

# Phasen- und Gruppengeschwindigkeit von Ultraschallwellen in Flüssigkeiten

## 1 Ziel

In diesem Versuch sollen Sie sich mit der Phasen- und Gruppengeschwindigkeit von Wellen vertraut machen. Diese beiden Geschwindigkeiten spielen bei der Datenübertragung eine sehr große Rolle, denn in der Regel sind die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit eines Wellenpaketes unterschiedlich, wenn es ein Medium durchläuft.

Im Versuch sollen Sie daher die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit von Schallwellen in Wasser und in verschiedenen konzentrierter Kochsalzlösung messen und die Änderung der Phasen- und Gruppengeschwindigkeit zeigen. Dazu werden die zeitliche und räumliche Ausbreitung von Ultraschallwellen (Frequenzen oberhalb 20 kHz) gemessen.

## 2 Theorie

### 2.1 Phasengeschwindigkeit

Schall ist die zeitlich und räumlich periodische Abfolge von Über- und Unterdruck. Da diese Druckänderungen parallel zur Ausbreitungsrichtung erfolgt, spricht man von einer Longitudinalwelle. Der Druckverlauf  $P(x,t)$  eines langen Wellenzugs lässt sich näherungsweise durch eine Cosinusfunktion beschreiben, siehe Abb. 1:

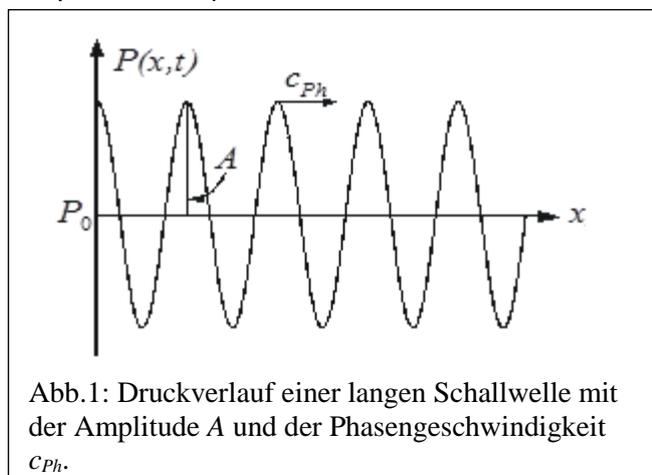
$$P(x, t) = A \cdot \cos(kx - \omega t) \quad (1),$$

wobei  $k = 2\pi/\lambda$  die sogenannte Wellenzahl und  $\lambda$  wie Wellenlänge ist. Die Kreisfrequenz der Welle ist  $\omega = 2\pi/T$  mit der Periode  $T$  der Schwingung, und  $A$  ist die Amplitude der Welle.

Die Geschwindigkeit, mit der sich ein Bezugspunkt gleicher Phasenlage (z.B. ein Maximum der Welle) im Raum fortpflanzt, ist die sogenannte Phasengeschwindigkeit  $c_{Ph}$ . In Abhängigkeit der Kreisfrequenz  $\omega$  beziehungsweise der Frequenz  $\nu = \omega/2\pi$  ist sie definiert als

$$c_{Ph} = \lambda \cdot \nu = \frac{\omega}{k} \quad (2).$$

Während die Phasengeschwindigkeit (Schallgeschwindigkeit) in Luft 331 m/s beträgt, erreicht sie in Wasser wegen der Inkompressibilität von Flüssigkeiten deutlich höhere Werte, etwa 1500 m/s, in Festkörpern sogar bis zu 6000 m/s. Dabei wird Energie und Impuls in einem Medium transportiert, ohne dass dazu Massentransport notwendig ist.



### 2.2 Gruppengeschwindigkeit

In der Regel werden nicht lange Wellenzüge sondern Wellenpakete beobachtet. Insbesondere bei der schnellen Informationsübertragung ist die Herstellung von kurzen Wellenpaketen oder Pulsen essentiell. Ein Wellenpaket oder Wellengruppe besteht aus einer Superposition

mehrerer Wellen mit unterschiedlichen Frequenzen, Wellenlängen und Amplituden. Als einfaches Beispiel ist in Abb. 2 eine Wellengruppe gezeigt, die durch Überlagerung zweier Wellen mit leicht unterschiedlicher Frequenz gebildet wird. Der Druckverlauf  $P(x,t)$  eines Wellenpakets, das aus  $i$  Wellen zusammengesetzt ist, lässt sich schreiben als

$$P(x,t) = \sum_i A_i \cdot \cos(k_i x - \omega_i t) \quad (3).$$

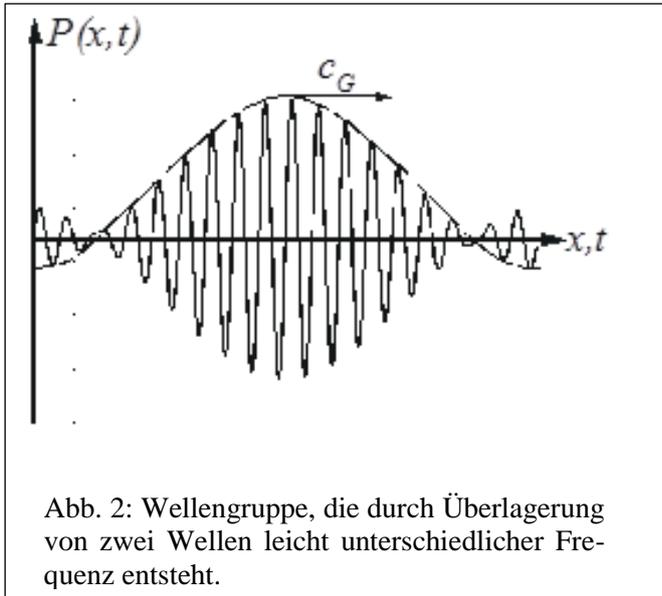


Abb. 2: Wellengruppe, die durch Überlagerung von zwei Wellen leicht unterschiedlicher Frequenz entsteht.

Die Einhüllende des Wellenpakets beschreibt einen Wellenpuls, der sich im Raum ausbreitet. Während die Phasengeschwindigkeiten  $c_{Ph}$  für der einzelnen Teilwellen verschieden sein kann, ist die Gruppengeschwindigkeit  $c_G$  der Wellengruppe eindeutig festgelegt: Sie gibt die Geschwindigkeit an, mit der sich das **Maximum** der Wellengruppe in Ausbreitungsrichtung bewegt. Mathematisch ist die Gruppengeschwindigkeit definiert als die Ableitung der Frequenz einer Teilwelle nach der Wellenzahl:

$$c_G = \frac{d\omega}{dk} \quad (4).$$

In dispersiven Medien ist die Phasengeschwindigkeit von der Frequenz abhängig. Die Gruppengeschwindigkeit kann dann unter Umständen stark von der Phasengeschwindigkeit abweichen. Weiterhin bewegen sich dann die unterschiedlichen Frequenzanteile des Wellenpakets mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten, was dazu führt, dass das Wellenpaket auseinanderläuft. Der Zusammenhang zwischen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit lässt sich aus den Gleichungen (2) und (4) herleiten. Er lautet

$$c_G = c_{Ph} - \lambda \cdot \frac{dc_{Ph}}{d\lambda} \quad (5).$$

Liegt keine Dispersion vor ( $dc_{Ph}/d\lambda = 0$ ), so ist  $c_G = c_{Ph}$ . Das Wellenpaket behält dann seine Form während der Ausbreitung bei.

### 3 Aufbau

Der Versuchsaufbau ist in Abb. 3 skizziert. Der Schallgeber ist außen an einer mit Flüssigkeit gefüllten Küvette angebracht. Im Abstand  $l$  zum Schallgeber wird der Schallaufnehmer in die Flüssigkeit eingetaucht. Der Schallgeber wird von der Wechselfspannung eines Frequenzgenerators versorgt. Über den Monitorausgang des Frequenzgenerators lässt sich dessen Signal mit einem Oszilloskop darstellen. Das Signal des Schallaufnehmers lässt sich ebenfalls mit dem Oszilloskop messen.

Die schallabstrahlende Fläche des Schallgebers wird zur besseren Ankopplung mit Glycerin benetzt und an die Küvettenwand angebracht. Um Schallreflexionen und sich daraus möglicherweise entwickelnde Mehrfachechos und stehende Wellen zu vermeiden, wird die dem Schallgeber gegenüberliegende Küvettenwand mit schallabsorbierendem Material (z.B. mit zerknülltem Papier) abgedeckt.

Schallgeber und -aufnehmer bestehen aus piezoelektrischen Kristallen, welche die Eigenschaft haben, unter dem Einfluss mechanischer Deformation eine elektrische Spannung zu erzeugen und umgekehrt sich beim Anlegen einer Spannung zu deformieren. Wird nun über den Frequenzgenerator eine Wechselspannung an den Schallgeberkristall angelegt, führen die periodischen Deformationen zur Schallaussendung. Die daraus resultierenden Deformationen am Schallaufnehmerkristall lassen sich als Wechselspannung mit dem Oszilloskop nachweisen.

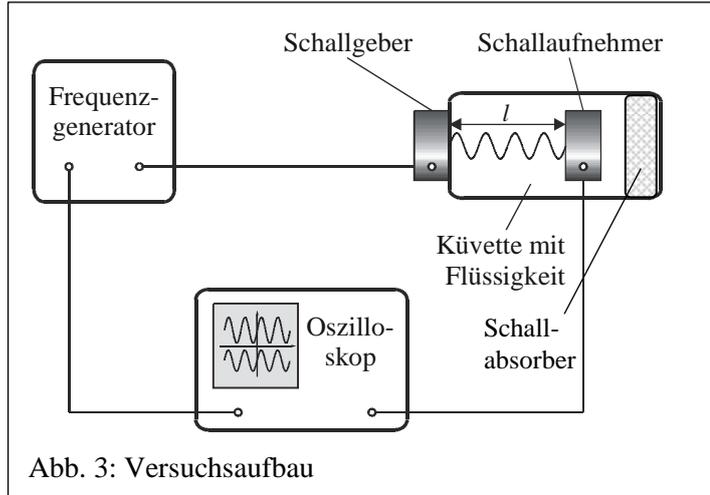


Abb. 3: Versuchsaufbau

## 4 Durchführung

### 4.1 Bestimmung der Generatorfrequenz

Auf dem Oszilloskop wird eine Schwingungsperiode des Generatorsignals möglichst groß dargestellt. Die Periodendauer  $T$  wird abgelesen. Um den Ablesefehler am Oszilloskop möglichst gering zu halten ist es ratsam, mehrere Schwingungsperioden auf dem Oszilloskop zur Auswertung der Periodendauer heranzuziehen.

### 4.2 Bestimmung der Phasengeschwindigkeit

Der Schallgeber wird mit dem sinusförmigen Signal des Frequenzgenerators angesteuert. Das Signal des Schallaufnehmers sowie das Monitor-signal des Frequenzgenerators werden auf dem Oszilloskop bei interner Triggerung dargestellt. Durch longitudinales Verschieben des Schallaufnehmers werden Aufnahme und Monitor-signal phasengleich auf dem Bildschirm dargestellt. Aus dieser Stellung verschiebt man den Schallaufnehmer und trägt grafisch die Verschiebung  $\Delta l$  gegen die Anzahl der dabei überstrichenen phasengleichen Durchgänge  $n$  auf.

### 4.3 Bestimmung der Gruppengeschwindigkeit

Der Frequenzgenerator wird im Impulsmodus betrieben. Die Triggerung des Oszilloskops erfolgt auf die aufsteigende Flanke des Eingangssignals. Das Signal des Schallaufnehmers wird so auf dem Oszilloskop dargestellt, dass man die Laufzeitverschiebung der Impulse zwischen Schallgeber und Schallaufnehmer erkennen kann. Nun muß für den Impuls am Schallaufnehmer der zeitliche Nullpunkt definiert werden. Aus einer Ausgangsstellung nahe dem Schallgeber verschiebt man den Ultraschallaufnehmer und bestimmt die Veränderung der Impulslaufzeit  $\Delta t$  aus der Verschiebung der Impulsflanke im Oszillogramm.

### 4.4 Messungen

Die Messung zur Bestimmung der Phasen- und Gruppengeschwindigkeit für Wasser (Leitungswasser 500 ml) wird als erstes durchgeführt. Zur Bestimmung der Phasen- und Gruppengeschwindigkeit sollten 6 Messungen von  $\Delta l$  ausreichen. Als nächstes soll die Messung der Phasen- und Gruppengeschwindigkeit in verschiedenen konzentrierter Kochsalz-

lösung erfolgen. Hierfür werden als erstes 40 g Kochsalz ins Wasser dazugegeben und so lange umgerührt bis sich das Kochsalz vollständig aufgelöst hat. Danach kann die nächste Messung der Phasen- und Gruppengeschwindigkeit erfolgen. Die Messung der Phasen- und Gruppengeschwindigkeit soll noch dreimal wiederholt werden, wobei der Salzgehalt jeweils um 40 g erhöht wird. Am Ende sollten 160 g Salz auf 500 ml gelöst worden sein und man hat 5 Messungen der Phasen- beziehungsweise Gruppengeschwindigkeit.

## 5 Auswertung

Die Auswertung sollte wie folgt erfolgen:

1. Bestimmung der Generatorfrequenz mit Fehlerangabe!
2. Bestimmung der Phasengeschwindigkeiten
  - a. Die Geradengleichung lautet:  $\Delta l = \lambda n$  mit der Wellenlänge als Steigung
  - b. Zur Bestimmung der Wellenlänge (inklusive Fehler) soll die lineare Regression ohne Achsenabschnitt (siehe Fehlerrechnungsskript) benutzt werden.
  - c. Die Phasengeschwindigkeit wird aus der Frequenz und der Wellenlänge bestimmt. Der Fehler der Phasengeschwindigkeit soll mit Hilfe der Fehlerfortpflanzung berechnet werden
3. Bestimmung der Gruppengeschwindigkeiten
  - a. Die Geradengleichung:  $\Delta l = c_G \Delta t$  mit der Gruppengeschwindigkeit  $c_G$  als Steigung
  - b. Zur Bestimmung der Gruppengeschwindigkeit (inklusive Fehler) soll die lineare Regression ohne Achsenabschnitt (siehe Fehlerrechnungsskript) benutzt werden.
4. Bestimmung der Salzkonzentrationsabhängigkeit der Phasen- und Gruppengeschwindigkeit
  - a. Die Phasen- und Gruppengeschwindigkeiten sollen gegen die Salzkonzentration aufgetragen werden und mit Hilfe der linearen Regression die Abhängigkeit bestimmt werden.

## 6 Protokoll

Der Versuch wird am Ende in einem Protokoll zusammen gefasst. Das Protokoll sollte wie folgt aufgebaut sein:

1. Einleitung (Motivation, Versuchsziel)
2. Theoretische Grundlagen (Einführung aller relevanten Messgrößen sowie Herleitung aller verwendeten Formeln, die Antworten zu den 5 Fragen aus dem Fragekatalog müssen im Fließtext zu finden sein).
3. Durchführung (Beschreibung des Aufbaus, Skizze, Beschreibung der Aufgaben)
4. Auswertung/Ergebnisse (Messwerttabellen, Graphen, Lösungsweg, Ergebnisse mit Fehlerangabe)
5. Zusammenfassung/Fazit (Bewertet der Ergebnisse, Vergleich mit Literaturwerten, mögliche Fehlerquellen)
6. Quellenangabe

## 7 Literaturangaben:

H. Stöcker: Taschenbuch der Physik. Verlag Harry Deutsch, 1993

Wasser	$c_{20^\circ\text{C}} = 1480 \text{ m/s}$	} Phasengeschwindigkeiten
Meerwasser	$c_{20^\circ\text{C}} = 1470 \text{ m/s}$	
Glyzerin	$c_{20^\circ\text{C}} = 1920 \text{ m/s}$	

D.R.Lide: Handbook of chemistry and physics. CRC press,inc. 1995

Wasser	$c_{25^\circ\text{C}} = 1496 \text{ m/s}$	} Phasengeschwindigkeiten
Meerwasser	$c_{25^\circ\text{C}} = 1531 \text{ m/s}$	
Glyzerin	$c_{25^\circ\text{C}} = 1904 \text{ m/s}$	

Mit dem Versuchsaufbau gemessene Werte für  $c_{Ph}$  und  $c_G$  bei  $25^\circ\text{C}$ :

	$c_{Ph} \text{ (m/s)}$	$c_G \text{ (m/s)}$
Wasser	1500	1506
NaCl-Lösung (gesättigt)	1800	1800
Glycerin*)	1880	1900

\*) Da Glyzerin hygroskopisch ist (Wasser zieht), wird für abgestandenes Glyzerin häufig eine kleinere Schallgeschwindigkeit als die angegebene gemessen.