Praktikum: RLC-Schwingkreis

November 14, 2016

Contents

1 RCL-Reihenschwingkreis

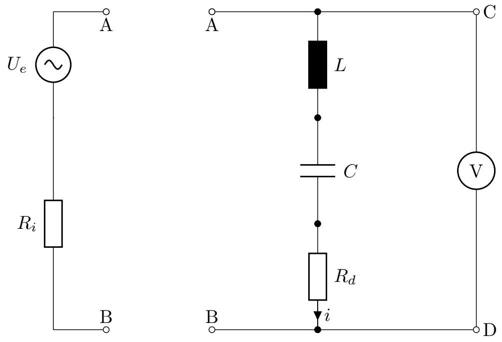


Abb. 1: RCL-Kreis

2 Versuchsbeschreibung

In diesem Versuch sollen Sie einen Einblick in die Wechselstromlehre am Beispiel des RLC-Kreises bekommen. Das aus der Schule bekannte Ohmsche Gesetz gilt nicht nur für Gleich-, sondern auch für Wechselströme. Dabei zeigt sich, daß Ströme, Spannungen und Phasen bei gewissen Bauteilen (Spule L, Kondensator C) ein frequenzabhängiges Verhalten aufweisen. Ein klassisches Beispiel die Frequenzabängigkeit zu untersuchen, ist der RLC-Schwingkreis. Sie werden der Frage nachgehen, warum im RLC-Kreis Schwingungen angeregt werden und unter welchen Voraussetzungen der Resonanzfall eintritt. Sie werden den Umgang mit einem Oszilloskop erlernen, um die zugrundeliegenden physikalischen Prozesse messtechnisch zu erfassen. Für die Generierung des Eingangssignales steht ein Signalgenerator zur Verfügung. Für die Beschreibung der Vorgänge sollten Sie sich mit der komplexen Schreibweise der Größen für Spannung und Strom sowie des komplexen Widerstandes vertraut machen (s.Theorieteil).

3 Idealer Schwingkreis

Am Beispiel des idealen CL-Schwingkreises ohne ohmschen Widerstand d.h. ohne Dämpfung wird der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung kurz erläutert.

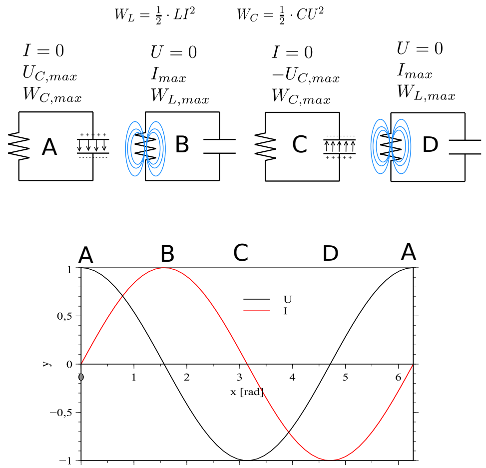


Abb. 2: Zusammenhang zwischen Strom und Spannung im idealen Schwingkreis. Die Spannung eilt dem Strom um $\pi/2$ voraus.

A Der Kondensator ist vollständig geladen (Umax), es fließt kein Strom und die Energie des Systems ist vollständig im elektrischen Feld des Kondensators gespeichert. Die Spannung am Kondensator liegt aber auch an der Spule an, so daß ein Strom aufgebaut wird. Der Stromänderung wirkt nach der Lenzschen Regel eine induzierte Spannung entgegen. Dadurch wird der Stromfluss gehemt. Der Strom wächst allmählich bis

B zum Maximum an. Der Kondensator ist vollständig entladen (Ladungsausgleich). Sämtliche Energie ist im Magnetfeld der Spule gespeichert. Die Spannung beträgt 0 , der Strom fließt jedoch infolge seiner Trägheit, bedingt durch das Magnetfeld, weiter und lädt den Kondensator in die entgegengesetzte Richtung auf, d.h. es wird eine Spannung aufgebaut. Diese wirkt aber dem Magnetischen Fluss in der Spule entgegen, wodurch das Magentfeld abgebaut wird.

C Der Strom erreicht sein Minimum (I=0), wenn die Spannung ihr Maximum -Umax erreicht. Der Kondensator ist vollständig in die entgegengesetzte Richtung aufgeladen.

D Entsprechend entlädt sich der Kondensator wie unter **A** nur mit umgekehrtem Vorzeichen.

4 Realer RLC-Schwingkreises

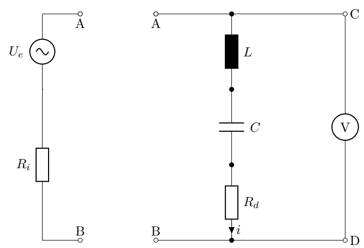


Abb. 3: RCL-Kreis

4.1 Impedanz Z, Scheinwiderstand Z, $|Z|$

Die Impedanz der Schaltung (vgl.Abb.(4))

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\,\overbrace{(\omega L - \frac{1}{\omega C})}^{X} = |\underline{Z}|\, e^{j\theta} \tag{1}$$

mit der Impedanz der Spule von $\underline{Z_L} = i\omega L$ und der Impedanz der Kapazität von $\underline{Z_C} = i\frac{1}{\omega C}$. Der Scheinwiderstand des RLC-Schwingkreises berechnet sich zu

$$\boxed{Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}} \tag{2}$$

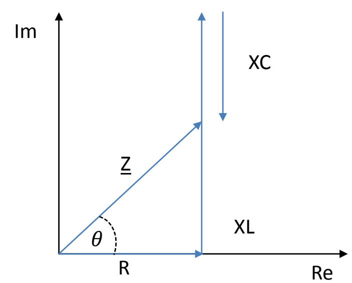


Abb. 4: Zur Impedanz des RLC-Kreises

4.2 Strom und Spannung

Am folgenden Beispiel wird der Zusammenhang zwischen einer sinusförmigen Eingangsspannung U_e und des Stromes I hergeleitet. Letzterer ist eine Lösung der Differentialgleichung für den in Abb. 3 angegebenen Schwingkreis. Die Herleitung soll vielmehr einen Eindruck vermitteln, wie die Fragestellung gelöst wird. Die wesentlichen Ergebnisse befinden sich im Diskussionsteil.

Die Maschenregel (siehe 6.1) ergibt :

$$U_R + U_L + U_C - U_e = 0 \tag{3}$$

Mit den Zusammenhängen $U_C = Q/C$, $U_L = L\frac{dI}{dt}$, $U_R = I \cdot R$ sowie einer treibenden Quelle mit der Eingangsspannung $U_e = U_0$:

$$IR + L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = U \tag{4}$$

R umfaßt den totalen Widerstand, einschließlich Verlustwiderstände und Innenwiderstände : $R = R_{\sum} = R_i + R_d + R_v$. Mit einer sinusförmigen, also veränderlichen Eingangsspannung als elektromotorische Kraft wird der Kreis angeregt :

$$U = U_0 \sin(\omega t) \tag{5}$$

nach der Zeit abgeleitet:

$$R\frac{dI}{dt} + L\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt} = \frac{dU}{dt} \qquad \dot{I} + \frac{L}{R}\ddot{I} + \frac{1}{RC}I = \frac{\dot{U}}{R} \tag{6}$$

Für Interessierte ist die Lösungsweg für die Differentialgleichung im Anhang beschrieben. Durch den Zusammenhang für die Impedanz $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ ergibt sich :

$$I = \frac{U_0}{Z}[\frac{R}{Z}\sin(\omega t) - \frac{X}{Z}\cos(\omega t)] \tag{7}$$

In der komplexen Ebene für den Widerstand wird der Zeiger mit der Länge Z durch den Realteil R und den frequenzabhängigen Widerstand (komplexen) Teil X aufgespannt. Das liefert die Beziehungen $R = Z\cos(\theta)$ und $X = Z\sin(\theta)$. Eingesetzt in die Gleichung unter Zuhilfenahme der trigonometrischen Beziehung $\sin(\omega t)\cos(\theta) - \cos(\omega t)\sin(\theta) = \sin(\omega t - \theta)$ ergibt die Lösung :

$$I = \frac{U_0}{Z}\sin(\omega t - \theta) \qquad U = U_0 \sin(\omega t) \tag{8}$$

4.2.1 Diskussion

- Aus der Lösung erkennt man, daß der Strom nicht in Phase mit der vorgegebenen Spannung verläuft, sondern um den Phasenunterschied θ gegenüber der Spannung hinterher hinkt, die *Spannung also dem Strom um die Zeit θ/ω vorauseilt.*
- Aus Gl.7 ist außerdem ersichlich, daß im Falle $X = 0$ der Strom am größten (vgl.Abb(7)) ist :
  Die Bedingung $X = 0 = (\omega L - \frac{1}{\omega C})$ beschreibt den Fall der *Resonanz* und führt auf den Zusammenhang $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Folglich verschwindet bei Resonanz der Blindwiderstand X, d.h. beide Blindwiderstände heben sich durch die entgegengesetzte Richtung auf, denn $X = X_L - X_C = 0$, übrig bleibt der Wirkwiderstand R. Der Phasenunterschied *verschwindet* bei Resonanz $\theta = 0$

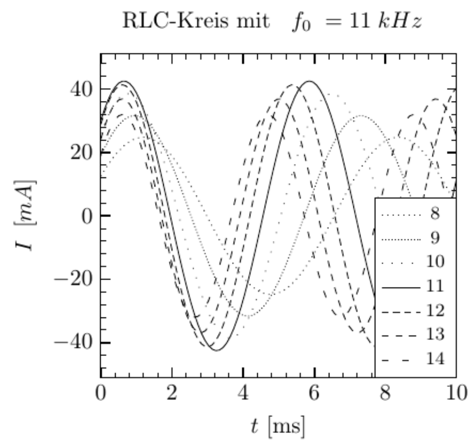


Abb. 5: Stromverläufe nach Gl. (8) bei unterschiedlichen Frequenzen. Grundlage hierfür ist die Kapazität von $0,1\,\mu F$ und Induktivität von $L = 2\,mH$ aus dem Versuch. Der Strom besitzt bei ca. 11 kHz also im Resonanzfall sein Maximum.

- Es handelt sich um eine gedämpfte Schwingung, deren Amplitude frequenzabhängig von Z abhängt. Die Dämpfung ist am geringsten, wenn Resonanz vorliegt und der Dämpfungswiderstand R_D bzw. die Verlustwiderstände R_V der Komponenten gering sind.
- Die **Phasenverschiebung** θ zwischen Strom und Spannung θ berechnet sich aus $\underline{Z} = R + jX = R + j(X_L - X_C) = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$.

Aus der komplexen Ebene kann folgender Zusammenhang hergeleitet werden :

$$\boxed{tan(\theta) = \frac{X}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}} \tag{9}$$

Weiterhin ist ersichtlich, daß mit zunehmender Frequenz das Spulenverhalten dominiert ($X_L \gg X_C$). Dadurch verhält sich der RLC-Kreis wie eine Spule. Umgekehrt dominiert bei niedrigen Frequenzen der Kondensator.

- Die *Amplitude* des Stroms :

$$I_0 = \frac{U_0}{Z} = U_0/\sqrt{R^2 + X^2} \tag{10}$$

- Die **Bandbreite** definiert den *Durchlaß bereich* für den Strom bzw. den *Sperrbereich* für die Spannung. Kriterium beim Strom ist der Abfall auf das $1/\sqrt{2}$x fache bei den Frequenzen f_u und f_o des Maximalwertes, also bei Resonanz ω_0.

$$\boxed{B = f_{go} - f_{gu}} \tag{11}$$

Wobei für die Impedanz bei Resonanz $Z = R$ gilt : $I(\omega_0) = U_0/R$

$$\frac{I(\omega_B)}{I(\omega_0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2(\omega_B)}} \tag{12}$$

Obige Bedingung führt auf den Term $X = R$, das bedeutet, daß der Strom zur Spannung einen Phasenwinkel von 45° einnimmt. Die Gleichung nach der Frequenz ω_B aufgelöst ergibt die

- **obere** bzw. **untere Grenzfrequenz**.Diese werden auch als **Eckfrequenzen** bezeichnet

$$\boxed{f_{go/gu} = \frac{\sqrt{R^2 + 4L/C} \pm R}{4\pi L}} \tag{13}$$

5 Aufgabe: Aufbau eines RLC-Kreises

Bauen Sie den Versuch aus Abb.1 mit folgenden Komponenten auf.

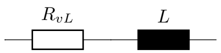
Bauteile	Größe
Widerstand R_d	47 Ohm
Kondensator	0,1 μ F
Spule	2 mH

5.1 Berechnung der theoretischen Werte

Berechnen Sie mit den o.a. Komponenten die :
a) Resonanzfrequenz f_0 aus der Bedingung für die Resonanz: $X_L = X_C$
b) Eckfrequenzen nach Gl.(13).
c) Bandbreite des Systems nach Gl.(11)
d) Güte des Systems nach $Q = \frac{f_0}{B}$

5.2 Verlustwiderstand einer Spule

Eine Spule besitzt neben dem Scheinwiderstand X_L auch einen ohmschen Widerstand, der hauptsächlich durch die Kupferwicklungen hervorgerufen wird. Dieser wird mit R_{vL} bezeichnet.



5.3 Messaufbau

Je nach Absprache gibt es **2 Varianten des RLC-Aufbaus** . Sie werden von dem Versuchsbetreuer in die Bedienung der jeweiligen Geräte eingewiesen.

1. Analoge Vermessung durch Ablesen der Spannungen am Oszilloskop
2. Digitale Vermessung und Ansteuerung durch eine Digitale - Messeinheit (Cobra)

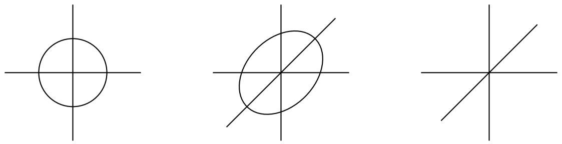
Stellen Sie am Signalgenerator ein *Sinusignal* mit einer Amplitude von 3 V in Ue ein. Als Messinstrumente stehen Ihnen ein *2-Kanaloszilloskop* zur Verfügung. Je nach Aufgabenstellung greifen Sie den Spannungsabfall über R_d, über die Klemmen AB das Eingangssignal U_e und über die LC-Glieder mit dem Oszilloskop ab. Betrachten Sie die Signale der *Eingangs* -bzw. *Aussgangsspannungen* parallel am Oszilloskop zum Vergleich.

Bemerkung zur Strommessung: Bedenken Sie, daß bei der Messung des Stromes mittels Multimeter über den Innenwiderstand eine Spannung abfällt, wodurch ein weiterer Widerstand eingebaut wird. Dieser variiert mit der Messgenauigkeit. Man müßte die Messgenauigkeit des Multimeters über den gesamten Zeitraum nicht verändern und den Spannungsabfall über dem Multimeter messen. Daher ist es ratsam, den Strom indirekt über den Spannungsabfall am Dämpfungswiderdstand R$_D$ zu bestimmen.

5.4 Bestimmung der Resonanz- und der Grenzfrequenzen mittels Lissajous - Figur

Der Scheinwiderstand X bzw. die Phasenverschiebung θ verschwindet bei Resonanz. Aufgrund der Tatsache, daß ein ohmscher Widerstand keine Phasenänderung verursacht, kann der Spannungsabfall über R_d als Referenz für die Stromphase herangezogen werden und mit der anliegenden Gesamtspannung $U_e = U_a$ (vgl.Fig.1) verglichen werden. Es gibt mehrere messtechnische Möglichkeiten zur Bestimmung der Resonanzfrequenz. Bei der *Lissajour-Figur* werden beide Spannungen am Oszilloskop durch Verwendung des xy-Betriebes gegeneinander aufgetragen. Der Winkel zur x-Achse beschreibt über den Zusammenhang nach Gl.(9) die Phasenverschiebung.

a) Bestimmen Sie die Resonanzfrequenz f_0 und vergleichen diese mit der berechneten ! Welcher Strom fließt durch die Schaltung? Bestimmen Sie den Verlustwiderstand R_v.



(a) $\theta = \pi/2$ $x{=}y$ (b) $\theta = \pi/4$ (c) $\theta = 0$

Abb. 6: Lissajou-Figuren

b) Berechnen Sie die obere und untere Grenzfrequenz.

5.5 Übertragungsfunktion, Impedanz Z, Rv

a) Messen Sie die Spannungen über R_d, LC in Abhängigkeit von der Frequenz ! Regeln Sie dabei die Eingangsspannung U_e auf 3 V ein. Wie gehen Sie effektiv bei der Messung vor ?
b) Tragen Sie die *Übertragungsfunktion* U_{LC}/U_e, U_{LC} und den Strom I über die Frequenz auf Milimeterpapier auf.
d) Tragen Sie die *Impedanz* über die Frequenz auf Milimeterpapier auf und vergleichen Sie diese mit der theoretischen (s.Glossar) in einem Grafen.

5.6 Bandbreite B, Güte Q, Grenzfrequenzen

a) Bestimmen Sie die obere f_{go} und die untere Grenzfrequenz f_{gu} grafisch aus den gemessenen Kurven für U oder I. Berechnen Sie daraus die Bandbreite B ! Stimmen die Werte mit den berechneten aus Gl.(13), Gl.(**??**) und Gl.(11) überein ? Bestimmen Sie daraus die Güte Q des Systems ($Q = \frac{f_0}{B}$)!
b) Warum wird ein Reihenschwingkreis auch als Frequenzfalle bezeichnet ?

5.7 Signalform

In diesem Teil geht es darum, die Impulsantwort eines Rechtecksignales in Abhängigkeit der Frequenz zu untersuchen.
a) Stellen Sie am Eingang ein Rechtecksignal ein und untersuchen Sie, wie das CL-System reagiert. Skizzieren Sie die Impulsantwort auf mm-Papier.
b) Ändern Sie den Dämpfungswiderstand auf 470 Ohm und die Spule auf 20 mH. Was ändert sich ?

6 Grundlagen

6.1 einige Begriffe

Um einen kleinen Abriss zu geben, werden hier ein paar Begriffe kurz erläutert. Für tiefergehende Erklärungen sei auf entsprechende Literatur verwiesen.

Das elektrische Feld und die Spannung U Befindet sich eine kleine Testladung q=e^- in der Umgebung einer wesentlichen Größeren, so wird je nach Vorzeichen (Konvention) auf diese eine Kraft(Stichwort:*Coulombsches Gesetz*) ausgeübt. Dies führt auf die Definition des Elektrischen Feldes **E** (vektoriell).

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{q} \qquad [E] = \frac{N}{C} \tag{14}$$

Wenn eine Kraft auf die Ladung ausgeübt wird, so mußbeim Verschieben der Testladung je nach Richtung der Krafteinwirkung oder Vorzeichen der Ladungen Arbeit aufgewendet werden oder gewonnen werden.

$$W_{1,2} = \int_1^2 \mathbf{F}d\mathbf{r} = q\int_1^2 \mathbf{E}d\mathbf{r} = qEd = q\int_1^2 d\varphi = qU \tag{15}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{d\varphi}{dr}\mathbf{e_r} \quad [E] = \frac{V}{m} \tag{16}$$

Werden, wie bei der Batterie zwei Pole mit unteschiedlichen Ladungsträgerkonzentrationen und den Potentialen φ durch einen Leiter verbunden, so kommt es zu einem Ladungsträgerausgleich bei dem ein Strom fließt. Es gilt das Ohmsche Gesetz $U = R \cdot I$.

Aus Gl(15) folgt durch zudem

$$\frac{qU}{q} = \frac{qEd}{q} \rightarrow U = Ed \tag{17}$$

Die Feldstärke läßt sich viel einfacher aus dem Abstand und der Spannung bestimmen.

Knotenregel Das Gesetz der *Ladungserhaltung* besagt, daß die Summe der Ströme, die zu einem Knoten hin- und abfließen, Null ergibt :

$$\sum_i I_i = 0 \tag{18}$$

Maschenregel Die Summe aller Spannungen in in einem Kreis ist gleich Null : Daraus kann folgende Regel abgeleitet werden:

$$\sum_i U_i = 0 \tag{19}$$

Spannungsteiler Folgt durch Anwendung der Knoten- und Maschenregel, ohne die eine Beschreibung von Spannungsabfällen nicht möglich wäre. Befinden sich zwei Verbraucher (R_1 und R_2) in Reihe, so verhalten sich die einzelnen Spannungen zur Eingangsspannung U_e wie die einzelnen Widerstände zum Gesamtwiderstand :

$$\frac{U_{1,2}}{Ue} = \frac{R_{1,2}}{R_1 + R_2} \tag{20}$$

komplexe Schreibweise Schwingungen können in cos bzw. sin - Schreibweise beschrieben werden. Oft wird die komplexe Schreibweise aufgrund einfacher Berechenbarkeit vorgezogen. Die komplexe Schreibweise einer Zahl: $c = a + j \cdot b$ wobei $j = \sqrt{-1}$. Eine übliche Darstellung einer komplexen Zahl erfolgt über das Zeigerdiagramm in der komplexen Ebene. Der imaginäre Teil b wird in der y-Achse und der Realteil a auf der x-Achse aufgetragen. Jede Schwingung lässt sich in komplexer Schreibweise darstellen, so auch der Strom und die Spannung : $\underline{I} = I \cdot e^{j\Phi_i}$, $\underline{U} = U \cdot e^{j\Phi_u}$. Die Winkel $\Phi_{i,u}$ geben die jeweiligen Nullphasenwinkel zu reellen Achse an. Läßt man nun den Zeiger im Uhrzeigersinn über die Zeit mit der Kreisfrequenz ω drehen, so ergibt sich daraus in der zeitabhängigen Darstellung die periodische Darstellung. Entsprechend weisen die Phasen im Exponenten eine Zeitabhängigkeit auf.

6.2 Die Kapazität C

Eigenschaft z.B. eines *Kondensators*, eine bestimmte Menge Q an Ladungsträgern durch Anlegen einer Spannung U zu sammeln und wieder abzugeben. Die für die Ladungstrennung aufgewendete Energie wird zum Teil (ohmsche Verluste) in dem sich aufbauenden elektrischem Feld gespeichert.

$$C = \frac{Q}{U} \qquad [C] = \frac{1AS = C}{V} = 1F(Farad) \tag{21}$$

$$W = \frac{1}{2}CU^2 \qquad [W] = 1Ws = 1Joule \tag{22}$$

Aufbau des Kondensators Im einfachsten Fall besteht der Kondensator aus zwei im *Abstand* d sich gegenüberstehenden Leiterplatten mit einer jeweiligen *Grundflächen* A. vgl. Abb(7) [1]

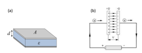


Abb. 7: Schema eines Plattenkondesators (a) ; Ladungsverhältnisse und Elektrisches Feld zwischen den Platten (b)

Flächenladungsdichte und E-Feld Eine Charakterisitische Größe hierbei ist die *Flächenladungsdichte* σ_A, die mit dem *Elektrischem Feld* $\boldsymbol{E}$ zwischen den Platten in folgender Beziehung steht:

$$\sigma_A = \frac{Q}{A} \quad \left[\frac{C}{cm^2}\right] \mathbf{E} = \frac{\sigma_A}{\epsilon_r}\mathbf{e_r} \tag{23}$$

Dielektrikum Der Zwischenbereich kann mit einem sog. *Dielektrikum* (sh. Abb.(7a)), ausgefüllt werden, um die Kapaziät einzustellen. Die charakterisitische Größe hierbei ist die Dielektrizitätszahl oder Permitivität $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$. Mit $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}\, F/m$ für die elektrische Feldkonstante. Im einfachsten Fall wird hier das Vakuum/Luft mit $\epsilon_r = 1$ zur Beschreibung benutzt.

[1] Abb aus Wikipedia entnommen

Kapazität des Plattenkondensators Aus Gl.(21) und den beiden Gl.(23) ergibt sich durch Umformen die alternative Geometrische Definition der Kapazität

$$C = \epsilon_o\epsilon\frac{A}{d} = \epsilon_r\frac{A}{d} \tag{24}$$

Halbierung des Plattenabstandes Bei einer Halbierung des Plattenabstandes d eines zuvor aufgeladenen Kondensators,

$$C = \epsilon_r\frac{A}{d_0/2} = 2C_0 \tag{25}$$

1. **der von seiner Spannungsquelle getrennt** wurde, bleibt die Ladung Q erhalten; *i)* die Flächenladungsdichte bleibt daher unverändert: $\sigma_A =$ konst. $\rightarrow$ *ii)* Die Feldstärke bleibt konstant: $E = \sigma_A/\epsilon_r =$ konst $\rightarrow$ *iii)* Es halbiert sich die Spannung: $U = Ed_0/2 = U_0/2$ Der Energieinhalt halbiert sich $W = 1/2(2C_0)(U_0/2)^2 = W_0/2$. D.h. es wird Energie abgegeben

$$W_{01} = \int_{d_0}^{d_0/2}\mathbf{Fds} = Q\int_{d_0}^{d_0/2}\mathbf{Eds} = -\frac{1}{2}W_0 \tag{26}$$

   Umgekehrt muss zur Ladungstrennung Energie aufgewendet werde, die im System bzw. im Feld gesperichert wird.

2. **der von seiner Spannungsquelle nicht getrennt** wurde bleibt die Spannung $U = konst.$ aber nicht die Ladung $Q \neq$ erhalten.Es können Ladungen zur/von der Quelle fließen .i) *i)* die Flächenladungsdichte verdoppelt sich wegen U=konst und 25: $\rightarrow \sigma_A =$ konst.$\rightarrow$ *ii)* Die Feldstärke verdoppelt sich: $E = 2\sigma_{A0}/\epsilon_r = 2E_0$ Der Energieinhalt wird verdoppelt $W = 1/2(2C_0)U^2 = 2W_0$.

Aufladeverhalten eines RC-Gliedes Zeitliche Verhalten des Kodensators wird durch Lösen der Differentialgleichung erreicht. Die Kirchhoff'schen Maschenregel, angewendet auf den Fall des RC-Gliedes.

$$U_R + U_C = RI + \frac{Q}{C} = U_e \tag{27}$$

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = U_e \tag{28}$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{dCU}{dt} = \frac{CdU}{dt} \tag{29}$$

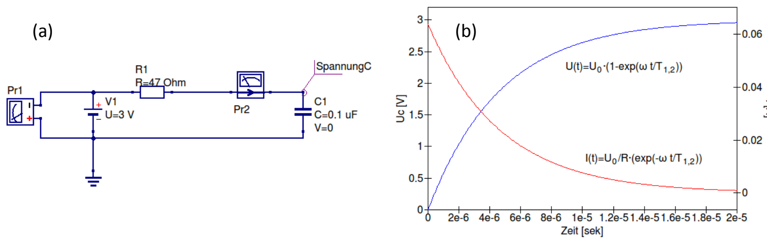


Abb. 8: RC-Tiefpass : (a) Schaltplan eines RC-Tiefpasses. (b) Gemessene Spannung Uc und Strom I über der Zeit. Es wurden die gleichen Bauteile wie im Versuch verwendet (R=47 Ohm und C=0,1 μF)

Blindwiderstand vom Kondensator $\boxed{X_C = \frac{1}{\omega C}}$

6.3 Induktivität L: Spule im Gleichstromkreis

Eine Stromänderung induziert in der Spule eine Spannung die dem Strom entgegenwirkt (Minuszeichen). Letzteres ist eine Konsequenz der Lenzschen Regel.

$$U_{ind} = -L\frac{dI}{dt} \qquad [L] = \frac{1Vs}{A} = 1F(Henry) \tag{30}$$

$$W_L = \frac{1}{2}LI^2 \qquad [W] = 1Ws = 1Joule \tag{31}$$

Wird an einer Spule eine Spannung angelegt, so fließt ein Strom, der bis zu einem Maximalstrom mit einer *Zeitkonstante* $\tau_L = L/R$ anwächst : $i_L = U/R \cdot (1 - e^{-t/\tau})$. Der Blindwiderstand X_L setzt keine Wirkleistung um, sondern speichert Energie in Form eines Magnetfeldes. Der Wirkwiderstand R_{vL} erzeugt als ohmscher Verbraucher Wärme. Ein Maß für den Wärmeverlust wird durch die *Spulengüte* $Q_L = \omega L/R$ angegeben.

Blindwiderstand der Spule

$$\boxed{X_L = \omega L} \tag{32}$$

6.4 Impedanz , Scheinwiderstand Z,

Der Wechselstromwiderstand, auch **Impedanz** $\underline{Z}$ genannt, setzt sich aus einem **Realwiderstand (Wirkwiderstand)** R = ohmschen Verbraucher (Wärmeerzeugung) und einem frequenzabhängigen Widerstand (**Blindwiderstand, Reaktanz**) X zusammen. $\underline{Z} = R + jX$. Der Betrag $Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$ wird als **Scheinwiderstand** bezeichnet.

7 Fragenkatalog & Vorbereitung

- Bestimmen Sie die Resonanzfrequenz f_0 für den Aufbau in Aufg. B aus der Resonanzbedingung: $X_L = X_C$
- Erklären Sie die Kirchhoff'schen Gesetze ?
- Beschreiben Sie den Spannungs- bzw. Stromverlauf über einen Kondensator, einem ohmschen Widerstand und einer Spule beim Ein-bzw. Ausschalten der Spannungsversorgung !
- Welche physikalische Bedeutung hat der Blind-/Wirkwiderstand bzw. die Impedanz $\underline{Z}$? Beschreiben Sie die Impedanz am Beispiel einer RLC-Parallel-/Reihenschaltung !
- Was ist ein Zeigerdiagramm ?
- Was besagt die Phasenverschiebung θ und in welchem Zusammenhang steht diese mit der Impedanz ?
- Unter welchen Bedingungen kommt es zur Resonanz ?
- Was sagt die Bandbreite aus ?
- Was ist der Qualitätsfaktor Q ?

8 Literatur

- "Differentialgleichungen", Frank Ayres jr.
- "Taschenbuch der Physik", Horst Kuchling
- "Tabellenbuch Elektrotechnik Elektronik", Friedrich
- "Internet", Wikipedia

9 Anhang: Zusammenhang zwischen Strom und Spannung

Die Maschenregel ergibt :

$$U_R + U_L + U_C - U_e = 0 \tag{33}$$

Mit den Zusammenhängen $U_C = Q/C$, $U_L = L\frac{dI}{dt}$, $U_R = I \cdot R$ sowie einer treibenden Quelle mit der Eingangsspannung $U_e = U$:

$$IR + L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = U_e \tag{34}$$

R umfaßt den totalen Widerstand, einschließlich Verlustwiderstände und Innenwiderstände : $R = R_{\sum} = R_i + R_d + R_v$. Mit einer sinusförmigen, also veränderlichen Eingangsspannung als elektromotorische Kraft wird der Kreis angeregt :

$$U_e = U_0 \sin(\omega t) \tag{35}$$

nach der Zeit abgeleitet:

$$R\frac{dI}{dt} + L\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt} = \frac{dU_e}{dt} \tag{36}$$

Unter Anwendung der Heaviside'schen Notation für den Differentialoperator $D = \frac{d}{dt}$ und mit $I = \frac{dQ}{dt}$ ergibt sich die algebraische Darstellung :

$$LD^2I + DIR + \frac{1}{C}I = DU_e$$
$$[LD^2 + RD + \frac{1}{C}]I = \omega U_0 cos(\omega t) \tag{37}$$

Diese vom Typ her linear inhomogene Differentialgleichung 2. Grades läßt sich wie folgt lösen. Umstellen der Gleichung nach I und einsetzen von Gl.3) ergibt :

$$I = \frac{\omega U_0}{[LD^2 + RD + \frac{1}{C}]} \cdot \frac{\cos^2(\omega t)}{\cos(\omega t)} \tag{38}$$

Läßt man nur den Operator D^2 auf den Nenner $\cos(\omega t)$ wirken und benutzt die Notation für den Blindwiderstand (Reaktanz) $X = (L\omega - \frac{1}{C\omega})$, so ergibt sich folgender Ausdruck :

$$\begin{aligned} I &= \frac{\omega U_0}{[-L\omega^2 + RD + \frac{1}{C}]} \cdot \frac{\cos^2(\omega t)}{\cos(\omega t)} \\ &= \frac{\omega U_0}{[RD - X\omega]} \cdot \frac{\cos^2(\omega t)}{\cos(\omega t)} \end{aligned} \tag{39}$$

Durch Multiplikation des Zählers und des Nenners mit $[RD + X\omega]$ erhält man wieder durch die Identität $D^2 \cos(\omega t) = -\omega^2$
$cos(\omega t)$:

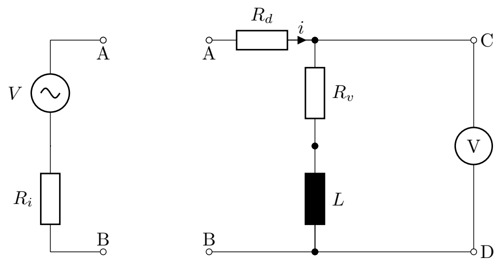
$$I = \frac{\omega U_0[RD + X\omega]}{[-R^2\omega^2 - X^2\omega^2]} \cdot \cos(\omega t) \tag{40}$$

Kürzen der ω^2 und Anwenden des D-Operators ergibt die Lösung für den Strom :

$$I = \frac{U_0[R\sin(\omega t) - X\cos(\omega t)]}{[R^2 + X^2]} \tag{41}$$

10 Zusatzaufgaben (optional)

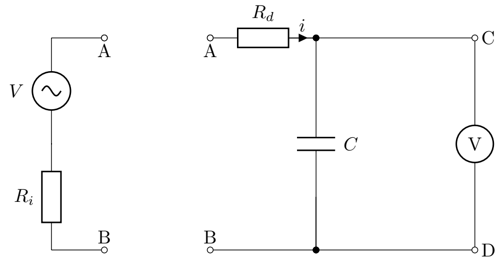
10.1 RL-Hochpass



Bauteile	Größe
Widerstand Rd	47 Ohm
Spule	2 mH

Verwenden Sie die o.a. Bauteile. Legen Sie an den Eingang AB ein Sinussignal mit der Amplitude von 3 V an.
a) Tragen Sie den Strom, die Ausgangsspannung U_{cd}, sowie die Impedanz Z über die Frequenz auf Milimeterpapier auf ! Welches Verhalten erwarten Sie ?
b) Bestimmen Sie die Grenzfrequenz f_G des Aufbaus aus dem Verlauf der beiden Größen. Wie können Sie aus den Antwortpulsfolgen die Zeitkonstante τ bestimmen ? Legen Sie dafür ein Rechtecksignal an !

10.2 RC-Tiefpass



Bauteile	Größe
Widerstand R_d	47 Ohm
Kondensator	0,1 μ F

Verwenden Sie die o.a. Bauteile. Legen Sie an den Eingang AB ein Sinussignal mit der Amplitude von 3 V an.
a) Tragen Sie den Strom, die Ausgangsspannung U_{cd}, sowie die Impedanz Z über die Frequenz auf Millimeterpapier auf ! Welches Verhalten erwarten Sie ?
b) Bestimmen Sie die Grenzfrequenz f_G des Aufbaus aus dem Verlauf der beiden Größen. Wie können Sie aus den Antwortpulsfolgen die Zeitkonstante τ bestimmen ? Legen Sie dafür ein Rechtecksignal an !