; q) \int_{-\infty}^{\infty} d\,\lambda\; \phi(\lambda, \boldsymbol{x}; z, \rho; q)\right\}\,. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Wie bei der Berechnung der Partonwirkungsquerschnitte im Kapitel 3 werden die Untersuchungen zunächst im Euklidischen durchgeführt; am Ende werden die Ergebnisse in die Minkowski-Raumzeit analytisch fortgesetzt (siehe Anhang A). In Gleichung (4.15) ist z die Position des Ursprungs des Instantons und q der für endliche x_{Bj} nicht lichtartige Impuls des Photons. Ein interessanter Aspekt ist, daß der pfadgeordnete Exponent analytisch berechnet werden kann, da die Rotation im Farbraum entlang des Pfades konstant ist. Ein solches Verhalten beruht auf einer speziellen, als Hedgehog-Konfiguration bezeichneten Eigenschaft des I-Feldes. Dies erlaubt die Umformung mit der über den gesamten Pfad konstanten Farbmatrix in Gleichung (4.15) (wobei $q\overline{q} = q^2$ ist und somit der λ-abhängige Teil wegfällt):

$$H^i_j(\boldsymbol{x}; z, U; q) = \frac{1}{2}\,(U)^i_\alpha\,[q\,(\overline{x}_\perp - \overline{z}) - (x_\perp - z)\,\overline{q}]^\alpha_\beta\,\left(U^\dagger\right)^\beta_j\,. \tag{4.16}$$

Der skalare Anteil des Instantonfeldes wird durch

$$\phi(\lambda, \boldsymbol{x}; z, \rho; q) = \frac{\rho^2}{(\lambda\,q + x_\perp - z)^2\,((\lambda\,q + x_\perp - z)^2 + \rho^2)} \tag{4.17}$$

beschrieben. Aus $\mathrm{tr}\,H = 0$ und $H = -H^\dagger$ folgt, daß $W^{(I)}$ vor der Mittelung über die kollektiven Koordinaten unitär ist. Bezeichnet man die transversalen Komponenten $\boldsymbol{a}$ eines Euklidischen

Vektors a mit a_1 und a_2 und die verbleibenden longitudinalen mit a_3 und a_4, ist $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2) = 0$ und $(x_\perp)_3 = (x_\perp)_4 = 0$, da $x_\perp$ transversal zur Photon-Proton-Ebene liegt. Damit folgt nach einer kurzen Umformung:

$$(\lambda\, q + x_\perp - z)^2 = \left(\sqrt{q^2}\,\lambda - \frac{q \cdot z}{\sqrt{q^2}}\right)^2 + a_q^2(\boldsymbol{x}, z) \tag{4.18}$$

mit einer Funktion a_q, die für $z = 0$ oder $x_{\mathrm{Bj}} \to 0$ identisch mit $\boldsymbol{x}$ ist:

$$a_q^2(\boldsymbol{x}, z) = (x_\perp - z)^2 - \frac{(q \cdot z)^2}{q^2} = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z})^2 + \frac{(q_3\, z_4 - q_4\, z_3)^2}{q^2}\,. \tag{4.19}$$

Setzt man (4.18) in die skalare Funktion (4.17) ein, läßt sich die Integration in (4.15) ausführen:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d\,\lambda\;\phi = \frac{\pi}{\sqrt{q^2\, a_q^2(\boldsymbol{x}, z)}}\left[1 - \sqrt{\frac{a_q^2(\boldsymbol{x}, z)}{a_q^2(\boldsymbol{x}, z) + \rho^2}}\,\right]. \tag{4.20}$$

Nun muß die matrixwertige Exponentialfunktion in (4.15) entwickelt werden. Dazu bedarf es der Berechnung von Potenzen der Matrix H (4.16). Hierbei nutzt man die Einbettung von U_α^i in die $\mathsf{SU}(3)$ aus, wodurch $U_\alpha^i\,\left(U^\dagger\right)_i^\beta = \delta_\alpha^\beta$, aber $U_\alpha^i\,\left(U^\dagger\right)_j^\alpha \neq \delta_j^i$ ist. Mit der Eigenschaft (A.11) der σ-Matrizen sowie der Definition (4.19) folgt:

$$\begin{aligned}\left(H^2\right)_j^i &= \frac{1}{4}\,(U)_\alpha^i\,\left[(q(\overline{x}_\perp - \overline{z}) - (x_\perp - z)\overline{q})^2\right]_\beta^\alpha\,\left(U^\dagger\right)_j^\beta \\ &= -(U)_\alpha^i\,\left(U^\dagger\right)_j^\alpha\,\left\{q^2\,\left(x_\perp - z\right)^2 - \left[q \cdot (x_\perp - z)\right]^2\right\} = -(U)_\alpha^i\,\left(U^\dagger\right)_j^\alpha\, q^2\, a_q^2,\end{aligned} \tag{4.21}$$

und damit aus der Unitarität von U:

$$\begin{aligned}\left(H^0\right)_j^i &= \delta_j^i\,;\\ \left(H^{2n+1}\right)_j^i &= (-1)^n\,\left(q^2\, a_q^2\right)^n\,(H)_j^i\,,\;\; n \geq 0\,;\\ \left(H^{2n}\right)_j^i &= (-1)^n\,\left(q^2\, a_q^2\right)^n\,(U)_\alpha^i\,\left(U^\dagger\right)_j^\alpha\,,\;\; n \geq 1\,.\end{aligned} \tag{4.22}$$

Eingesetzt in Gleichung (4.15), ergibt sich mit den Gleichungen (4.20) und (4.22)

$$\begin{aligned}\left[W^{(I)}(\boldsymbol{x}; z, r, \rho; q)\right]_j^i &= \left[\exp\{-H\,I\}\right]_j^i = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-H\,I)^n}{n!}\\ &= \delta_j^i - H_j^i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\, I^{2n+1}\,(\sqrt{q^2\, a_q^2})^{2n}}{(2n+1)!} + (U)_\alpha^i\,\left(U^\dagger\right)_j^\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\, I^{2n}\,(\sqrt{q^2\, a_q^2})^{2n}}{(2n)!}\\ &= \delta_j^i - \frac{H_j^i}{\sqrt{q^2\, a_q^2}}\,\sin\left(\pi\sqrt{\frac{a_q^2}{a_q^2 + \rho^2}}\right) - (U)_\alpha^i\,\left(U^\dagger\right)_j^\alpha\,\left\{\cos\left(\pi\sqrt{\frac{a_q^2}{a_q^2 + \rho^2}}\right) + 1\right\}.\end{aligned} \tag{4.23}$$

Die Wilson-Linie (4.23) beschreibt im Euklidischen die Wechselwirkung eines Quarks mit transversalem Abstand $\boldsymbol{x}$, dessen Pfad durch den longitudinalen Impuls q bestimmt wird, mit einem bei z zentrierten Instanton.

Aus den Farbe tragenden, die Quarks beschreibenden Wilson-Linien (4.23) wird der den Dipol repräsentierende, farbneutrale Wilson-Loop konstruiert, der gegeben ist durch:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}_C^{(I)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\rho,z;q) &= \frac{1}{N_c}\,\mathrm{tr}\left[\left(W^{(I)}(\boldsymbol{x};\rho,z,U;q)\right)\,\left(W^{(I)}(\boldsymbol{y};\rho,z,U;q)\right)^{\dagger}\right] \\
&= 1+\frac{2}{N_c}\left\{\cos\left[\pi\sqrt{\frac{a_q^2(\boldsymbol{x},z)}{a_q^2(\boldsymbol{x},z)+\rho^2}}\right]\,\cos\left[\pi\sqrt{\frac{a_q^2(\boldsymbol{y},z)}{a_q^2(\boldsymbol{y},z)+\rho^2}}\right]\right. \qquad (4.24) \\
&\left. + \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})\cdot(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})+\frac{(q_3\,z_4-q_4\,z_3)^2}{q^2}}{\sqrt{a_q^2(\boldsymbol{x},z)}\sqrt{a_q^2(\boldsymbol{y},z)}}\sin\left[\pi\sqrt{\frac{a_q^2(\boldsymbol{x},z)}{a_q^2(\boldsymbol{x},z)+\rho^2}}\right]\,\sin\left[\pi\sqrt{\frac{a_q^2(\boldsymbol{y},z)}{a_q^2(\boldsymbol{y},z)+\rho^2}}\right]-1\right\}.
\end{aligned}
$$

Bei der Herleitung wurde ausgenutzt, daß die Spur von H verschwindet und die Spur von $U^i_\alpha\,(U^\dagger)^\alpha_j$ zwei ist. Die Berechnung von $\mathrm{tr}[H(\boldsymbol{x})\,H^\dagger(\boldsymbol{y})]$ erfolgt analog zu Gleichung (4.21).

4.2.2 Dipolwirkungsquerschnitt

Aus dem Wilson-Loop läßt sich mittels Gleichung (4.4) der Dipolwirkungsquerschnitt für die Streuung eines Dipols an einer klassischen I-Feldkonfiguration bestimmen. Die in Gleichung (4.3) enthaltene Mittelung über alle möglichen Feldkonfiguration impliziert für die I-Felder eine Integration über die kollektiven Koordinaten:

$$
\langle\ldots\rangle \to \int d^4z \int_0^\infty d\rho\; D(\rho) \int dU\,. \qquad (4.25)
$$

Dies folgt aus einem Vergleich der Definiton des Mittelungprozesses, z.B. in [40–42], mit der Herleitung der Vakuumtunnelamplitude im Abschnitt 2.3 (siehe insbesondere Gleichung (2.51)). Die z-Integration ist im Rahmen dieses einfachsten Modells, in dem das Proton lediglich als klassische Quelle der I-Eichfelder betrachtet wird, trivial, da die I-Position mit der des Protons übereinstimmt. Dann enthält der Dipolwirkungsquerschnitt effektiv nur die Integration über die Instantongröße ρ:[3]

$$
\sigma_{\mathrm{DP}}^{(I)}(r,\ldots) = 2\,\mathcal{F}\int_0^\infty d\rho\; D(\rho)\,\rho^4 \int d^2\boldsymbol{b}\,\left(1-\mathcal{W}_C^{(I)}\left(\boldsymbol{b}+\tfrac{\boldsymbol{r}}{2},\boldsymbol{b}-\tfrac{\boldsymbol{r}}{2}\right)\right)\,, \qquad (4.26)
$$

wobei $\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{2}$ und $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ ist. Für $z = 0$ ist $a_q(\boldsymbol{x},z) = \boldsymbol{x}$ (siehe Gleichung 4.19) und somit $\mathcal{W}_C^{(I)}$ unabhängig von x_{Bj}. Somit hängt – wie im Fall $x_{\mathrm{Bj}} \to 0$ – der Wilson-Loop nur von den beiden transversalen Koordinaten der Quarks innerhalb des Dipols ab. Der dimensionslose Faktor $\mathcal{F}$ beschreibt die Unsicherheiten des Modells. So ist unklar, welchen Beitrag Instantonen zum Farbfeld des Protons liefern.

Betrachtet man den Wilson-Loop (4.24) für $a(\boldsymbol{x}_i) = \boldsymbol{x}_i$, so stellt man fest, daß beide Trans-

[3]Die U-Integration ist trivial, da der Wilson-Loop nicht von U abhängt und $\int dU$ auf 1 normiert ist.

versalimpulse mit ρ skalieren. Damit ist der Dipolwirkungsquerschnitt eine Funktion von $\frac{r}{\langle\rho\rangle}$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathrm{DP}}^{(I)} &= 2\,\mathcal{F}\int_0^\infty d\rho\, D(\rho)\,\rho^4 \int d^2\boldsymbol{b}\,\frac{2}{N_c}\left\{1-\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2\,\left(\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{r}}{2}\right)^2}{\left(\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{r}}{2}\right)^2+\rho^2}}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2\,\left(\boldsymbol{b}-\frac{\boldsymbol{r}}{2}\right)^2}{\left(\boldsymbol{b}-\frac{\boldsymbol{r}}{2}\right)^2+\rho^2}}\right)\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\left(\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{r}}{2}\right)\cdot\left(\boldsymbol{b}-\frac{\boldsymbol{r}}{2}\right)}{\sqrt{\left(\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{r}}{2}\right)^2}\sqrt{\left(\boldsymbol{b}-\frac{\boldsymbol{r}}{2}\right)^2}}\sin\left(\sqrt{\frac{\pi^2\,\left(\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{r}}{2}\right)^2}{\left(\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{r}}{2}\right)^2+\rho^2}}\right)\sin\left(\sqrt{\frac{\pi^2\,\left(\boldsymbol{b}-\frac{\boldsymbol{r}}{2}\right)^2}{\left(\boldsymbol{b}-\frac{\boldsymbol{r}}{2}\right)^2+\rho^2}}\right)\right\}\\
&= \mathcal{F}\int_0^\infty d\rho\, D(\rho)\,\rho^4\,\rho^2\, f\left(\frac{r}{\rho}\right) \approx \mathcal{F}\,\frac{2}{\pi^2}\,\kappa\,\langle\rho\rangle^2 f\left(\frac{r}{\langle\rho\rangle}\right)\,, \qquad (4.27)
\end{aligned}$$

mit der Packing-Fraction κ (3.54). Die Näherung ist möglich, da in der Eikonalnäherung keine harte Impulsskala auftritt und die Größe $\langle\rho\rangle$ des Instantons im Vakuum bestimmend ist. Die dimensionslose Funktion $f(x)$ lautet:

$$\begin{aligned}
f(x) = 2\,\frac{2}{N_c}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dw\, w\, &\left\{1-\cos\left(\pi\sqrt{\frac{w^2}{w^2+1}}\right)\cos\left(\pi\sqrt{\frac{w^2+x^2+2\,x\,w\,\cos\phi}{w^2+x^2+2\,x\,w\,\cos\phi+1}}\right)\right.\\
-\frac{w^2+w\,x\,\cos\phi}{w\,\sqrt{w^2+x^2+2\,w\,x\,\cos\phi}}&\left.\sin\left(\pi\sqrt{\frac{w^2}{w^2+1}}\right)\sin\left(\pi\sqrt{\frac{w^2+x^2+2\,x\,w\,\cos\phi}{w^2+x^2+2\,x\,w\,\cos\phi+1}}\right)\right\}\,. \qquad (4.28)
\end{aligned}$$

Für $r\to\infty$ erhält man Beiträge aus den Regionen $\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{r}}{2}$ und $\boldsymbol{b}=-\frac{\boldsymbol{r}}{2}$, wo die transversalen Abstände $\boldsymbol{x}$ bzw. $\boldsymbol{y}$ der Quarks zum Instanton klein werden. Der Grenzwert des Dipolwirkungsquerschnitts (4.27) ist:

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty}\sigma_{\mathrm{DP}}^{(I)}(r,\ldots) &= \mathcal{F}\,\frac{2}{N_c}\,8\pi\int_0^\infty d\rho\, D(\rho)\,\rho^6\int_0^\infty dz\,z\left\{1+\cos\left(\pi\sqrt{\frac{z^2}{z^2+1}}\right)\right\}\\
&\approx \mathcal{F}\,\frac{2}{\pi^2}\,\kappa\,\langle\rho\rangle^2\,\frac{2}{N_c}\,20.0\,.
\end{aligned} \qquad (4.29)$$

Auch im Kapitel 3 ergab sich ein konstanter, saturierter Wirkungsquerschnitt, der proportional zur Fläche $\pi\langle\rho\rangle^2$ des Instantons ist (vergleiche Gleichung (3.110) für den einfachsten I-induzierten Prozeß). Ein Unterschied liegt in der unterschiedlichen Potenz, mit der die Packing-Fraction κ auftaucht, was darin begründet liegt, daß das optische Theorem auf den totalen Wirkungsquerschnitt führt, während zuvor im einfachsten Prozeß die Amplitude betragsquadriert wurde und man die elastischen Beiträge erhält. Im Zugang des Kapitels 3 ist der Dipolwirkungsquerschnitt proportional zur Gluonverteilung. Dies ist hier analog zum Faktor $\mathcal{F}$, der die hier nicht spezifizierte Protonstruktur widerspiegelt.

Für das Verhalten von (4.27) bei kleinen r muß $f(x)$ (4.28) für kleine x entwickelt werden. Numerische Berechnungen zeigen:

$$\sigma_{\mathrm{DP}}^{(I)}(r,\ldots) \approx \mathcal{F}\,\frac{2}{\pi^2}\,\kappa\,r^2\,\frac{2}{N_c}\,13.0\left\{1+\mathcal{O}\left(\frac{r^2}{\langle\rho\rangle^2}\right)\right\}\,. \qquad (4.30)$$

Auch dieses Ergebnis ist konsistent mit den Erkenntnissen des Kapitels 3 und der allgemeinen Erwartung der Farbtransparenz.

Abbildung 4.1 zeigt den Dipolwirkungsquerschnitt (4.27) geteilt durch den Grenzwert (4.29), der sich aus der Parametrisierung (2.61) der UKQCD-Gitterdaten [49] ergibt.

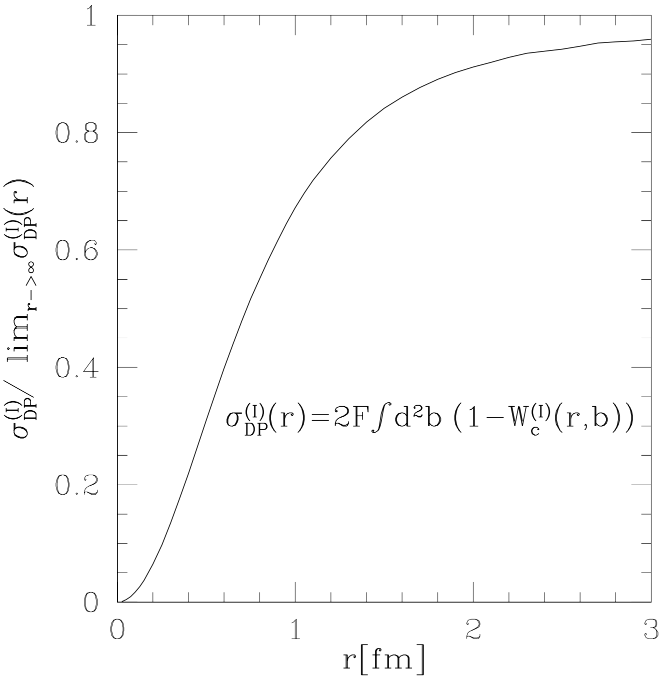


Abbildung 4.1: Die Abbildung zeigt $\frac{\sigma_{\rm DP}^{(I)}(r,...)}{\lim_{r\to\infty}\sigma_{\rm DP}^{(I)}(r,...)}$ (Gleichung (4.27) bzw. (4.29)). Dieses Verhältnis ist unabhängig von der Konstanten $\mathcal{F}$.

4.2.3 Evolution des Dipolwirkungsquerschnitts im Instantonhintergrund

Im vorangegangenen Abschnitt wurden die Beiträge der Instantonen im Farbfeld des Protons zum Dipolwirkungsquerschnitt berechnet. Er enthält keinerlei $x_{\rm Bj}$-Abhängigkeit, da der einfachste Ansatz keinerlei Protonstruktur berücksichtigt. Versteht man die I-Lösung als Anfangsbedingung der BK-Gleichung, wird die $x_{\rm Bj}$-Abhängigkeit durch deren Evolution in der Rapidität $\tau = \log\frac{1}{x_{\rm Bj}}$ implementiert.

Qualitativ läßt sich die $x_{\rm Bj}$-Abhängigkeit des Dipolwirkungsquerschnitts durch eine Variation der Saturationsskala $Q_s(x_{\rm Bj})$ beschreiben. Zuvor ergab sich eine Saturationsskala $Q_s \propto \frac{1}{\langle\rho\rangle}$. An dieser Stelle soll eine aus den BK-Gleichungen folgende Näherungslösung für $Q_s(\tau = \log\frac{1}{x_{\rm Bj}})$ diskutiert werden [15,108]. Unter Vernachlässigung der nichtlinearen Terme folgt aus der BK-Gleichung (4.5) eine Lösung, die der der BFKL-Gleichung entspricht (siehe z.B. die Übersichtsartikel [92]):

$$\mathcal{N}_\tau(\boldsymbol{r}) \approx \exp\left\{(\alpha_{\mathbb{P}}-1)\,\tau - \frac{1}{2}\log\frac{1}{\boldsymbol{r}^2 Q_0^2} - \left[\log\frac{1}{\boldsymbol{r}^2 Q_0^2}\right]^2 \frac{\pi}{2\,\beta\,N_c\,\alpha_s}\right\} \tag{4.31}$$

mit $\alpha_{\mathbb{P}}$ aus Gleichung (3.14). Die Amplitude steigt offenbar mit kleiner werdenen x_{Bj} einem Potenzgesetz folgend an, das die Unitarität verletzt. Die nichtlinearen Terme in der BK-Gleichung (4.5) kompensieren diesen Anstieg beim Erreichen der Saturationsskala. Die Korrekturen werden relevant, sobald $r \approx \frac{1}{Q_s(x_{\text{Bj}})}$ ist, was spätestens bei Erreichen der Unitaritätsschranke $\mathcal{N}_\tau = 1$ der Fall sein muß. Damit sollte die Saturation bei [15, 108]:

$$Q_s^2\left(\tau = \log\frac{1}{x_{\text{Bj}}}\right) = Q_0^2\, e^{c\,N_c\,\frac{\alpha_s}{\pi}\,\tau}\,, \qquad c = \frac{-\beta + \sqrt{\beta\left(\beta + 8\frac{\alpha_{\mathbb{P}}-1}{\alpha_s}\,\frac{\pi}{N_c}\right)}}{2} \approx 4.84\,, \tag{4.32}$$

einsetzen. Die I-Feldkonfiguration erzeugt einen Dipolwirkungsquerschnitt mit konstanter Saturationsskala $\sim \frac{1}{\langle\rho\rangle}$, die BK-Gleichungen hingegen führen zu einem x_{Bj}-abhängigen Dipolwirkungsquerschnitt, wenn man die Streuamplitude $\mathcal{N} = 1 - \mathcal{W}_C$ aus dem vorangegangen Abschnitt als Anfangsbedingung bei einem festen Wert τ_0 versteht. Dieser geht aus dem Dipolwirkungsquerschnitt $\sigma_{\text{DP}}^{(I)}(r, \langle\rho\rangle, \ldots)$ (4.27) hervor, indem man die Skala $\langle\rho\rangle$ analog zu (4.32) reskaliert:

$$\sigma_{\text{DP}}^{(I)}(r, \langle\rho\rangle, x_{\text{Bj}}, \ldots) \approx \mathcal{F}\,\frac{2}{\pi^2}\,\kappa\,\langle\rho\rangle^2 f\left(\frac{r}{\langle\rho\rangle}\left(\frac{x_0}{x_{\text{Bj}}}\right)^{\lambda}\right)\,, \qquad \lambda = \frac{1}{2}\,c\,N_c\,\frac{\alpha_s}{\pi}\,, \tag{4.33}$$

mit $f(x)$ aus Gleichung (4.28). Der Dipolwirkungsquerschnitt (4.33) stellt eine Erweiterung des einfachen Modells dar. Der konstante saturierte Wirkungsquerschnitt bleibt unverändert, während der Wert der Saturationsskala (4.32) variiert.

4.3 Dipolwirkungsquerschnitt und Dipol-Dipol-Streuung

Abschließend soll ein etwas erweiterter Zugang zur Dipolstreuung im Hintergrund eines Instantons diskutiert werden, der auf der Streuung zweier Dipolpaare im Rahmen der nichtabelschen Eikonalnäherung basiert. Dieser Zugang wird die Bedeutung der Integration über die I-Position verdeutlichen. Im Rahmen eines phänomenologischen Modells, das sowohl im stochastischen Vakuumzugang [40, 46] als auch bei der Untersuchung der BK-Gleichungen [109] angewandt wurde, wird das Proton als eine Überlagerung von Dipolen aufgefaßt. In diesem Fall ist der Wirkungsquerschnitt der $\gamma^*\,P$ Streuung:

$$\sigma_{L,T}(x_{\text{Bj}}, Q^2) = \mathcal{F}_{\text{DP}} \int_0^1 dz_h \int d^2\boldsymbol{r}_h\, |\Psi_h(z_h, r_h)|^2 \int dz \int d^2\boldsymbol{r}\, |\Psi_{L,T}(z, r)|^2\, \sigma_{\text{DP}\,\text{DP}}(\boldsymbol{r}_h, \boldsymbol{r}) \tag{4.34}$$

mit der Hadronwellenfunktion $|\Psi_h(z_h, r_h)|^2$, die die Wahrscheinlichkeit angibt, innerhalb des Protons einen Dipol mit Ausdehnung r_h zu finden. z_h ist der longitudinale Anteil eines Quarks am Protonimpuls. Der Faktor $\mathcal{F}_{\text{DP}}$ beschreibt die in diesem Modell auftretenden Unsicherheiten (entsprechend $\mathcal{F}$).

4.3.1 Wirkungsquerschnitt der Dipol-Dipol-Streuung

Für kleine x_{Bj} bewegen sich sowohl Proton als auch Photon längs des Lichtkegels. Somit wird auch die Wechselwirkung des im Proton befindlichen Dipols mit dem I-Feld durch einen Wilson-Loop beschrieben, dessen Pfad parallel zum fast lichtartigen Impuls P verläuft, während der zuvor berechnete, die Wechselwirkung des γ^*-Dipols beschreibende Wilson-Loop von q abhing. Der Wirkungsquerschnitt der I-induzierten Streuung zweier Dipole der Größe $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{r}_h$ in der Eikonalnäherung ist nach der Integration über die I-Konfiguration und dem Impaktparameter $\boldsymbol{b}$ (die Integration über die Orientierung U ist auf 1 normiert):

$$\sigma^{(I)}_{\mathrm{DP\,DP}}(\boldsymbol{r}_h, \boldsymbol{r}) = \int d^4 z \int_0^\infty d\rho\, D(\rho) \int d^2\boldsymbol{b}\, \left[1 - \mathcal{W}_C^{(I)}\left(\tfrac{\boldsymbol{r}_h}{2}, -\tfrac{\boldsymbol{r}_h}{2}; P\right)\right] \left[1 - \mathcal{W}_C^{(I)}\left(\boldsymbol{b} + \tfrac{\boldsymbol{r}}{2}, \boldsymbol{b} - \tfrac{\boldsymbol{r}}{2}; q\right)\right] \tag{4.35}$$

mit den Wilson-Loops $\mathcal{W}_C(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; p_i)$ aus Gleichung (4.24). Ähnliche Beiträge zur Dipol-Dipol-Streuung im I-Hintergrund wurden in [28] berechnet. Es sei nochmals erwähnt, daß Gleichung (4.35) in Euklidischer Raumzeit gilt; erst nach der Integration wird das Resultat in die Minkowski-Raumzeit fortgesetzt. Zunächst führt man in Gleichung (4.35) die Integration über die longitudinalen Komponenten z_3 und z_4 durch. Aus (4.24) und (4.19) folgt, daß sich die gesamte z_3- und z_4-Abhängigkeiten auf die Kombinationen $\frac{(q_3\, z_4 - q_4\, z_3)^2}{q^2}$ und $\frac{(P_3\, z_4 - P_4\, z_3)^2}{P^2}$ reduzieren läßt. Nach der Durchführung der longitudinalen z-Integrationen und der Substitution $(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{z}) \to \boldsymbol{b}$ im Photon-Wilson-Loop faktorisieren die Integrationen in (4.34) in Photon- und Protonanteile (konstante Faktoren werden ignoriert, da sie aufgrund des Faktors $\mathcal{F}_{\mathrm{DP}}$ unbestimmt bleiben):

$$\sigma^{(I)}_{\mathrm{DP\,DP}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_h) \sim \int_0^\infty d\rho\, D(\rho)\, \rho^4\; \tilde{f}\left(\frac{r_h}{\rho}\right) \rho^2\, \tilde{f}\left(\frac{r}{\rho}\right) \tag{4.36}$$

mit der entsprechend $f(x)$ (4.28) definierten Funktion:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x) &= 2\,\frac{2}{N_c} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dw\, w \int_{-\infty}^{+\infty} d\widetilde{w}\, [1 - \cos(\gamma_1)\cos(\gamma_2) - \alpha \sin(\gamma_1)\sin(\gamma_2)]\;, \\
\gamma_1 &= \pi\sqrt{\frac{w^2 + \widetilde{w}^2}{w^2 + \widetilde{w}^2 + 1}}\,, \qquad \gamma_2 = \pi\sqrt{\frac{w^2 + \widetilde{w}^2 + x^2 + 2\,x\,w\,\cos\phi}{w^2 + \widetilde{w}^2 + x^2 + 2\,x\,w\,\cos\phi + 1}}\,, \\
\alpha &= \frac{w^2 + w\,x\,\cos\phi + \widetilde{w}^2}{\sqrt{w^2 + \widetilde{w}^2}\,\sqrt{w^2 + \widetilde{w}^2 + x^2 + 2\,w\,x\,\cos\phi}}\,.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Der Wirkungsquerschnitt (4.36) der Dipol-Dipol-Streuung ist strukturell identisch zum Dipolwirkungsquerschnitt (4.27). Der Unterschied liegt in der in $\tilde{f}$ absorbierten Integration über eine longitudinale Komponente der I-Position sowie dem dimensionslosen Formfaktor $\propto \tilde{f}\left(\frac{r_h}{\rho}\right)$, der die Wechselwirkung des Proton-Dipols mit dem Instanton absorbiert. Aus dem Wirkungsquerschnitt der Streuung zweier Dipole beliebiger Größe in der Eikonalnäherung (4.36) wird nun mittels eines Modells der Wellenfunktion $\Psi_h(z_h, r_h)$ der Dipolwirkungsquerschnitt berechnet.

4.3.2 Hadronwellenfunktion und Dipolwirkungsquerschnitt

Aus dem Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\mathrm{DP\,DP}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_h)$ läßt sich im Rahmen des durch Gleichung (4.34) beschriebenen Modells der Dipolwirkungsquerschnitt berechnen:

$$\sigma^{(I)}_{\mathrm{DP}}(r, \ldots) = \int dz_h \int d^2\boldsymbol{r}_h\, |\Psi_h(z_h, r_h)|^2\, \sigma^{(I)}_{\mathrm{DP\,DP}}(\boldsymbol{r}_h, \boldsymbol{r}). \tag{4.38}$$

Eine spezielle, in [46] benutzte Form der hadronischen Wellenfunktion beschreibt die Ausdehnung des Protons mittels einer Gauß-Funktion der Breite R_h:

$$\Psi(z_h, r_h) = f_h(z_h)\, \exp\left\{-\frac{\boldsymbol{r}_h^2}{4\,R_h^2}\right\}, \tag{4.39}$$

wobei R_h der Protonradius ist. $f_h(z_h)$ bezeichnet die hier unwichtige Abhängigkeit von der longitudinalen Komponente z_h. Die Normierung der Wellenfunktion fixiert das Integral über z_h:

$$\int dz_h\, |\Psi(z_h, r_h)|^2 = \frac{1}{2\pi R_h^2} \exp\left\{-\frac{\boldsymbol{r}_h^2}{2\,R_h^2}\right\} \tag{4.40}$$

und dann lautet der sich in diesem Modell ergebende Dipolwirkungsquerschnitt:

$$\sigma_{\mathrm{DP}}^{(I)}(r, \ldots) = \int_0^\infty d\rho\, D(\rho)\, \rho^4\, \mathcal{F}_h\left(\frac{\rho}{R_h}, \ldots\right) \rho^2\, \tilde{f}\left(\frac{r}{\rho}\right), \tag{4.41}$$

mit einem die Hadronwellenfunktion und den Proton-Wilson-Loop absorbierenden hadronischen Formfaktor

$$\mathcal{F}_h\left(\frac{\rho}{R_h}, \ldots\right) = \mathcal{F}'_{\mathrm{DP}} \int d^2\boldsymbol{r}_h\, \frac{1}{2\pi R_h^2} \exp\left\{-\frac{\boldsymbol{r}_h^2}{2\,R_h^2}\right\} \tilde{f}\left(\frac{r_h}{\rho}\right). \tag{4.42}$$

Aufgrund des ausgeprägten Maximums der I-Größenverteilung bei $\langle\rho\rangle$ ist der zu (4.27) analoge Dipolwirkungsquerschnitt:

$$\sigma_{\mathrm{DP}}^{(I)}(r, \ldots) \approx \mathcal{F}_h\left(\frac{\langle\rho\rangle}{R_h}, \ldots\right) \frac{2}{\pi^2}\, \kappa\, \langle\rho\rangle^2\, \tilde{f}\left(\frac{r}{\langle\rho\rangle}\right). \tag{4.43}$$

Der Dipolwirkungsquerschnitt, der sich in diesem Modell ergibt, ist strukturell mit dem aus dem einfachsten Modell identisch (4.27). Er strebt ebenfalls für $\frac{r}{\langle\rho\rangle} \gg 1$ einen konstanten Grenzwert zu, der proportional zur Fläche $\pi\,\langle\rho\rangle^2$ des Instantons ist. Wie schon in Gleichung (4.29), hängt auch hier der Grenzwert von einem Faktor $\mathcal{F}_h$ ab, der die Protonstruktur beschreibt:

$$\lim_{r\to\infty} \sigma_{\mathrm{DP}}^{(I)}(r, \ldots) \approx \mathcal{F}_h\left(\frac{\langle\rho\rangle}{R_h}, \ldots\right) \frac{2}{\pi^2}\, \kappa\, \langle\rho\rangle^2\, \frac{2}{N_c}\, 55.5\,. \tag{4.44}$$

Der Dipolwirkungsquerschnitt zeigt auch die (4.30) entsprechende Farbtransparenz:

$$\sigma_{\mathrm{DP}}^{(I)}(r, \ldots) \approx \mathcal{F}_h\left(\frac{\langle\rho\rangle}{R_h}, \ldots\right) \frac{2}{\pi^2}\, \kappa\, r^2\, \frac{2}{N_c}\, 16.9 \left\{1 + \mathcal{O}\left(\frac{r^2}{\langle\rho\rangle^2}\right)\right\}. \tag{4.45}$$

Abbildung 4.2 zeigt den Dipolwirkungsquerschnitt (4.43) geteilt durch seinen Grenzwert (4.44) im Rahmen des in diesem Abschnitt benutzten Modells; das Verhältnis ist unabhängig von den unbekannten Faktoren. Man erkennt eine weitgehende Übereinstimmung mit der Vorhersage des Modells des Abschnitts 4.2 (siehe Abbildung 4.1). Der Formfaktor $\mathcal{F}_h$ vermittelt zwischen den beiden Modellen und stellt den Zusammenhang zwischen einen Instanton im Vakuum und im Gluonfeld des Protons her.

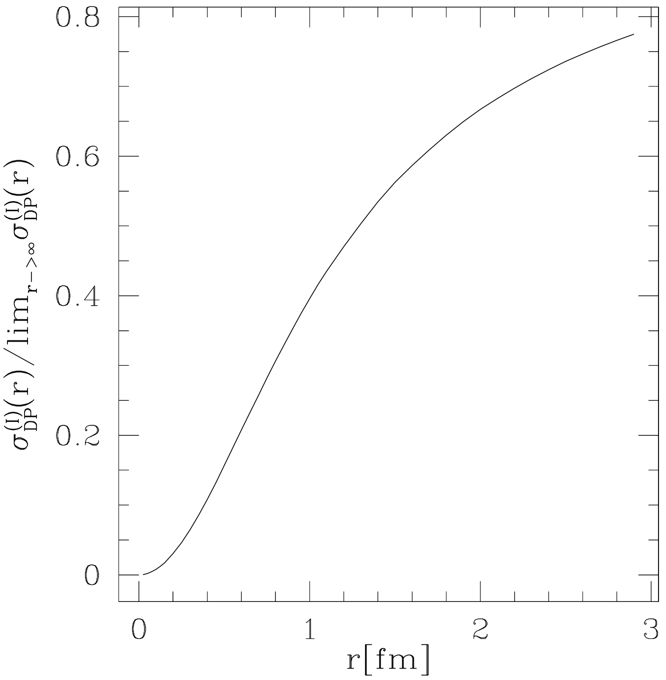


Abbildung 4.2: Die Abbildung zeigt $\sigma_{\rm DP}^{(I)}(r,\ldots)$ (4.43) normiert auf dem saturierten Grenzwert (4.44).

4.4 Zusammenfassung

Der Dipolwirkungsquerschnitt wurde basierend auf der nichtabelschen Eikonalnäherung in zwei Modellen berechnet. Grundlage bildet dabei der analytisch berechnete Wilson-Loop (4.24), der die Wechselwirkung des Dipols mit dem I-Eichfeld beschreibt. Im ersten Modell wurde – den semiklassischen Zugang aus [43–45] folgend – der Dipolwirkungsquerschnitt berechnet, der sich ergibt, wenn man das Proton lediglich als Quelle des klassischen I-Eichfeldes betrachtet. Im zweiten Zugang wurde, basierend auf [46], ein Modell benutzt, in dem das Proton eine Überlagerung aus Dipolen darstellt. Dieses Modell illustriert die Bedeutung der Integration über die I-Position.

In beiden Fällen ergab sich ein Wirkungsquerschnitt, der im wesentlichen von $\frac{r}{\langle\rho\rangle}$ abhängt (siehe die Gleichungen (4.27) und (4.43)):

$$\sigma_{\rm DP}(r,\ldots) \approx \mathcal{F}\,\frac{2}{\pi^2}\,\kappa\,\langle\rho\rangle^2\,f\left(\frac{r}{\langle\rho\rangle}\right)\,, \tag{4.46}$$

wobei die Funktion f (Gleichungen (4.28) und (4.37)) in beiden Modellen leicht unterschiedlich ist. Der Faktor $\mathcal{F}$ enthält die Protonstruktur, die in beiden Modellen unterschiedlich ist und (analog zur Gluonverteilung im Dipolwirkungsquerschnitt (3.115)) nicht genau spezifiziert werden kann.

In beiden Modellen beginnt das Wachstum des Dipolwirkungsquerschnitt sich signifikant abzuschwächen, sobald die Dipolgröße r die relevante I-Skala $\langle\rho\rangle$ erreicht, und erreicht schließlich einen saturierten Wert, der proportional zur Fläche $\pi\,\langle\rho\rangle^2$ des Instantons ist:

$$\sigma_{\rm DP}(r,\ldots) \overset{\frac{r}{\langle\rho\rangle}\gg 1}{\sim} \mathcal{F}\,\frac{2}{\pi^2}\,\kappa\,\langle\rho\rangle^2. \tag{4.47}$$

Für kleine r verschwindet in beiden Modellen der Wirkungsquerschnitt mit r^2 (Farbtransparenz).

Die Ergebnisse dieses Kapitels sind weitgehend konsistent zu denen im Kapitel 3. Auch in dem Zugang, der durch die nichtabelsche Eikonalnäherung vermittelt wird, zeigt sich, daß im I-Hintergrund Saturationsphänomene relevant werden, wenn r die Größenordnung der I-Skala erreicht. Insbesondere erreicht der Dipolwirkungsquerschnitt in den Zugängen für $\frac{r}{\langle\rho\rangle} \gg 1$ einen konstanten Wert, der durch die Fläche $\pi\langle\rho\rangle^2$ des Instantons bestimmt wird.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

Instantonen stellen einen wesentlichen, nichtperturbativen Aspekt der QCD dar, was es interessant macht, die Bedeutung der Instantonen im Bereich kleinerer Q^2 zu untersuchen. Insbesondere sollte die Frage diskutiert werden, ob Instantonen einen möglichen Mechanismus für das bei kleinem x_{Bj} erwartete Saturationsphänomen darstellen könnten.

Untersucht wurde die Saturation im Farbdipol-Bild, da sich in diesem Rahmen der mögliche Übergang zur Saturation in einen Wettbewerb zwischen der Dipolgröße r und der spezifischen Instantonskala $\langle\rho\rangle$ sehr anschaulich manifestieren sollte. Die Saturation entspricht hier einem Abflachen des Anstiegs des Dipolwirkungsquerschnitt mit größer werdenen Dipolen.

Im ersten Zugang wurden die bekannten Ergebnisse der Instanton-Störungstheorie in das Farbdipol-Bild transformiert. Dazu bedarf es der Fortsetzung der bei großen Impulsüberträgen gültigen Instanton-Störungstheorie zu kleineren Impulsskalen:

- Es konnte gezeigt werden, daß der Gebrauch von Gitterdaten auf Wirkungsquerschnitte führt, die bei verschwindenden Impulsüberträgen nicht mehr divergieren.

Die nun auch bei weicheren Skalen endlichen und sinnvollen Wirkungsquerschnitte der instanton-induzierten Prozesse wurden sodann ins Farbdipol-Bild übersetzt:

- Es zeigt sich tatsächlich ein Wettbewerb zwischen der Größe des Dipols r und der Instantongröße ρ, der dazu führt, daß $\langle\rho\rangle$ in diesem Zugang die entscheidende Skala für das Verhalten des Dipolwirkungsquerschnitts ist.

- Für kleine Dipole konnten die Resultate vollständig im Rahmen der Instanton-Störungstheorie beschrieben werden. Das Verhalten entsprach in diesem Bereich der in der üblichen Störungstheorie geltenden Farbtransparenz.

- Für größere Dipole mit hadronischen Ausmaßen muß von der auf dem Gitter simulierten Instanton-Größenverteilung Gebrauch gemacht werden, die ein ausgeprägtes Maximum bei $\langle\rho\rangle$ aufweist. Dehnt man die Dipole auf hadronische Dimensionen aus, beginnt der Anstieg des Dipolwirkungsquerschnitt in der Region $r \approx \langle\rho\rangle$ abzuflachen.

- Für $\frac{r}{\langle\rho\rangle} \gg 1$ faktorisiert das Produkt aus Wellenfunktion und Dipolwirkungsquerschnitt im Instantonhintergrund in die Wellenfunktion der üblichen Störungstheorie und einen konstanten, saturierten Wirkungsquerschnitt, der proportional zur Fläche $\pi\langle\rho\rangle^2$ des Instantons im Vakuum ist.

In einem alternativen Zugang wurde der Dipolwirkungsquerschnitt im Rahmen der nichtabelschen Eikonalnäherung diskutiert. In dieser adäquaten Näherung werden die Dipole durch Wilson-Loops dargestellt, die die Wechselwirkung mit dem Instantoneichfeld beschreiben:

- Für ein klassisches Instantoneichfeld konnte der Wilson-Loop analytisch berechnet werden.
- Angelehnt an den semiklassischen Zugang [43–45], in dem das Proton lediglich als Quelle klassischer Felder betrachtet wird, ließ sich aus dem Wilson-Loop der Dipolwirkungsquerschnitt berechnen. Unbestimmt bleibt dabei ein Faktor, der den Zusammenhang zwischen den Farbfeldern des Protons und dem Instantoneichfeld beschreibt. Der resultierende Dipolwirkungsquerschnitt verschwindet für kleine r und steigt mit r^2 an. Der Anstieg flacht erneut aus, wenn r die mittlere Instantongröße $\langle\rho\rangle \approx 0.5$ fm erreicht. Dehnt man die Dipole weiter aus, so strebt auch in der nichtabelschen Eikonalnäherung der Dipolwirkungsquerschnitt gegen einen saturierten Wert, der proportional zur Fläche $\pi\langle\rho\rangle^2$ des Instantons ist.
- In einen leicht erweiterten Modell [46] wurde das Proton als Überlagerung von Dipolen beschrieben. Dies führte auf Resultate, die konsistent mit denen des vorherigen Modells sind und die Bedeutung der Integration über die Instantonposition verdeutlichen.

Die von harten Skalen ausgehende Instanton-Störungstheorie und die nichtabelsche Eikonalnäherung führen zu konsistenten Beschreibungen der Streuung im Instantonhintergrund im Farbdipol-Bild. Es konnte explizit illustriert werden, daß Instantonen potentiell zum Phänomen der Saturation beitragen und die Instantonskala $\langle\rho\rangle$ die Skala setzt, bei der Saturationsphänomene relevant werden.

Mit den Ergebnissen stellen sich interessante neue Fragen, deren Beantwortung das Verständnis der Instantonen im Bereich kleinerer Q^2 weiter vertiefen könnte:

- Die hier erreichte Fortsetzung der Resultate der Instanton-Störungstheorie zu weicheren Skalen bedarf einer weiteren, detaillierten phänomenologischen Untersuchung insbesondere im Hinblick auf die Unsicherheiten der Gitterergebnisse. Dies würde die Erfolgsaussichten der Instantonsuche bei HERA wesentlich verbessern, da die bisher notwendigen großen Impulsüberträge die Instantonbeiträge exponentiell unterdrücken.
- Vielversprechend ist überdies eine weitergehende Untersuchung der BK-Gleichungen im Hinblick auf die analytisch berechnete Dipolstreuamplitude im Hintergrund eines Instantons, um die x_{Bj}-Abhängigkeit von der durch das Instanton induzierten Saturationsskala besser verstehen zu können.
- Interessant ist in dieser Hinsicht eine weitergehende Untersuchung der konformen Invarianz des Instantonsektors und der BK-Gleichungen.

Anhang A

Konventionen

A.1 Eichfelder

Das Eichfeld $A_\mu \in \mathsf{SU(N_c)}$ setzt sich aus den skalaren Eichfeldern A_μ^a zusammen:

$$A_\mu = A_\mu^a T^a, \qquad a = 1, \ldots, N_c^2 - 1. \tag{A.1}$$

Die Erzeuger der $\mathsf{SU(N_c)}$ genügen den Vertauschungsrelationen bzw. Normierungsbedingungen:

$$[T_a, T_b] = i\, f^{abc}\, T_c\,, \tag{A.2}$$

$$\mathrm{tr}[T_a T_b] = \frac{\delta_{ab}}{2}\,, \tag{A.3}$$

mit den Strukturkonstanten f^{abc}. In der $\mathsf{SU(3)}$ werden die Erzeuger in der fundamentalen Darstellung durch die Gell-Mann-Matrizen $T^a = \frac{\lambda^a}{2}$ beschrieben; und in der $\mathsf{SU(2)}$ entsprechend durch die Pauli-Matrizen $T^a = \frac{\sigma^a}{2}$. Der Feldstärketensor ist:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i\, g_s\, [A_\mu, A_\nu]. \tag{A.4}$$

A.2 Matrizen

In Euklidischer Raumzeit werden die Fermionen in der Weyl-Darstellung beschrieben. Gepunktete und ungepunktete griechische Indizes unterscheiden die beiden $\mathsf{SU(2)}$-Darstellungen.

Die Euklidischen Dirac-Matrizen lauten,

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \overline{\sigma}_\mu \\ \sigma_\mu & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mu = 1, \ldots, 4\,. \tag{A.5}$$

Sie sind hermitisch und erfüllen die Bedingung:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\, \delta_{\mu\nu}\,. \tag{A.6}$$

Die σ_μ-Matrizen ergeben sich aus den bekannten Pauli-Matrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{A.7}$$

mittels

$$\left(\sigma_\mu^{\mathrm{E}}\right)^{\alpha\dot\beta} = (-i\,\sigma_i, 1)^{\alpha\dot\beta}\,, \qquad \left(\overline{\sigma}_\mu^{\mathrm{E}}\right)_{\dot\alpha\beta} = (+i\,\sigma_i, 1)_{\dot\alpha\beta} \tag{A.8}$$

und erfüllen die (A.6) entsprechende Relation:

$$\sigma_\mu\overline{\sigma}_\nu + \sigma_\nu\overline{\sigma}_\mu = 2\,\delta_{\mu\nu}, \tag{A.9}$$

Für einen beliebigen Vierervektor a_μ definiert man nun

$$a = \sigma^\mu\, a_\mu\,, \qquad \overline{a} = \overline{\sigma}^\mu\, a_\mu\,. \tag{A.10}$$

Damit folgt aus (A.9) für zwei beliebige Vektoren a und b:

$$a\,\overline{b} + b\,\overline{a} = 2\,a\cdot b\,. \tag{A.11}$$

A.3 Freie Weyl-Spinoren

Zerlegt man die Lösung u der freien masselosen Dirac-Gleichung entsprechend (2.38),

$$u(k) = \begin{pmatrix}\chi_R(k)_{\dot\alpha}\\ \chi_L(k)^\alpha\end{pmatrix}, \tag{A.12}$$

in χ_R und χ_L, sind diese freie Spinoren mit einer definierten Händigkeit. Sie genügen den Bewegungsgleichungen:

$$\overline{k}\,\chi_L(k) = 0\,, \qquad k\,\chi_R(k) = 0\,, \tag{A.13}$$

die aus der Dirac-Gleichung

$$\not{k}\,u(k) = \begin{pmatrix}0 & \overline{k}\\ k & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi_R(k)\\ \chi_L(k)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\overline{k}\,\chi_L(k)\\ k\,\chi_R(k)\end{pmatrix} = 0 \tag{A.14}$$

folgen.

Weiter gelten die Orthonomierungsbedingungen:

$$\chi_L(k)\,\chi_L^\dagger(k) = k, \qquad \chi_R(k)\,\chi_R^\dagger(k) = \overline{k} \tag{A.15}$$

$$\chi_L^\dagger(k)\,\chi_R(k), = 0, \qquad \chi_R^\dagger(k)\,\chi_L(k) = 0. \tag{A.16}$$

A.4 Wick-Rotation

Hier wird die wichtige analytische Fortsetzung in die Minkowski-Raumzeit beschrieben. Die σ_μ-Matrizen lauten:

$$\left(\sigma_\mu^{\mathrm{M}}\right)^{\alpha\dot\beta} = (1, -\sigma_i)^{\alpha\dot\beta}\,, \qquad \left(\overline{\sigma}_\mu^{\mathrm{M}}\right)_{\dot\alpha\beta} = (1, \sigma_i)_{\dot\alpha\beta} \tag{A.17}$$

und genügen der Relation:

$$\sigma_\mu\overline{\sigma}_\nu + \sigma_\nu\overline{\sigma}_\mu = 2\,g_{\mu\nu}. \tag{A.18}$$

Die γ^5-Matrix ändert ihr Vorzeichen:

$$(\gamma_\mu)^{\mathrm{M}} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{\sigma}_\mu^{\mathrm{M}} \\ \sigma_\mu^{\mathrm{M}} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \left(\gamma^5\right)^{\mathrm{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mu = 0, \ldots, 3, \tag{A.19}$$

so daß (A.11) auch in der Minkowski-Raumzeit gilt. Für den Wechsel eines Ortsvektors x_μ und seines konjugierten Impulses p_μ von Euklidischer in Minkowski-Raumzeit bestehen folgende Konventionen:

$$\begin{aligned} (x_4)_{\mathrm{E}} &= +i\,(x^0)_{\mathrm{M}}, \qquad (x_i)_{\mathrm{E}} = +(x^i)_{\mathrm{M}}, \qquad i = 1,2,3\,; \\ (p_4)_{\mathrm{E}} &= -i\,(p^0)_{\mathrm{M}}, \qquad (p_i)_{\mathrm{E}} = -(p^i)_{\mathrm{M}}, \qquad i = 1,2,3. \end{aligned} \tag{A.20}$$

Damit ändert sich auch das Volumenelement:

$$(d^4x)_{\mathrm{E}} = +i\,(d^4x)_{\mathrm{M}}, \qquad (d^4p)_{\mathrm{E}} = -i\,(d^4p)_{\mathrm{M}}, \tag{A.21}$$

die Wirkung:

$$S_{\mathrm{M}} = i\,S_{\mathrm{E}}, \tag{A.22}$$

sowie Lorentz-invariante Größen:

$$(x^2)_{\mathrm{E}} = -(x^2)_{\mathrm{M}}, \qquad (p^2)_{\mathrm{E}} = -(p^2)_{\mathrm{M}}, \qquad (x\cdot p)_{\mathrm{E}} = (x\cdot p)_{\mathrm{M}}. \tag{A.23}$$

Anhang B

Fouriertransformationen der Felder im Instantonhintergrund

Hier werden die Fouriertransformationen der verschiedenen I-Felder in Euklidischer Raumzeit angegeben. Die Fouriertransformation lautet:

$$f(\ldots, k, \ldots) = \int d^4x \; e^{-ik\cdot x} \, f(\ldots, x, \ldots). \tag{B.1}$$

In singulärer Eichung sind die Fouriertransformationen des I-Eichfeldes (2.32) sowie die der Quark-Nullmoden (2.44) und (2.45) gegeben durch [18]:

$$A_\mu^{(I)}(p) = \frac{2\pi^2}{g_s} \, \rho^2 \, \frac{1}{p^2} \, \frac{U \left[p\overline{\sigma}_\mu - \sigma_\mu \overline{p} \right] U^\dagger}{2} \, r_g(\rho\sqrt{p^2}), \tag{B.2}$$

$$\kappa_{\dot{\alpha}}^{(I)\,k}(-k) = 2\pi \, \rho^{3/2} \, \epsilon^{\alpha\beta} \, (U)^k_\beta \, \frac{i \, \overline{k}_{\dot{\alpha}\alpha}}{k^2} \, r_q\left(\frac{\rho\sqrt{k^2}}{2} \right), \tag{B.3}$$

$$\overline{\phi}_k^{(I)\,\dot{\alpha}}(-k) = 2\pi \, \rho^{3/2} \, \epsilon_{\beta\alpha} \, (U^\dagger)^\beta_k \, \frac{i \, k^{\alpha\dot{\alpha}}}{k^2} \, r_q\left(\frac{\rho\sqrt{k^2}}{2} \right). \tag{B.4}$$

Die Funktionen r_g und r_q sind für auf der Masseschale befindliche Quarks und Gluonen auf 1 normiert $r_{q,g}(0) = 1$. Sie enthalten verschiedene Bessel-I- und Bessel-K-Funktionen:

$$r_g(x) = \frac{4}{w^2} - 2\,\mathrm{K}_2(x)\,, \qquad r_q(x) = -x\,\frac{\partial}{\partial\, x}[\mathrm{I}_0(x)\mathrm{K}_0(x) - \mathrm{I}_1(x)\mathrm{K}_1(x)]\,. \tag{B.5}$$

Die Fouriertransformation des Fermionpropagators (2.72) im Hintergrund eines Instantons sind im Grenzwert $k^2 \to 0$ bzw. für $k^2 \ll \frac{|k\cdot x|}{x^2}$ [18]:

$$\left(S^{(I)}(x,-k)^{\alpha\dot{\beta}}\right)^i_j = i\,\frac{k^{\alpha\dot{\beta}}}{k^2} \left\{ \frac{-\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+\rho^2}} \, e^{ik\cdot x} \left[1 + \left(1 - e^{-ik\cdot x}\right) \frac{\rho^2}{x^2} \, \frac{[U\, x\overline{k}\, U^\dagger]}{2\,k\cdot x} \right]^i_j \right\} + \mathcal{O}(\log k^2), \tag{B.6}$$

$$\left(\overline{S}^{(I)}(-k,x)_{\dot{\alpha}\beta}\right)^i_j = i\,\frac{\overline{k}_{\dot{\alpha}\beta}}{k^2} \left\{ \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+\rho^2}} \, e^{ik\cdot x} \left[1 + \left(1 - e^{-ik\cdot x}\right) \frac{\rho^2}{x^2} \, \frac{[U\, k\overline{x}\, U^\dagger]}{2\,k\cdot x} \right]^i_j \right\} + \mathcal{O}(\log k^2). \tag{B.7}$$

Anhang C

Suadakov-Variablen

Die Impulse der vom Photon erzeugten Quarks k_1 und $q - k_1$, die den Dipol bilden, werden nach den Onshell-Impulsen q' und P zerlegt: P ist der Impuls des Protons, und der andere Onshell-Impuls lautet:

$$q' = q + x_{\mathrm{Bj}}\, P \quad \Rightarrow \quad q'^2 = q^2 + x_{\mathrm{Bj}}\, 2\, q \cdot P = 0\,. \tag{C.1}$$

Ist die virtuelle Masse Q^2 des Photons klein gegen die Schwerpunktsenergie der $\gamma^* P$-Streuung, nähert sich der Impuls q dem Onshell-Impuls q' an.

Die Zerlegungen der Impulse sind:

$$k_1 = z\, q' + \lambda\, P + l_\perp, \tag{C.2}$$

$$q - k_1 = z'\, q' + \lambda'\, P - l_\perp, \tag{C.3}$$

$$q = q' - x_{\mathrm{Bj}}\, P. \tag{C.4}$$

$l_\perp$ ist der Impulsanteil senkrecht zu der von q' und P aufgespannten Ebene, $\boldsymbol{l}$ der zweidimensionale Euklidischer Vektor, der die zwei Freiheitsgrade dieser orthogonalen Ebenen beschreibt. Da $\boldsymbol{l}$ Euklidisch ist, gilt $l_\perp^2 = -\boldsymbol{l}^2$. Aus der Impulserhaltung folgt neben $(k_1)_\perp = -(q-k_1)_\perp$ auch:

$$z + z' = 1 \quad \Rightarrow \quad z' = 1 - z, \tag{C.5}$$

$$\lambda + \lambda' = -x_{\mathrm{Bj}} \quad \Rightarrow \quad \lambda' = -\lambda - x_{\mathrm{Bj}}. \tag{C.6}$$

Aus der Onshell-Bedingung erhält man:

$$k_1^2 = z\lambda\, 2\, q' \cdot P - \boldsymbol{l}^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\boldsymbol{l}^2}{z\, 2\, q' \cdot P}, \tag{C.7}$$

und aus den Gleichungen (C.6), (C.7) und (C.4) (siehe auch Gleichung (3.60)):

$$\begin{aligned} -t &= -(q-k_1)^2 = -(z'\,\lambda'\, 2q'P - \boldsymbol{l}^2) \\ &= (1-z)\left(\tfrac{\boldsymbol{l}^2}{z} + Q^2\right) + \boldsymbol{l}^2 = \frac{1}{z}\left(z(1-z)\, Q^2 + \boldsymbol{l}^2\right)\,. \end{aligned} \tag{C.8}$$

$-u$ ergibt sich entsprechend nach Vertauschung von k_1 und k_2, was durch $z \leftrightarrow (1-z)$ realisiert wird:[1]

$$-u = \frac{1}{1-z}\left(z(1-z)\, Q^2 + \boldsymbol{l}^2\right)\,. \tag{C.9}$$

[1] Dies gilt nur bei verschwindenden Transversalimpuls des Gluons. Für $\boldsymbol{k} \neq 0$ im Rahmen der k_t-Faktorisierung ist überdies die Ersetzung $\boldsymbol{l} \leftrightarrow (\boldsymbol{l} + \boldsymbol{k})$ durchzuführen.

Aus Gleichung (3.10) folgt dann:

$$x = \frac{-Q^2}{t+u} = \frac{z(1-z)\,Q^2}{(1-z)\,\left(z(1-z)\,Q^2 + \boldsymbol{l}^2\right) + z\,\left(z(1-z)\,Q^2 + \boldsymbol{l}^2\right)} = \frac{z(1-z)\,Q^2}{z(1-z)\,Q^2 + \boldsymbol{l}^2}, \tag{C.10}$$

$$1 - x = 1 - \frac{z(1-z)\,Q^2}{z(1-z)\,Q^2 + \boldsymbol{l}^2} = \frac{\boldsymbol{l}^2}{z(1-z)\,Q^2 + \boldsymbol{l}^2}. \tag{C.11}$$

Anhang D

Longitudinale und transversale Instantonbeiträge im Farbdipol-Bild

In diesem Anhang findet sich die Herleitung der Produkte aus Wellenfunktion und Dipolwirkungsquerschnitte im I-Hintergrund (Gleichungen (3.80) - (3.82)). Wir beginnen mit dem longitudinalen Anteil.

Der longitudinale Wirkungsquerschnitt (3.71) läßt sich umschreiben:

$$\sigma_L(x_{\rm Bj}, Q^2) = \frac{\pi^6}{2} \sum_{f=1}^{n_f} \frac{e_f^2}{Q^2} \frac{\alpha_{\rm em}}{\alpha_{\rm s}} x_{\rm Bj}\, G\left(x_{\rm Bj}, \mu_f^2\right) \int dz \int d^2\boldsymbol{l}\ \left[F_L(z, \boldsymbol{l}) - F_L(1-z, \boldsymbol{l})\right]^2 \tag{D.1}$$

mit der Funktion:

$$F_L(z, \boldsymbol{l}) = Q^2 \frac{z\, \boldsymbol{l}^2}{\widehat{Q}^2 + \boldsymbol{l}^2} \frac{\mathcal{R}\left(\sqrt{\frac{\widehat{Q}^2 + \boldsymbol{l}^2}{z}}\right) - \mathcal{R}(Q)}{\boldsymbol{l}^2 - Q^2 z^2}. \tag{D.2}$$

Um den Wirkungsquerschnitt (D.1) nun mittels der Dipolgröße r auszudrücken, muß die Funktion (D.2) fouriertransformiert werden, Gleichung (3.66) führt dann unmittelbar auf den gesuchten Ausdruck. Es bleibt also die Berechnung der Fouriertransformierten:

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_L(z, r) &= \int \frac{d^2\boldsymbol{l}}{(2\pi)^2} Q^2 \frac{z\, \boldsymbol{l}^2}{\widehat{Q}^2 + \boldsymbol{l}^2} \frac{\mathcal{R}\left(\sqrt{\frac{\widehat{Q}^2 + \boldsymbol{l}^2}{z}}\right) - \mathcal{R}(Q)}{\boldsymbol{l}^2 - Q^2 z^2} \\ &= \frac{Q^2}{2\,\pi} \int_0^\infty dl\, l\ \mathrm{J}_0(lr) \frac{z\, l^2}{\widehat{Q}^2 + l^2} \frac{\mathcal{R}\left(\sqrt{\frac{\widehat{Q}^2 + l}{z}}\right) - \mathcal{R}(Q)}{l^2 - Q^2 z^2}, \end{aligned} \tag{D.3}$$

wobei von Gleichung (3.69) Gebrauch gemacht wurde. Zur Berechnung der Funktion (D.3) muß eine Entwicklung durchgeführt werden:

$$\frac{l^2}{l^2 - Q^2 z^2} = -\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{l^2}{Q^2 z^2}\right)^i. \tag{D.4}$$

Sie ist sinnvoll, da die Hauptanteile der Integration über l aus der Region $l^2 \sim \widehat{Q}$ stammen, und ist dann besonders gut, wenn $z \approx 1$ ist. Aus dieser Region stammen aber die größten Beiträge, da die Virtualität $\sqrt{\frac{\boldsymbol{l}^2+\widehat{Q}^2}{z}}$ minimal wird. Da überdies stets die Differenz $F(z,\boldsymbol{l}) - F(1-z,\boldsymbol{l})$ auftritt, ist die Entwicklung gerechtfertigt.

Dann erhält man mit $\mathcal{R}(\mathcal{Q})$ (3.51):

$$\widetilde{F}_L(z,r) = \int_0^\infty d\rho\; D(\rho)\,\rho^5\,\frac{1}{2\,\pi}\int_0^\infty dl\,l\;\mathrm{J}_0(lr)\,Q^2\,z\left[-\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{l^2}{Q^2\,z^2}\right)^i\right]F_L^0(z,l), \tag{D.5}$$

wobei

$$F_L^0(z,l) = \frac{1}{\widehat{Q}^2+l^2}\left[\frac{\rho}{\sqrt{z}}\sqrt{l^2+\widehat{Q}^2}\,\mathrm{K}_1\left(\frac{\rho}{\sqrt{z}}\sqrt{l^2+\widehat{Q}^2}\right) - (\rho\,Q)\,\mathrm{K}_1\,(\rho\,Q)\right] \tag{D.6}$$

ist. Die Fouriertransformation der Funktion F_L^0 kann analytisch durchgeführt werden:

$$\widetilde{F}_L^0(z,r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dl\,l\;\mathrm{J}_0(lr)\,F_L^0(z,l) = \frac{1}{2\pi}\left[\mathrm{K}_0\left(\widehat{Q}\sqrt{r^2+\tfrac{\rho^2}{z}}\right) - \mathrm{K}_0(\widehat{Q}\,r)\,(\rho\,Q)\,\mathrm{K}_1(\rho\,Q)\right]. \tag{D.7}$$

Ist die Fouriertransformierte einer Funktion bekannt, läßt sich diese auch mit einen weiteren Quadrat l^2 im Integranden berechnen. Aus

$$\widetilde{F}_L^i(z,r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dl\,l\;\mathrm{J}_0(lr)\;\left(l^2\right)^i F_L^0(z,l), \tag{D.8}$$

folgt

$$\widetilde{F}_L^i(z,r) = \left\{-\frac{1}{r}\frac{d}{d\,r}\left[r\frac{d}{d\,r}\right]\right\}^i\;\left[\widetilde{F}_L^0(z,r)\right] \tag{D.9}$$

induktiv sofort nach Vertauschung von der Ableitungen mit der Integration mittels der Relation:

$$-\frac{1}{r}\frac{d}{d\,r}\left[r\,\frac{d}{d\,r}\mathrm{J}_0(l\,r)\right] = l^2\;\mathrm{J}_0(l\,r)\,. \tag{D.10}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\widetilde{F}_L(z,r) = \int_0^\infty d\rho\; D(\rho)\,\rho^5\,\frac{1}{2\pi}\;Q^2\,z&\left\{-\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{Q^2\,z^2}\right)^i\left\{-\frac{1}{r}\frac{d}{d\,r}\left[r\frac{d}{d\,r}\right]\right\}^i\right\}\\ \times\left[\mathrm{K}_0\left(\widehat{Q}\sqrt{r^2+\tfrac{\rho^2}{z}}\right) - \mathrm{K}_0(\widehat{Q}\,r)\,(\rho\,Q)\,\mathrm{K}_1(\rho\,Q)\right]&.\end{aligned} \tag{D.11}$$

Mit dieser Lösung läßt sich die Gleichung (D.1) unter Gebrauch von Gleichung (3.66) umschreiben:

$$\sigma_L(x_{\mathrm{Bj}},Q^2) = \frac{\pi^6}{2}\sum_{f=1}^{n_f}\frac{e_f^2}{Q^2}\frac{\alpha_{\mathrm{em}}}{\alpha_{\mathrm{s}}}\,x_{\mathrm{Bj}}\,G\left(x_{\mathrm{Bj}},\mu_f^2\right)\int dz\int d^2\boldsymbol{r}\;(2\pi)^2\;\left[\widetilde{F}_L(z,r) - \widetilde{F}_L(1-z,r)\right]^2. \tag{D.12}$$

Aufgrund ihrer Struktur können in Gleichung (D.11) Terme weggelassen werden, die symmetrisch in z und $1-z$ sind. So ist nun der zweite Summand in Gleichung (D.11) symmetrisch, da

$$\left\{-\frac{1}{r}\frac{d}{d\,r}\left[r\frac{d}{d\,r}\right]\right\}\mathrm{K}_0(\widehat{Q}\,r) = -\widehat{Q}^2\,\mathrm{K}_0(\widehat{Q}\,r) \tag{D.13}$$

und somit, mittels der Aufsummierung einer geometrischen Reihe in $\frac{1-z}{z}$,

$$z\left\{-\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{Q^2\,z^2}\right)^i\left\{-\frac{1}{r}\frac{d}{d\,r}\left[r\frac{d}{d\,r}\right]\right\}^i\right\}\mathrm{K}_0(\widehat{Q}\,r) = z(1-z)\,\mathrm{K}_0(\widehat{Q}\,r) \tag{D.14}$$

ist. Dies erlaubt es, den zweiten Summanden nicht zu berücksichtigen, und wir erhalten:

$$\begin{aligned}\sigma_L(x_{\mathrm{Bj}},Q^2) = {}& \frac{\pi^6}{2}\sum_{f=1}^{n_f}\frac{e_f^2}{Q^2}\frac{\alpha_{\mathrm{em}}}{\alpha_{\mathrm{s}}}\,x_{\mathrm{Bj}}\,G\left(x_{\mathrm{Bj}},\mu_f^2\right)\int dz\int d^2\boldsymbol{r}\left\{\int_0^{\infty}d\rho\,D(\rho)\,\rho^5\,Q^2\,z\right.\\ & \left.\left[-\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{Q^2\,z^2}\right)^i\left[-\frac{1}{r}\frac{d}{d\,r}\left(r\frac{d}{d\,r}\right)\right]^i\mathrm{K}_0\left(\widehat{Q}\sqrt{r^2+\tfrac{\rho^2}{z}}\right)\right]-[z\leftrightarrow(1-z)]\right\}^2 .\end{aligned} \tag{D.15}$$

Berechnet man nun den ersten Summanden:

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{z^2\,Q^2}\left[-\frac{1}{r}\frac{d}{d\,r}\left(r\frac{d}{d\,r}\right)\right]\mathrm{K}_0\left(\widehat{Q}\sqrt{r^2+\tfrac{\rho^2}{z}}\right)\\ &\quad=\frac{z(1-z)}{z^2}\left[\frac{r^2}{r^2+\rho^2/z}\mathrm{K}_0\left(\widehat{Q}\sqrt{r^2+\tfrac{\rho^2}{z}}\right)-\frac{2\,\rho^2/z}{\widehat{Q}\,(r^2+\rho^2/z)^{3/2}}\mathrm{K}_1\left(\widehat{Q}\sqrt{r^2+\tfrac{\rho^2}{z}}\right)\right],\end{aligned} \tag{D.16}$$

erhält man genau die im Haupttext angegebene Form des longitudinalen Wirkungsquerschnitts (3.80).

Der planare Anteil zum transversalen Wirkungsquerschnitts ist deutlich einfacher zu berechnen und findet sich bereits im Haupttext (Gleichung (3.78)). Der nichtplanare Anteil involviert wie der longitudinalen Anteil eine Reihenentwicklung. Gleichung (3.68) führt dann zusammen mit den für den longitudinalen Fall demonstrierten Techniken in gleicher Weise von Gleichung (3.71) auf Gleichung (3.81).

Anhang E

Totaler Wirkungsquerschnitt im Farbdipol-Bild

Ein unabhängiger Test für die Richtigkeit der Resultate aus Abschnitt 3.2.3 liefert die Berechnung des totalen Wirkungsquerschnitts $\sigma(x_{\mathrm{Bj}}, Q^2)$, indem man $|\psi_{L,T}|^2\, \sigma_{\mathrm{DP}}$ über z und r integriert und mit dem Resultat vergleicht, welches aus der üblichen Faktorisierung mittels Integration über den Impulsübertrag $-t$ folgte.

Dies wird explizit am planaren Anteil zum transversalen Wirkungsquerschnitt überprüft. Mit Gleichung (3.78) ist, wenn man von der Symmetrie zwischen z und $1-z$ Gebrauch macht und das Integral mittels der Sattelpunktsgleichung (3.96) annähert:

$$
\begin{aligned}
\sigma(x_{\mathrm{Bj}}, Q^2)_{T,\,\text{planar}} &= \frac{\pi^6}{8} \sum_{f=1}^{n_f} e_f^2\, \frac{\alpha_{\mathrm{em}}}{\alpha_{\mathrm{s}}}\, x_{\mathrm{Bj}}\, G\left(x_{\mathrm{Bj}}, \mu_f^2\right) \\
&\times \int_0^1 dz \int d^2\boldsymbol{r} \left\{ \int_0^\infty d\rho\; D(\rho)\rho^5 \left[\sqrt{\frac{\widehat{Q}^2\, r^2}{r^2+\rho^2/z}} \mathrm{K}_1\left(\widehat{Q}\sqrt{r^2+\tfrac{\rho^2}{z}}\right)\right]\right\}^2 + [z \leftrightarrow (1-z)] \\
&\approx \frac{\pi^6}{8} \sum_{f=1}^{n_f} e_f^2\, \frac{\alpha_{\mathrm{em}}}{\alpha_{\mathrm{s}}}\, x_{\mathrm{Bj}}\, G\left(x_{\mathrm{Bj}}, \mu_f^2\right) \left(\int_0^\infty d\rho\; D(\rho)\rho^5\right)^2 \\
&\times 2\pi \int_0^1 dz \int_0^\infty dr\; r \left[\frac{\widehat{Q}^2\, r^2}{r^2+\rho^{*\,2}/z}\, \mathrm{K}_1^2\left(\widehat{Q}\sqrt{r^2+\tfrac{\rho^{*\,2}}{z}}\right) + [z \leftrightarrow (1-z)]\right]. \qquad \text{(E.1)}
\end{aligned}
$$

ρ^* hängt hauptsächlich von Q und nur wenig von z und r ab. Die Größe ρ^* der beitragenden Instantonen ist im Bereich kleiner r mit $\frac{b}{Q}$ am kleinsten. Da $b \gg 1$ ist, ist auch stets $\rho^* Q \gg 1$. Dies führt nach den Substitutionen $x \to r\widehat{Q}$ und $y \to \rho^{*\,2} Q^2 (1-z)$ auf:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 dz \int_0^\infty dr\; r\, \frac{\widehat{Q}^2\, r^2}{r^2+\rho^{*\,2}/z}\, \mathrm{K}_1^2\left(\widehat{Q}\sqrt{r^2+\tfrac{\rho^{*\,2}}{z}}\right) \\
&\quad = \frac{1}{\rho^{*\,2} Q^2} \int_0^{\rho^{*\,2} Q^2} dy \int_0^\infty dx\; \frac{x^3}{x^2+y}\, \mathrm{K}_1^2\left(\sqrt{x^2+y}\right) = \frac{1}{\rho^{*\,2} Q^2}\, \frac{1}{3} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho^{*\,2} Q^2}\right)\right], \qquad \text{(E.2)}
\end{aligned}
$$

Setzt man dies in Gleichung (E.1) ein, so ist, mit $\frac{1}{\rho^{*\,2}}\left(\int d\rho\; D(\rho)\,\rho^5\right)^2 \approx \left(\int d\rho\; D(\rho)\,\rho^4\right)^2$:

$$\sigma_{T,\text{ planar}}(x_{\text{Bj}}, Q^2) \approx \frac{\pi^7}{6}\sum_{f=1}^{n_f} e_f^2\,\frac{\alpha_{\text{em}}}{\alpha_{\text{s}}}\,x_{\text{Bj}}\,G\left(x_{\text{Bj}}, \mu_f^2\right)\left(\int_0^\infty d\rho\; D(\rho)\rho^4\right)^2\,\frac{1}{Q^2}\,. \tag{E.3}$$

Benutzt man – wie in der Herleitung von Gleichung (3.78) – die Näherung (3.75), läßt sich aus den planaren Anteil des Partonwirkungsquerschnitts (3.59) ebenfalls $\sigma_{T,\text{ planar}}(x_{\text{Bj}}, Q^2)$ berechnen:

$$\begin{aligned}\sigma_{T,\text{ planar}}(x_{\text{Bj}}, Q^2) &= \int_{x_{\text{Bj}}}^1 \frac{d\,x}{x}\,\frac{x_{\text{Bj}}}{x} G\left(\frac{x_{\text{Bj}}}{x}, \mu_f^2\right)\,\hat{\sigma}^{\gamma^* g}_{T,\text{ planar}}(x, Q^2)\\ &= \frac{\pi^7}{3}\sum_{f=1}^{n_f} e_f^2\,\frac{\alpha_{\text{em}}}{\alpha_{\text{s}}}\left(\int_0^\infty d\rho\; D(\rho)\,\rho^4\right)^2\,\frac{1}{Q^2}\int_{x_{\text{Bj}}}^1 \frac{d\,x}{x}\,\frac{x_{\text{Bj}}}{x}\,G\left(\frac{x_{\text{Bj}}}{x}, \mu_f^2\right)\,x(1-x) \\ &\approx \frac{\pi^7}{3}\sum_{f=1}^{n_f} e_f^2\,\frac{\alpha_{\text{em}}}{\alpha_{\text{s}}}\left(\int_0^\infty d\rho\; D(\rho)\,\rho^4\right)^2\,\frac{1}{Q^2}\,x_{\text{Bj}} G\left(x_{\text{Bj}}, \mu_f^2\right)\,\frac{1}{2}\,.\end{aligned} \tag{E.4}$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ kommt von der nun trivialen Integral über x für $x_{\text{Bj}} \to 0$. Betrachtet man die Gleichungen (E.3) und (E.4), so erkennt man, daß, wie erwartet,

$$\int dz \int d^2\boldsymbol{r}\,\left(|\psi|^2\;\sigma_{\text{DP}}\right)_{T,\text{ planar}} \approx \int \frac{d\,x}{x}\,\frac{x_{\text{Bj}}}{x}\,G\left(\frac{x_{\text{Bj}}}{x}, \mu_f^2\right)\int d(-t)\,\frac{d\,\hat{\sigma}^{\gamma^* g}_{T,\text{ planar}}(x, -t, Q^2)}{d\,(-t)} \tag{E.5}$$

ist.

Literaturverzeichnis

[1] C. Adloff *et al.* [H1 Collaboration], Eur. Phys. J. C **21** (2001) 33;
S. Chekanov *et al.* [ZEUS Collaboration], Eur. Phys. J. C **21** (2001) 443.

[2] V.N. Gribov and L.N. Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys. **15** (1972) 438;
L.N. Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys. **20** (1975) 94;
G. Altarelli and G. Parisi, Nucl. Phys. B **126** (1977) 298;
Y.L. Dokshitzer, Sov. Phys. JETP **46** (1977) 641.

[3] A. De Rujula *et al.*, Phys. Rev. D **10** (1974) 1649.

[4] L.N. Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys. **23** (1976) 338;
V.S. Fadin, E.A. Kuraev and L.N. Lipatov, Phys. Lett. B **60** (1975) 50;
V.S. Fadin, E.A. Kuraev and L.N. Lipatov, Sov. Phys. JETP **44** (1976) 443;
V.S. Fadin, E.A. Kuraev and L.N. Lipatov, Sov. Phys. JETP **45** (1977) 199;
I.I. Baltsky and L.N. Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys. **28** (1978) 822.

[5] A.H. Mueller and J. Qiu, Nucl. Phys. B **268** (1986) 427;
A.H. Mueller, Nucl. Phys. B **558** (1999) 285.

[6] E. Levin, arXiv:hep-ph/0105205.

[7] L.V. Gribov, E.M. Levin and M.G. Ryskin, Nucl. Phys. B **188** (1981) 555;
L.V. Gribov, E.M. Levin and M.G. Ryskin, Phys. Rept. **100** (1983) 1.

[8] L. McLerran and R. Venugopalan, Phys. Rev. D **49** (1994) 2233;
L. McLerran and R. Venugopalan, Phys. Rev. D **49** (1994) 3352.

[9] I.I. Balitsky, Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 2024;
I.I. Balitsky, Phys. Rev. D **60** (1999) 014020.

[10] Y.V. Kovchegov, Phys. Rev. D **60** (1999) 034008.

[11] M. Braun, Eur. Phys. J. C **16** (2000) 337.

[12] E. Levin and K. Tuchin, Nucl. Phys. B **573** (2000) 833.

[13] K. Golec-Biernat, L. Motyka and A. M. Staśto, Phys. Rev. D **65** (2002) 074037.

[14] M. Lublinsky, E. Gotsman, E. Levin and U. Maor, arXiv:hep-ph/0102321;
E. Levin and M. Lublinsky, Nucl. Phys. A **696** (2001) 381.

[15] E. Iancu, A. Leonidov and L.D. McLerran, Nucl. Phys. A **692** (2001) 583;
E. Iancu, A. Leonidov and L.D. McLerran, Phys. Lett. B **510** (2001) 133;
E. Ferreiro, E. Iancu, A. Leonidov and L. McLerran, Nucl. Phys. A **703** (2002) 489.

[16] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Shvarts and Y. S. Tyupkin,
Phys. Lett. B **59** (1975) 85.

[17] G. 't Hooft, Phys. Rev. Lett. **37** (1976) 8;
G. 't Hooft, Phys. Rev. D **14** (1976) 3432 [Erratum-ibid. D **18** (1978) 2199].

[18] S. Moch, A. Ringwald and F. Schrempp, Nucl. Phys. B **507** (1997) 134.

[19] A. Ringwald and F. Schrempp, Phys. Lett. B **438** (1998) 217.

[20] A. Ringwald and F. Schrempp, *Proc. Quarks '94*, ed D.Yu. Grigoriev *et al.* (Singapore: World Scientific) p 170, arXiv:hep-ph/9411217.

[21] A. Ringwald and F. Schrempp, Comput. Phys. Commun. **132** (2000) 267.

[22] A. Ringwald and F. Schrempp, Phys. Lett. B **503** (2001) 331.

[23] C. Adloff *et al.* [H1 Collaboration], Eur. Phys. J. C **25** (2002) 495.

[24] H. Aoyama and H. Goldberg, Phys. Lett. B **188** (1987) 506.

[25] F.R. Klinkhamer and N.S. Manton, Phys. Rev. D **30** (1984) 2212.

[26] A. Ringwald, Nucl. Phys. B **330** (1990) 1;
O. Espinosa, Nucl. Phys. B **343** (1990) 310.

[27] D.E. Kharzeev, Y.V. Kovchegov and E. Levin, Nucl. Phys. A **690** (2001) 621.

[28] E. Shuryak and I. Zahed, Phys. Rev. D **62** (2000) 085014;
M.A. Nowak, E.V. Shuryak and I. Zahed, Phys. Rev. D **64** (2001) 034008.

[29] D.M. Ostrovsky, G.W. Carter and E.V. Shuryak, Phys. Rev. D **66** (2002) 036004.

[30] F. Schrempp, J. Phys. G **28** (2002) 915.

[31] F. Schrempp and A. Utermann, Acta Phys. Polon. B **33** (2002) 3633.

[32] F. Schrempp and A. Utermann, Phys. Lett. B **543** (197) 2002.

[33] F. Schrempp and A. Utermann, arXiv:hep-ph/0301177.

[34] A.H. Mueller, arXiv:hep-ph/9911289;
A.H. Mueller, arXiv:hep-ph/0111244.

[35] N. Nikolaev and B.G. Zakharov, Z. Phys. C **49** (1990) 607;
N. Nikolaev and B.G. Zakharov, Z. Phys. C **53** (1992) 331.

[36] A.H. Mueller, Nucl. Phys. B **415** (1994) 373;
A.H. Mueller, Nucl. Phys. B **437** (1995) 107.

[37] I. I. Balitsky and A. V. Belitsky, Nucl. Phys. B **629** (2002) 290.

[38] K. Golec-Biernat and M. Wüsthoff, Phys. Rev. D **59** (1999) 014017;
K. Golec-Biernat and M. Wüsthoff, Phys. Rev. D **60** (1999) 114023.

[39] J. Bartels, K. Golec-Biernat and H. Kowalski, Phys. Rev. D **66** (2002) 014001.

[40] H.G. Dosch and A. Kramer, Phys. Lett. B **252** (1990) 669;
H.G. Dosch, E. Ferreira and A. Kramer, Phys. Rev. D **50** (1994) 1992.

[41] O. Nachtmann, Annals Phys. **209** (1991) 436.

[42] O. Nachtmann, arXiv:hep-ph/9609365.

[43] W. Buchmüller and A. Hebecker, Nucl. Phys. B **476** (1996) 203.

[44] W. Buchmüller, M.F. McDermott and A. Hebecker, Nucl. Phys. B **487** (1997) 283 [Erratum-ibid. B **500** (1997) 621].

[45] W. Buchmüller, T. Gehrmann and A. Hebecker, Nucl. Phys. B **537** (1999) 477.

[46] A.I. Shoshi, F.D. Steffen and H.J. Pirner, Nucl. Phys. A **709** (2002) 131.

[47] G. 't Hooft, Phys. Rev. **142** (1986) 357.

[48] T. Morris, D. Ross and C. Sachrajda, Nucl. Phys. B **255** (1985) 115.

[49] D.A. Smith and M.J. Teper [UKQCD], Phys. Rev. D **58** (1998) 014505.

[50] A. Ringwald and F. Schrempp, Phys. Lett. B **459** (1999) 249.

[51] L.H. Ryder, "Quantum Field Theory," Cambridge University Press, 1985.

[52] T.P. Cheng and L.F. Li, "Gauge Theory Of Elementary Particle Physics," Oxford Science Publications, 1984.

[53] S. R. Coleman, HUTP-78/A004, *Lecture delivered at 1977 Int. School of Subnuclear Physics, Erice, Italy, Jul 23-Aug 10, 1977.*

[54] T. Schäfer and E.V. Shuryak, Rev. Mod. Phys. **70** (1998) 323.

[55] D. Diakonov, arXiv:hep-ph/0212026.

[56] R. Jackiw and C. Rebbi, Phys. Rev. D **14** (1976) 517,
R. Jackiw, C. Nohl and C. Rebbi, Phys. Rev. D **15** (1977) 1642.

[57] D. Diakonov and V. Petrov, Phys. Rev. D **50** (1994) 266.

[58] C.W. Bernard, Phys. Rev. D **19** (1979) 3013.

[59] E. Witten, Phys. Rev. Lett. **38** (1977) 121.

[60] M.F. Atiyah, N.J. Hitchin, V.G. Drinfeld and Y.I. Manin, Phys. Lett. A **65** (1978) 185.

[61] S.L. Adler, Phys. Rev. **177** (1969) 2426.

[62] J.S. Bell, R. Jackiw, Nuovo Cim. A **60** (1969) 47.

[63] G. 't Hooft, arXiv:hep-th/0010225.

[64] M.E. Peskin and D.V. Schroeder, "An Introduction To Quantum Field Theory," Addison-Wesley, 1995.

[65] M.F. Atiyah and I.M. Singer, Annals Math. **87** (1968) 484, 531 and 546;
M.F. Atiyah and I.M. Singer, Annals Math. **93** (1971) 119 and 139.

[66] M. Gibbs, A. Ringwald and F. Schrempp, arXiv:hep-ph/9506392.

[67] M.P. Mattis, Phys. Rept. **214** (159) 1992.

[68] P.G. Tinyakov, Int. J. Mod. Phys. A **8** (1993) 1823.

[69] A. Ringwald, Phys. Lett. B **555** (2003) 227.

[70] H. Osborn, Annals Phys. **135** (1981) 373.

[71] R.D. Peccei and H.R. Quinn, Nuovo Cim. A **41** (1977) 309.

[72] S. Capitani, M. Lüscher, R. Sommer and H. Wittig, Nucl. Phys. B **544** (1999) 669.

[73] A. Hasenfratz and C. Nieter, Phys. Lett. B **439** (1998) 366.

[74] P. de Forcrand, M. Garcia Perez, J.E. Hetrick and I.O. Stamatescu, arXiv:hep-lat/9802017.

[75] C.G. Callan, R.F. Dashen and D.J. Gross, Phys. Rev. D **17** (1978) 2717.

[76] C.G. Callan, R.F. Dashen and D.J. Gross, Phys. Rev. D **19** (1979) 1826.

[77] M.A. Shifman, A.I. Vainshtein and V.I. Zakharov, Nucl. Phys. B **147** (1979) 448.

[78] D. Amati and A. Rouet, Nuovo Cim. A **41** (1977) 309.

[79] L.S. Brown, R.D. Carlitz, D.B. Creamer and C.K. Lee, Phys. Rev. D **17** (1978) 1583.

[80] I.I. Balitsky and A.V. Yung, Phys. Lett. B **168** (1986) 113;
A.V. Yung, Nucl. Phys. B **297** (1988) 47.

[81] M. Porrati, Nucl. Phys. B **347** (1990) 371;
V.V. Khoze and A. Ringwald, Nucl. Phys. B **355** (1991) 351;
V. Zakharov, Nucl. Phys. B **371** (1992) 637.

[82] V.V. Khoze and A. Ringwald, Phys. Lett. B **259** (1991) 106.

[83] E. Shuryak, Nucl. Phys. B **302** (1988) 621.

[84] J.J. Verbaarschot, Nucl. Phys. B **362** (1991) 33 [Erratum-ibid. B **386** (1992) 236].

[85] I.I. Balitsky and V. Braun, Nucl. Phys. B **380** (1992) 51.

[86] S. Moch, A. Ringwald and F. Schrempp, unpublished;
S. Moch, PhD thesis, DESY T-97-02 (1997) Internal Report (unpublished).

[87] J.C. Collins and D.E. Soper, Nucl. Phys. B **194** (1982) 445.

[88] J.C. Collins, Phys. Rev. D **57** (1998) 3051,
J.C. Collins, L. Frankfurt and M. Strikman, Phys. Rev. D **56** (1997) 2982,
J.C. Collins, D.E. Soper and G. Sterman, Nucl. Phys. B **261** (1985) 104.

[89] L.N. Lipatov, Phys. Rept. **286** (1997) 131;
I.I. Balitsky, arXiv:hep-ph/0101042.

[90] M. Froissart, Phys. Rev. **123** (1961) 1053.

[91] V.S. Fadin and L.N. Lipatov, Phys. Lett. B **429** (1998) 127;
G. Camici and M. Ciafaloni, Phys. Lett. B **430** (1998) 349.

[92] E. Iancu, A. Leonidov and L. McLerran, arXiv:hep-ph/0202270;
E. Iancu and R. Venugopalan, arXiv:hep-ph/0303204.

[93] J.R. Forshaw and D.A. Ross, "Quantum Chromodynamics and the Pomeron," Cambridge University Press, 1997.

[94] G.P. Lepage and S.J. Brodsky, Phys. Lett. B **87** (1979) 359;
G.P. Lepage and S.J. Brodsky, Phys. Rev. D **22** (1980) 2157.

[95] F. E. Low, Phys. Rev. D **12** (1975) 163;
L. Frankfurt, G.A. Miller and M. Strikman, Phys. Lett. B **304** (1993) 1.

[96] L. Frankfurt, A. Radyushkin and M. Strikman, Phys. Rev. D **55** (98) 1.

[97] I.I. Balitsky, M. Beneke and V. Braun, Phys. Lett. B **318** (1993) 371.

[98] A. Erdély *et al.*, "Table of Integral Transforms Vol. 2", McGraw-Hill, 1954.

[99] S. Gieseke and C. F. Qiao, Phys. Rev. D **61** (2000) 074028.

[100] P. Arnold and M. Mattis, Phys. Rev. D **44** (1991) 3650;
A. Mueller, Nucl. Phys. B **364** (1991) 109.

[101] I.I. Balitsky and V.M. Braun, Phys. Rev. D **47** (1993) 1879.

[102] V. Zakharov, Nucl. Phys. B **353** (1991) 683;
M. Maggiore and M. Shifman, Nucl. Phys. B **365** (1991) 161;
G. Veneziano, Mod. Phys. Lett. **A7** (1992) 1661.

[103] F. Bezrukov, D. Levkov, C. Rebbi, V. Rubakov and P. Tinyakov, arXiv:hep-ph/0305300.

[104] J.C. Collins and R.K. Ellis, Nucl. Phys. B **360** (1991) 3.

[105] G.P. Korchemsky, Phys. Lett. B **325** (1994) 459.

[106] E. Meggiolaro, Eur. Phys. J. C **4** (1998) 101.

[107] J. Bartels and M. Wüsthoff, Z. Phys. C **66** (1995) 157;
J. Bartels, L. N. Lipatov and M. Wüsthoff, Nucl. Phys. B **464** (1996) 298.

[108] E. Ferreiro, E. Iancu, K. Itakura and L. McLerran, Nucl. Phys. A **710** (2002) 373.

[109] J. Bartels, E. Gotsman, E. Levin, M. Lublinsky and U. Maor,
Phys. Lett. B **556** (2003) 114.

Danksagung

Für die sehr interessante Aufgabenstellung und die stets freundliche, intensive und motivierende Betreuung möchte ich mich sehr herzlich bei Herrn Schrempp bedanken. In unzähligen lebhaften Diskussionen konnte ich stets von seinem großen Wissen profitieren.

Herrn Bartels danke ich sehr für die Betreuung vom Fachbereich.

Ein besonderer Dank gilt Sören für das intensive Lesen des Manuskripts sowie für die herzliche Atmosphäre in unserem Büro.

Ferner danke ich allen Mitgliedern der DESY Theoriegruppe und denen des II. Instituts für Theoretische Physik für die angenehme Arbeitsatmosphäre.

Für Unterstützung und Ermutigung möchte ich meiner Familie und meinen Freunden danken.