Die Spezifische Ladung des Elektrons

1 Ziel

Es soll die *Spezifische Ladung* des Elektrons *e/m*, die das Verhältnis zwischen Ladung *e* und Masse *m* des Elektrons angibt, bestimmt werden. Dazu wird ein Elektronenstrahl erzeugt und mit einem Magnetfeld auf eine Kreisbahn geleitet. Aus der Kenntnis der Geschwindigkeit der Elektronen und der Kraft, die nötig ist, um die Elektronen auf der Kreisbahn zu halten, lässt sich die Spezifische Ladung *e/m* berechnen.

Die genaue Bestimmung der spezifischen Ladung ist wichtig, um beispielsweise die Ablenkung von Elektronenstrahlen in Teilchenbeschleunigern zu berechnen. Weiterhin wird sie benötigt, um mit Hilfe des Milikan-Versuches die Elementarladung zu bestimmen.

2 Theorie und Auswertung

Die Elektronen werden mit Hilfe einer Glühkathode erzeugt und durchlaufen anschließend eine Beschleunigungsspannung U_B. Die potentielle Energie E_{pot} der Elektronen im elektrischen Feld wird dabei in kinetische Energie E_{kin} umgewandelt

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = -e \cdot U_{\text{B}} = E_{\text{pot}} \,. \tag{1}$$

Dabei ist $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C der Betrag der Elementarladung eines Elektrons. Für die Geschwindigkeit *v* der Elektronen am Ende des Beschleunigungspotenzials gilt somit

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U_{\text{B}}}{m}} \,. \tag{2}$$

Treten die Elektronen nun in ein Magnetfeld ein, so erfahren sie die *Lorentz-Kraft*

$$\vec{F}_{\text{L}} = -e \cdot \vec{v} \times \vec{B} \,. \tag{3}$$

Die Lorentz-Kraft wirkt nur auf sich bewegende Ladungen -*e*. Das Kreuzprodukt $\vec{v} \times \vec{B}$ ist ein Vektor, der senkrecht auf $\vec{v}$ und $\vec{B}$ steht und dessen Richtung durch die Rechte-Hand-Regel bestimmt wird. Mit der negativen Ladung (-*e*) ist die Lorenzkraft entgegengesetzt zum Vektor $\vec{v} \times \vec{B}$ gerichtet. Somit kann zur anschaulichen Bestimmung der Wirkung der Lorenzkraft auf ein Elektron eine „Linke-Hand-Regel“ angewendet werden. Stehen die Größen $\vec{v}$ und $\vec{B}$ ihrerseits senkrecht zueinander, ergibt sich aus Gl. 3 der Betrag der Lorentz-Kraft F_L mit der Ladung des Elektrons *e* zu:

$$F_{\text{L}} = e \cdot v \cdot B \,. \tag{4}$$

Auf Teilchen, die sich auf einer Kreisbahn bewegen, wirkt eine Zentripetal- bzw. Radialkraft. Die Radialkraft F_{Rad} gibt an, wie groß eine zum Mittelpunkt gerichtete Kraft sein muss, um einen Körper der Masse *m* und Geschwindigkeit *v* auf einer Kreisbahn mit dem Radius *r* zu halten

$$F_{\text{Rad}} = \frac{m \cdot v^2}{r} \,. \tag{5}$$

Die Beträge der Radialkraft und der Lorentz-Kraft sind gleich. Durch Gleichsetzen von Gl. 4 und Gl. 5 ergibt sich

$$e \cdot v \cdot B = \frac{m \cdot v^2}{r}\,. \tag{6}$$

Setzt man nun die Gleichung für die Geschwindigkeit aus Gl. 2 in Gl. 6 ein und löst nach *e* und *m* auf, erhält man

$$\frac{e}{m} = \frac{2 \cdot U_\mathrm{B}}{B^2 \cdot r^2}\,. \tag{7}$$

Die Spezifische Ladung *e/m* lässt sich demnach durch Messen der Beschleunigungs-spannung U_B, des Magnetfeldes B (unter Kenntnis des Stromes I_Sp, der durch die das Magnetfeld erzeugende Spule fließt) und des Radius r der Kreisbahn bestimmen.

3 Aufbau

In einem Glaskolben, einem so genannten Fadenstrahlrohr, befindet sich ein Edelgas unter geringem Druck. Die Elektronen regen die Gasatome zur Emission von Photonen an, so dass ein Elektronenstrahl in dem Kolben sichtbar gemacht werden kann. In dem Kolben sind vier Leuchtstäbe in festen Abständen 4 cm, 6 cm, 8 cm und 10 cm zum Elektronenstrahlursprung angebracht, um den Kreisbahnradius der Elektronen zu bestimmen.

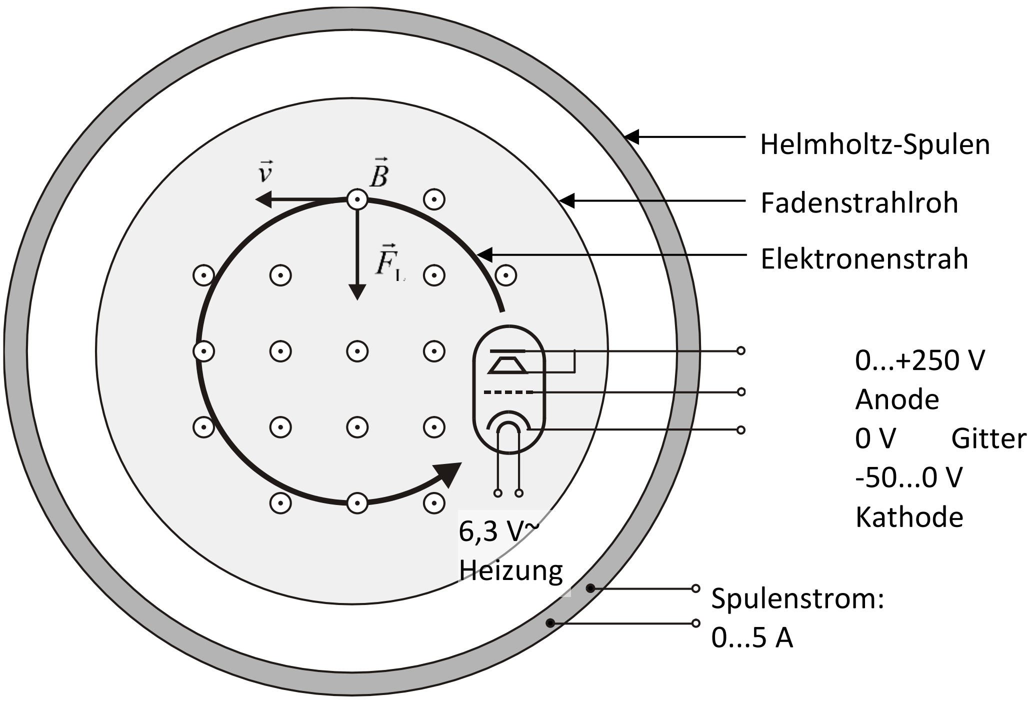

Abb. 1: Schematischer Versuchsaufbau.

Die Elektronen werden aus einer Glühkathode, die üblicherweise aus Wolfram besteht, durch Erhitzen freigesetzt und über die variable Spannung zwischen Kathode und Anode beschleunigt. Die Beschleunigungsspannung U_B setzt sich hierbei zusammen aus der Spannung zwischen Kathode und Gitter (**-50...0 V**) und der Anodenspannung (**0...+250 V**), die zwischen dem Gitter und der Anode anliegt.

Die gesamte Versuchsanordnung befindet sich zwischen zwei Spulen mit einem Radius $R = 0{,}2$ m und jeweils $n = 154$ Windungen. Die beiden Spulen, die sich auf einer gemeinsamen Achse befinden und einen Abstand in der Größe des Radius R besitzen, werden *Helmholtz-Spulen* genannt. Das Magnetfeld im Zentrum des Spulenpaares ist in dieser Anordnung in guter Näherung homogen, also von gleicher Stärke und Orientierung.

Zur Erzeugung des Magnetfeldes wird der Spulenstrom (0...5 A) mit einer Gleichstromquelle produziert. Mit Hilfe der Biot-Savart-Gleichung

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} N \cdot I_{\mathrm{Sp}} \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \tag{8}$$

lässt sich das Magnetfeld einer Leiterschleife berechnen. Für die obige Anordnung (Radius und Windungszahl) lässt sich damit leicht das Magnetfeld B zwischen den Spulen berechnen:

$$B \approx I_{\mathrm{Sp}} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\mu_0 \cdot n}{R} = I_{\mathrm{Sp}} \cdot 6{,}926 \cdot 10^{-4}\ \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{A}}. \qquad (9).$$

Hierbei ist $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ T·m/A die magnetische Feldkonstante.

Der Spulenstrom und die Beschleunigungsspannung werden jeweils durch Multimeter gemessen. Im abgedunkelten Raum und bei korrekter Polung des Magnetfeldes ist die gekrümmte Leuchtbahn der Elektronen zu erkennen.

4 Fehlerrechnung

Aufgabe der Fehlerrechnung ist es, eine Abschätzung über die Genauigkeit des Ergebnisses zu machen. In der Versuchsdurchführung lassen sich die Größen U_{B}, I_{Sp} und r mit den zur Verfügung stehenden Mitteln nicht mit beliebiger Genauigkeit messen. Ferner geht es um die Frage, wie sich ein Messfehler oder eine statistische Verteilung von mehreren Einzelmessungen auf das ermittelte Gesamtergebnis auswirkt. Die Antwort darauf liefert das Fehlerfortpflanzungsgesetz.

Für den Fehler $\Delta f(x,y,z)$ einer Funktion $f(x,y,z)$, die von den fehlerbehafteten Größen x, y und z abhängt, gilt (siehe Skript zur Fehlerrechnung)

$$\Delta f(x,y,z) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \cdot \Delta z\right)^2}\,. \tag{10}$$

Dabei ist $\partial f/\partial x$ die partielle Ableitung der Funktion $f(x,y,z)$ nach x; wobei alle übrigen Variablen konstant gehalten werden.

Die Ableitung gibt an, wie stark sich die Funktion f ändert, wenn man x variiert. In diesem Sinne lassen sich die Differentialquotienten in Gleichung (10) als Gewichtungsfaktoren verstehen, die die Einzelfehler Δx, Δy, Δz der Größen x, y, z je nach Einfluss auf das Ergebnis unterschiedlich bewerten.

Im konkreten Fall der Spezifischen Ladung des Elektrons aus Gleichung (7) lautet die Funktion.

$$f(x,y,z) = \frac{e}{m} = f(U_{\mathrm{B}}, B, r) = \frac{2U_{\mathrm{B}}}{B^2 \cdot r^2}\,. \tag{11}$$

Die Fehlerfortpflanzung lautet dementsprechend

$$\Delta\left(\frac{e}{m}\right) = \sqrt{\left(\frac{\partial\left(\frac{e}{m}\right)}{\partial U_\mathrm{B}} \cdot \Delta U_\mathrm{B}\right)^2 + \left(\frac{\partial\left(\frac{e}{m}\right)}{\partial \mathrm{B}} \cdot \Delta B\right)^2 + \left(\frac{\partial\left(\frac{e}{m}\right)}{\partial r} \cdot \Delta r\right)^2}\,, \tag{12}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2}{B^2 \cdot r^2} \cdot \Delta U_\mathrm{B}\right)^2 + \left(\frac{4U_\mathrm{B}}{B^3 \cdot r^2} \cdot \Delta B\right)^2 + \left(\frac{4U_\mathrm{B}}{B^2 \cdot r^3} \cdot \Delta r\right)^2}\,, \tag{13}$$

$$= 2\,\frac{e}{m} \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta U_\mathrm{B}}{2U_\mathrm{B}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2}\,. \tag{14}$$

Dabei ist noch zu beachten, dass nicht B die Messgröße ist, sondern der Spulenstrom I_Sp . Der Fehler für B folgt analog zur obigen Rechnung aus dem Fehler von I_Sp .

Mit Gleichung (14) lässt sich also zu jeder Spezifischen Ladung e/m, die aus den Werten U_B, B, r errechnet wurde, ein Fehler angeben.

5 Aufgabenstellung

Das Fadenstrahlrohr und die Helmholtzspulen sind mit Hilfe der Skizze auf Seite 2 anzuschließen und Messgeräte sinnvoll in die Schaltung zu integrieren.

Variieren Sie nun das Magnetfeld B bei festen Beschleunigungsspannungen U_B, so dass der Bahnradius r der Elektronen mit einem durch die Leuchtstäbe definierten Radius übereinstimmt. Die Leuchtstäbe besitzen jeweils einen Abstand von $2 \cdot r$ = 4 cm, 6 cm, 8 cm und 10 cm von der Elektronenquelle. Hierfür werden für jeden Radius r durch Änderung der Anodenspannung U_B 11 Werte zwischen 300 V und 200 V eingestellt (10 V-Schritte). Notieren Sie die verschiedenen Kombinationen der Werte für U_B, I_Sp und r, um bei der Auswertung die Spezifische Ladung des Elektrons *e/m* zu berechnen. Aus den Ergebnissen wird anschließend das arithmetische Mittel gebildet.

Um einen Vergleich mit dem Literaturwert durchzuführen, ist es wichtig, den messtechnischen Fehler des Ergebnisses zu kennen. Erst dann lässt sich beurteilen, ob die mögliche Abweichung zum Literaturwert innerhalb der Fehlertoleranz liegt und damit auf unvermeidbare zufällige Messungenauigkeiten zurückzuführen ist. Es müssen also die einzelnen Messfehler ΔU_B, ΔI_Sp und Δr vernünftig von Ihnen abgeschätzt werden.

Zu **jedem** Ergebnis für *e/m* ist der Fehler $\Delta(e/m)$ gemäß Gl. (14) mit anzugeben. Aus sämtlichen Werten für *e/m* wird der Mittelwert sowie dessen Standardabweichung bestimmt.

Die 11 zu jedem Radius erhaltenen Werte für *e/m* werden gegenüber der Beschleunigungsspannungen in 4 separate Grafiken inklusive Fehlerbalken aufgetragen. Zusätzlich werden sämtliche 44 Werte zusammen nach Radien sortiert in einer Grafik. Zusätzlich werden der Mittel- und Literaturwert als horizontale Linie als Vergleich in die Grafik mit eingetragen. Die Ergebnisse werden mit dem Literaturwert verglichen und **ausführlich diskutiert**. Wichtig sind hier zum Beispiel systematische Abweichungen vom Literaturwert in Abhängigkeit vom Radius und in Abhängigkeit von der Beschleunigungsspannung. Überlegen Sie, inwiefern der grundsätzliche Aufbau des Versuchs zu Abweichungen führen kann. Überprüfen Sie die Schlussfolgerungen für *e/m*, die sich aus Ihren Überlegungen ergeben, anhand von Gl. 7.

Literaturwert:

National Institute for Standards and Technology NIST,
http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html:

$$\frac{e}{m} = (1{,}758820150 \pm 0{,}000000044) \cdot 10^{11}\,\frac{C}{kg}$$