

# Fehlerrechnung für Einsteiger

## Eine beispielorientierte Einführung für Studierende der TUHH

### 1. Messungen und Ungenauigkeit

Viele physikalische Größen (z.B. eine Länge, Temperatur oder eine Masse) können durch Messungen direkt bestimmt werden. Solche Messwerte haben die Eigenschaft, daß sie um den wahren Wert verteilt sind, man sagt, sie „streuen“. Stellen Sie sich zehnmal hintereinander auf eine „genaue“ Personenwaage und Sie bekommen zehn verschiedene Ergebnisse – obwohl Sie jedesmal ganz sicher die gleiche Masse mitbringen. Das liegt daran, daß jeder Meßvorgang von Natur aus mit einer Ungenauigkeit behaftet ist, die gemeinhin als „Fehler“ bezeichnet wird. Damit Sie und andere den Meßwert von 78,34655 kg, den Sie an Ihrer genauen Waage ablesen, überhaupt interpretieren können, ist es nötig, die besagte Ungenauigkeit mit anzugeben.

In wissenschaftlichen Experimenten ist die Angabe solcher Ungenauigkeiten besonders wichtig, um einzuschätzen, in welchem Wertebereich der wahre Wert mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt, diesen Wert also „einzugrenzen“. Ohne eine solche Eingrenzung ist die Angabe eines Wertes, wie etwa Ihre 78,34655 kg, aussage- und sinnlos. Was also ist zu tun? Wir müssen...

- ...das Experiment so entwerfen, daß der Fehler möglichst klein wird. Im Praktikum ist in dieser Hinsicht nicht sehr viel Handlungsspielraum gegeben, weil die meisten Versuche und deren Ablauf vorgegeben sind.
- ...die Ungenauigkeit des Ergebnisses bestimmen.
- ...rauskriegen, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß bei einer Wiederholung des Experiments das Ergebnis in diesem Fehlerbereich liegt.

Das typische Vorgehen ist, wie im Beispiel der Personenwaage, daß man die Messung ein und derselben Größe mehrmals durchführt, was zu einer Meßreihe führt. Mehrere Meßreihen kann man auch zu einer einzigen, großen zusammenfassen, allerdings muß man dann unterscheiden, ob alle Meßreihen unter den gleichen Bedingungen stattgefunden haben, oder ob diese zwischendurch geändert wurden (z.B. ein anderes Meßgerät benutzt), denn dann ändert sich i.a. auch die Streuung der Meßwerte.

Bis einschließlich Kapitel 5 gehen wir von Meßreihen unter gleichen Bedingungen aus.

Wie gebe ich Fehler an? Der Fehler, besser: die Ungenauigkeit einer physikalischen Größe  $x$  wird oft als  $\Delta x$  bezeichnet, was nicht mit einer Differenz verwechselt werden darf. Eine bestimmte Sorte Fehler ist die Standardabweichung  $\sigma_x$ , auf die wir später noch eingehen werden. Der Index gibt die physikalische Größe an, auf die sich dieser Fehler bezieht.

Fehlerwerte können

- absolut ( $\Delta x$ ),
  - relativ ( $\Delta x/x$ ) oder
  - prozentual ( $\Delta x/x \cdot 100\%$ )
- angegeben werden.

absolut	: $m=(78,35 \pm 0,61)$ kg
relativ:	$m=78,35$ kg $\pm 7,8 \cdot 10^{-3}$
prozentual:	$m=78,35$ kg $\pm 0,78$ %
Die Fehler sind hier nur Phantasiewerte, um die Notation deutlich zu machen.	

Im Beispielkasten rechts sehen Sie, daß ich nicht alle Nachkommastellen mitgenommen habe, die Ihre Waage angezeigt hat, denn wenn der Fehler  $\Delta m=0,61$  kg beträgt, macht es natürlich keinen Sinn, noch mehr Nachkommastellen für  $m$  anzugeben – diese sind ja viel kleiner als die Ungenauigkeit. Wichtig ist also: Mehr Stellen hinter dem Komma machen den Zahlenwert nicht genauer! Das gilt für Personenwaagen ebenso wie für Elementarteilchen-Detektoren in Wohnblockgröße.

Die Fehlerrechnung liefert das Handwerkszeug, um aus den Meßwerten einer physikalischen Größe den Fehler dieser Größe zu bestimmen. Auch hier beim Fehlerwert spuckt der Rechner wieder viele Nachkommastellen aus, aber wieviele davon sollte man eigentlich angeben? Wie genau kann ein Fehler sein? Hierfür gibt es zwar keine harte Vorschrift, aber die mehr oder weniger verbreitete Konvention, daß zwei signifikante Stellen angegeben werden. Dabei darf auch gerundet werden. Hier also nochmal das Beispiel zusammengefaßt:

Das wurde am Meßgerät (Waage) abgelesen:	$m=78,34655$ kg
Dieser Fehler wurde berechnet:	$\Delta m=0,612549$ kg
So wird der Wert mit dem (absoluten) Fehler angegeben:	$m=(78,35\pm 0,61)$ kg
$\Delta m$ ist nicht wirklich berechnet worden, der Wert ist wieder nur aus der Luft gegriffen, um das Prinzip deutlich zu machen.	

## 2. Fehler ist Fehler – oder nicht?

Klare Antwort: Nö! Denn die Ungenauigkeiten, die bei einer Messung auftreten, können verschiedene prinzipielle Ursachen haben. Jeder Fehler eines Meßwerts oder auch einer daraus berechneten Größe fällt in eine der folgenden beiden Kategorien:

### 2.1 Statistische Fehler

Diese Fehler beeinflussen das Meßergebnis auf eine Art und Weise, die nicht vorhersehbar und nicht kontrollierbar ist. Man sagt deshalb auch Zufallsfehler. Was können Ursachen sein?

- Unzulänglichkeiten der menschlichen Sinnesorgane (etwa das begrenzte Auflösungsvermögen des Auges, wenn es um die Frage geht, ob zwei haarfeine Linien übereinander oder leicht nebeneinander liegen),
- Ungeschicklichkeit beim Messen und Ablesen (etwa Parallaxefehler),
- Statistisch wirkende äußere Einflüsse (etwa Erschütterungen).

Statistische Fehler lassen sich mathematisch mit den Werkzeugen der Statistik behandeln. Beachten Sie, daß diese Fehler beiderlei Vorzeichen haben (deshalb das „ $\pm$ “ im Kasten oben).

Bei mehrfachen Messungen – sie stellen sich 10-mal auf die Waage – streuen die einzelnen Meßergebnisse um einen Mittelwert. Dieser Mittelwert ist i.a. *nicht* der tatsächliche Wert, den Sie gerne wissen wollen. Je länger aber eine Meßreihe ist, umso weiter nähert sich der Mittelwert dem tatsächlichen Wert an. Für Forscher und Praktikanten bedeutet das: Meßreihen sollten möglichst lang sein. Sie vertrauen ja auch keinem Medikament, das nur an fünf Leuten getestet wurde.

Man kann es gar nicht oft genug betonen: Eine Einzelmessung sagt im Prinzip überhaupt nichts aus. Erst wenn man die Genauigkeit des Meßverfahrens durch viele Wiederholungen ermittelt hat, kann man wissen, wie die Ergebnisse der Einzelmessungen um eine *Näherung* für den wahren Wert schwanken. Diese Näherung muß natürlich sinnvoll und geeignet sein und aus den Einzelmessungen berechnet werden.

## 2.2 Systematische Fehler

Die systematischen Fehler zeichnen sich dadurch aus, daß sie sich auf alle Einzelmessungen in der gleichen Weise auswirken. Sie sind reproduzierbar, d.h. bei wiederholten Messungen unter gleichen Bedingungen treten sie in gleicher Größe und mit gleichem Vorzeichen auf. Dies ist ganz angenehm, weil dann das Meßergebnis entsprechend korrigiert werden kann (und muß). Beachten Sie, daß das bei den statistischen Fehlern nicht geht!

Was führt zu einem systematischen Fehler in der Messung? Hier spielen beispielsweise Eichfehler von Meßgeräten eine Rolle (z.B. wenn die Personenwaage nicht Null anzeigt, wenn niemand darauf steht), oder Einflüsse, die im Praktikum weitestgehend vernachlässigbar sind, etwa Temperaturen und Drücke, die sich im Verlauf einer Meßreihe ändern, oder auch elektrische und magnetische Streufelder, wie sie durch Stromleitungen entstehen.

In einer Fehlerrechnung werden grundsätzlich nur die statistischen, aber *nicht* die systematische Fehler behandelt.

## 3. Häufigkeitsverteilung von Meßergebnissen

Da habe ich nun geschwitzt und geflucht, um mein Ergebnis auszurechnen:  $(32 \pm 2)$  cm kommt raus. So weit, so gut. Nur leider ist der Referenzwert aus der Literatur mit 35 cm angegeben. Da habe ich also doch irgendwie nicht gut genug gearbeitet, es ist doch zu dumm!

Dies ist die Reaktion vieler Praktikanten, wenn sie ihr Ergebnis mit einem Literaturwert vergleichen. Klären wir also nun, was es eigentlich bedeutet, wenn „ $\pm 2$  cm“ da steht. Heißt das, kein gemessener Wert ist größer gewesen als 34 cm und keiner kleiner als 30 cm? Schon mal vorweg: Das heißt es nicht. Jetzt kommt ein Experiment:

Gemessen wird eine physikalische Größe, die ich der Einfachheit halber  $x$  nenne. Das kann also eine Temperatur, Zeit, Länge, oder was immer sonst sein. Wie immer wird die Messung mehrmals unter immer den gleichen Bedingungen durchgeführt, und zwar genau  $N$ -mal. Das Meßergebnis der  $i$ -ten Messung heißt  $x_i$ . Nun kann es passieren, daß man bei einer oder mehreren anderen Messungen nochmal dasselbe Meßergebnis bekommt. Die Zahl  $N_i$  gibt dann an, bei wievielen der  $N$  Messungen ich das Meßergebnis  $x_i$  bekommen habe. Jetzt kommt noch ein kleiner Schritt: Teilt man  $N_i$  durch die Gesamtzahl der Messungen,  $N$ , bekommt man die relative Häufigkeit  $n(x_i)$  des Meßwerts  $x_i$ . Nochmal als Formel:

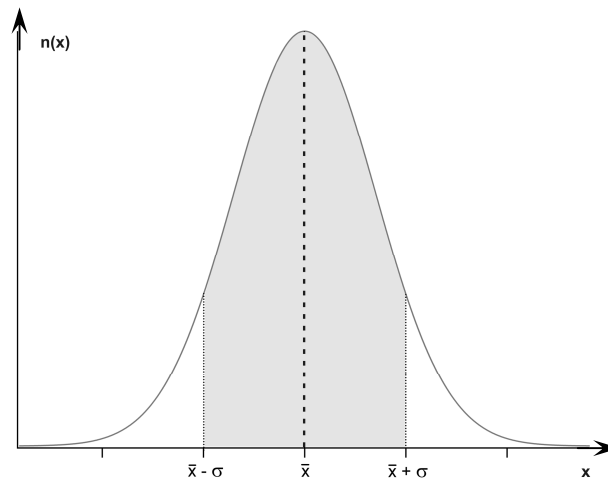
$$n(x_i) = \frac{N_i}{N} = \frac{\text{Anzahl der Messungen mit Ergebnis } x_i}{\text{Gesamtzahl aller Messungen}} \quad (1)$$

Erinnern wir uns, daß die gemessenen Werte keine Zufallszahlen sind, sondern irgendwie um einen Mittelwert streuen. Tragen wir die relative Häufigkeit für einen Meßwert  $x_i$  gegen die möglichen Meßwerte  $x$  auf, dann kommen wir diesem „irgendwie“ ein gutes Stück näher. Es zeigt sich nämlich, daß die entstehende Kurve sich mit größerem  $N$  immer besser der sog. Gaußverteilung (oder Normalverteilung) annähert. Man sagt, die Meßwerte sind gaußverteilt bzw. normalverteilt. Hier die Formel für die Gaußkurve:

$$n(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \quad (2)$$

Wichtig: Die Gaußverteilung ergibt sich nur für  $N \rightarrow \infty$ . Die Verteilung Ihrer Meßwerte wird natürlich ganz anders aussehen, wenn Sie nur sehr wenige Messungen machen.

Und hier ist die grafische Darstellung der Gaußverteilung:



Welche Eigenschaften hat nun diese Verteilung?

- $n(x)$  ist die Verteilung einer *Wahrscheinlichkeitsdichte*.  $n(x)dx$  ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei einer Messung der Meßwert im Intervall  $[x, x+dx]$  liegt.
- $\bar{x}$  ist der am häufigsten vorkommende Meßwert. Für  $N \rightarrow \infty$  ist er identisch mit dem wahren Wert von  $x$ .
- In der Grafik sehen Sie, daß die Kurve zwei Wendepunkte hat, die sich bei  $\bar{x} - \sigma$  und  $\bar{x} + \sigma$  befinden.  $\sigma$  gibt also den Abstand der Wendepunkte von  $\bar{x}$  an.

Da  $n(x)$  eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist, gibt die Fläche unter der Kurve eine Wahrscheinlichkeit an. Demzufolge ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} n(x)dx = 1, \quad (3)$$

denn die Wahrscheinlichkeit, irgendeinen Wert zwischen  $-\infty$  und  $+\infty$  zu messen muß natürlich 1 sein (Normierungsbedingung).

Die beiden im Zusammenhang mit der Gaußverteilung definierten Größen  $\bar{x}$  und  $\sigma$  haben – Sie ahnen es – praktische Bedeutung für die Auswertung Ihrer Messungen:

- $\bar{x}$  heißt **Mittelwert** der Verteilung. Er ist das am häufigsten vorkommende Meßergebnis und für uns deshalb interessant, weil er für lange Meßreihen ( $N \rightarrow \infty$ ) eine gute Näherung an den wahren Wert einer physikalischen Größe darstellt.
- $\sigma$  heißt **Standardabweichung** der Verteilung. Sie ist ein Maß für die Streuung der einzelnen Meßergebnisse um den Mittelwert. Ein großer Wert von  $\sigma$  bedeutet, daß die Gaußverteilung sehr breit aussieht und bei einem kleinen Wert von  $\sigma$  eher eine schmale Nadel ist. Im ersten Fall streuen die Meßergebnisse sehr stark um  $\bar{x}$ , im zweiten Fall liegen sie meistens in der Nähe des Mittelwertes. Somit ist die Standardabweichung geeignet, um die Genauigkeit eines Meßverfahrens anzugeben.

Wenn, wie im Praktikum, verschiedene physikalische Größen benutzt werden schreibt man  $\sigma_x$  für die Standardabweichung, die sich auf die Größe  $x$  bezieht. Aber was genau gibt  $\sigma$  denn nun quantitativ an? Ganz einfach:

$[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$  ist dasjenige Intervall um  $\bar{x}$ , in dem 68,3% aller Meßwerte liegen, denn die Wahrscheinlichkeit, daß das Meßergebnis in diesem Intervall liegt, beträgt

$$\int_{\bar{x}-\sigma}^{\bar{x}+\sigma} n(x)dx = 0,683. \quad (4)$$

Entsprechend gilt:

95,4% der Meßergebnisse liegen in  $[\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma]$  und

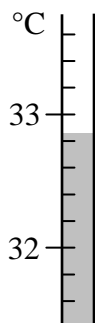
99,7% der Meßergebnisse liegen in  $[\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma]$ .

Dies macht deutlich, daß man *nicht* sagen darf, daß alle Meßergebnisse innerhalb der 3-, 4- oder 5-fachen Standardabweichung liegen. Es gibt zu jedem noch so großen Intervall um  $\bar{x}$  eine Wahrscheinlichkeit größer als Null, daß der nächste Meßwert außerhalb dieses Intervalls liegt.

Um zum Anfang dieses Kapitels zurückzukommen: Der Literaturwert ist niemals der wahre Wert, sondern ein Mittelwert, der genau wie im Praktikum aus experimentellen Daten gewonnen wurde (außer wenn es ein theoretisch hergeleiteter Wert ist, der dann ausdrücklich als Theoriewert gekennzeichnet sein sollte). Nebenbei bemerkt sind Literaturangaben auch nur dann wirklich brauchbar, wenn deren Fehler angegeben werden. Nun, wenn Sie  $(32 \pm 2)$  cm bekommen und der Literaturwert mit 35 cm angegeben ist (häufig fehlen in den Büchern die Fehlerangaben dazu), dürfen Sie behaupten, daß die Werte innerhalb der zweifachen Standardabweichung übereinstimmen

Der nächste Schritt besteht nun darin zu klären, wie man Mittelwerte und Standardabweichungen ausrechnet, wenn man eine Meßreihe hat. Vorher will ich aber noch eine Sache klarstellen, in der man sich leicht verheddert, wenn man seine ersten Fehlerrechnungen macht: Es geht in der Fehlerrechnung darum Ungenauigkeiten zu bestimmen von Werten, die bei der Messung direkt abgelesen werden, oder von Werten, die nicht gemessen, sondern durch Einsetzen der Meßwerte in irgendeine Formel berechnet werden. Der *Input*, den wir dazu zur Verfügung haben, sind die Meßwerte selbst, sowie schon vorhandene Fehlerangaben über die Genauigkeit von Meßgeräten. Solche Fehler, also die Ungenauigkeit von Meßgeräten, herauszubekommen, ist nicht Ziel der Fehlerrechnung. Häufig wird vom Hersteller die Genauigkeit angegeben, wenn nicht muß die Genauigkeit von Ihnen *geschätzt* werden.

Hier eine Skizze der Skala eines Quecksilberthermometers:



Was zeigt das Thermometer an? Zunächst einmal 32,8 °C und dann noch ein bißchen.... Egal, was wir ablesen, es wird auf jeden Fall ungenau, weil man an dieser Skala gar nicht exakt ablesen kann. In diesem Beispiel könnte man sich höchstens trauen zu sagen, ob das Quecksilber eher auf einem Strich oder eher in der Mitte dazwischen ist (das zweite!). Wir lesen also ab: Temperatur  $T=32,9$  °C. Die Ablese-Ungenauigkeit beträgt  $\Delta T = 0,1$  °C, das ist der Abstand zwischen „Strich“ und „genau zwischen zwei Strichen“. Genauer geht es nicht. Beachten Sie, daß dieser Fehler geschätzt und nicht berechnet wurde!

## 4. Mittelwert und Standardabweichung

Weiter oben haben wir schon ein ganz zentrales Ergebnis der Fehlerrechnung gesehen: Der wahre Wert einer gemessenen Größe, nennen wir sie  $x$ , ergibt sich als arithmetischer Mittelwert im Grenzfall einer unendlich großen Zahl  $N$  von Messungen, d.h. einer unendlich langen Meßreihe. Mathematisch läßt sich das so ausdrücken:

$$x_{\text{wahr}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (5)$$

$x_i$  ist hier das Meßergebnis der  $i$ -ten Messung der Größe  $x$ .

Man kann verständlicherweise keine unendlich langen Meßreihen aufnehmen, sondern mit sinnvollem Zeitaufwand nur eine endliche Zahl  $N$  von Messungen durchführen. In der Statistik sagt man dazu, daß man eine Stichprobe macht.

Was interessiert uns denn überhaupt? Wir wollen...

1. ...eine möglichst gute Schätzung  $\bar{x}$  für den wahren Wert bekommen,
2. ...die Standardabweichung  $\sigma_x$ , die angibt, wie die einzelnen Meßwerte um diesen Mittelwert streuen (siehe vorheriger Abschnitt) und
3. ...die Ungenauigkeit  $\sigma_{\bar{x}}$  des Mittelwertes, die uns sagt, wie alle Mittelwerte, die möglich sind um den wahren Wert streuen.

Fangen wir also mit Punkt 1 an: Als beste Schätzung für den wahren Wert erhält man den arithmetischen Mittelwert aus allen Meßergebnissen:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} \quad (6)$$

$i$	$T$ (°C)	Links ist eine Meßreihe, die bei der Messung der Körpertemperatur $T$ mit einem Fieberthermometer entstanden ist (ich war krank und mir war langweilig). Der wahre Wert von $T$ kann wegen der endlichen Länge $N$ der Stichprobe nicht berechnet werden. Als Mittelwert ergibt sich aber:  $\bar{T} = \frac{1}{8} \cdot (38,6 \text{ °C} + \dots + 38,4 \text{ °C}) = 38,775 \text{ °C} .$
1	38,6	
2	38,8	
3	38,9	
4	38,9	
5	39,1	
6	38,8	
7	38,7	
8	38,4	

Nun zu Punkt 2: Eine Größe, die angibt, wie die Ergebnisse der einzelnen Messungen um den Mittelwert  $\bar{x}$  streuen ist die Standardabweichung  $\sigma_x$ . Sie gibt den Mittelwert *des Quadrates* der Entfernung eines Meßergebnisses vom Mittelwert  $\bar{x}$  an. Das mit den Quadraten macht

man deshalb so, weil die Summe der einzelnen Abstände von Meßergebnissen zum Mittelwert Null ergeben würde (weil die Meßwerte ja über und unter dem Mittelwert verteilt liegen). Die mathematische Formel ist etwas sperrig und sieht so aus:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2]}.\end{aligned}\quad (7)$$

Dies ist die Standardabweichung *der Einzelmessung* vom *Mittelwert*. Sie wird auch als Stichprobenfehler bezeichnet.

Als Beispiel bleiben wir bei der Temperatur-Meßreihe aus dem Kasten oben:

Als Mittelwert hatten wir $\bar{T} = 38,775 \text{ °C}$ bestimmt, berechnet aus $N=8$ Messungen.		Die Summe aus der rechten Spalte ergibt $0,315 \text{ °C}^2$ (Lassen Sie sich von der Einheit „Grad Celsius zum Quadrat“ nicht irritieren!). Dies wird jetzt durch $N-1=7$ geteilt, was $0,045 \text{ °C}^2$ ergibt. Daraus die Wurzel, und wir haben die mittlere quadratische Abweichung der Einzelmessung vom Mittelwert $\bar{T}$ (d.h. die Standardabweichung der Einzelmessung):
$T \text{ (°C)}$	$(T - \bar{T})^2 \text{ (°C}^2\text{)}$	
38,6	0,030625	$\sigma_T = 0,21 \text{ °C}$ (auf zwei signifikante Stellen genau angegeben)
38,8	0,000625	
38,9	0,015625	
38,9	0,015625	
39,1	0,105625	
38,8	0,000625	
38,7	0,005625	
38,4	0,140625	

Der mit (6) berechnete Mittelwert ist eine Schätzung für den wahren Wert der Größe  $x$ . Nehme ich nun verschiedene Meßreihen auf, so werden diese i.a. etwas verschiedene Mittelwerte liefern. Das bedeutet, daß der Mittelwert selbst mit einem Fehler behaftet ist. Alle Mittelwerte, die theoretisch möglich sind, sind um den wahren Wert  $x_{\text{wahr}}$  verteilt. Wir berechnen also jetzt die Standardabweichung *des Mittelwertes* vom *wahren Wert*, womit wir bei Punkt 3 wären. Der wahre Wert selbst bleibt wie immer im Verborgenen, doch erstaunlicherweise können wir diese Standardabweichung trotzdem wie folgt ausrechnen:

$$\begin{aligned}\sigma_{\bar{x}} &= \sqrt{\frac{1}{N \cdot (N-1)} \cdot \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{N \cdot (N-1)} \cdot [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2]} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sigma_x\end{aligned}\quad (8)$$

Beachten Sie den kleinen Unterschied zur Standardabweichung *der Einzelmessung*! Er beinhaltet die Tatsache, daß die mittlere quadratische Abweichung des Mittelwertes vom wahren Wert sich mit zunehmender Stichprobenlänge  $N$  um den Faktor  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  verkleinert. Hier sieht man sozusagen mathematisch, warum eine Meßreihe möglichst lang sein sollte.

Teilen wir  $\sigma_T = 0,21^\circ\text{C}$  aus dem vorherigen Kasten durch  $\sqrt{8}$ , so kennen wir die Standardabweichung *des Mittelwertes*:

$$\sigma_{\bar{T}} = 0,074^\circ\text{C}$$

Wenn man einen Mittelwert, der ja eine Abschätzung des wahren Wertes ist, bestimmt, ist man i.a. an seiner mittleren quadratischen Abweichung vom wahren Wert interessiert, und weniger an der Standardabweichung *der Einzelmessung*. Als Ergebnis der ganzen Aktion ist es hier also sinnvoll zu schreiben (beachten Sie, daß Zahlenwert und Fehlerangabe mit gleich vielen Nachkommastellen notiert werden):

$$\bar{T} = (38,775 \pm 0,074)^\circ\text{C}.$$

Soviel zu meiner Körpertemperatur. Hieraus eine medizinische Diagnose zu erstellen überlasse ich nun Ihnen.

In der Statistik findet man im Zusammenhang mit Fehlerangaben häufig noch einen weiteren Begriff, die Varianz  $\text{Var}(x)$  einer Meßgröße  $x$ . Sie ist definiert als  $\sigma^2$ , also als das Quadrat der Standardabweichung.

## 5. Fehlerfortpflanzung

Im Praktikum werden Sie oft feststellen, daß Sie mehrere verschiedene physikalische Größen messen müssen, um daraus diejenige Größe, die Sie interessiert, zu berechnen. Sie tun dies, weil die gesuchte Größe, nennen wir sie  $z$ , nicht für eine direkte Messung zugänglich ist. Die gemessenen Größen nenne ich im folgenden  $x_1, x_2, \dots, x_m$ . Beachten Sie den Unterschied zu den vorherigen Kapiteln: Dort stand der Index für die Nummer der Messung, und es wurde immer dieselbe Größe gemessen. Hier steht der Index für eine ganz neue Größe, z.B. könnte  $x_1$  eine Temperatur sein,  $x_2$  eine elektrische Spannung, usw. Daß man  $z$  aus den anderen Größen berechnen kann bedeutet, daß man  $z$  als Funktion von  $x_1, \dots, x_m$  schreiben kann:  $z = f(x_1, \dots, x_m)$ . Hier geht es nun darum, wie man den Fehler von  $z$  berechnet, wenn die Fehler von  $x_1, \dots, x_m$  bekannt sind. Diese Fehler sind häufig Angaben von Herstellerfirmen von Meßgeräten über deren Ungenauigkeit.



## 5.1 Fehlerfortpflanzungsgesetz

Um die Fehlerrechnung im engeren Sinn anwenden zu können müssen zwei Bedingungen erfüllt sein:

- 1) Die Meßergebnisse der Messgrößen  $x_1, \dots, x_m$  müssen normalverteilt sein.
- 2) Die einzelnen Meßgrößen  $x_1, \dots, x_m$  müssen statistisch voneinander unabhängig sein.

Die zweite Bedingung bedeutet, daß es zu keiner Meßgröße  $x_i$  einen analytischen Zusammenhang mit einer anderen Meßgröße  $x_j$  geben darf. Gäbe es ihn, könnte man nämlich  $x_i$  mittels  $x_j$  in der Form  $x_i = f(x_j)$  ausdrücken, so daß man eine Meßgröße zuviel in der Rechnung hätte. Die Forderung ist also, daß die kleinstmögliche Anzahl von Meßgrößen verwendet wird. Folgendes Beispiel soll dies verdeutlichen:

Ein Praktikumsteilnehmer will die Fläche  $A$  einer Kreisscheibe berechnen und mißt hierzu den Radius  $r$  und sicherheitshalber auch den Durchmesser  $d$ . Aus den Meßreihen berechnet er die Mittelwerte  $\bar{r}$  und  $\bar{d}$ . Da er beide Meßgrößen weiter auswerten will teilt er die Fläche  $A$  in zwei Hälften:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{2} \pi \bar{r}^2 + \frac{1}{2} \pi \left( \frac{\bar{d}}{2} \right)^2$$

Diese Formel ist zweifellos richtig. Es spricht nichts dagegen, die Fläche  $A$  so zu berechnen. Die beiden Meßgrößen  $r$  und  $d$  sind allerdings nicht unabhängig voneinander, denn zwischen ihnen besteht der Zusammenhang  $d=2 \cdot r$ . Damit ist die Bedingung 2) nicht erfüllt, und man kann das Fehlerfortpflanzungsgesetz hier nicht anwenden, um den Fehler von  $A$  zu berechnen. Benutzt man aber die Gleichung  $A = \pi \bar{r}^2$  sind beide Bedingungen erfüllt, und man arbeitet mit der kleinstmöglichen Anzahl von Meßgrößen.

Wir setzen noch voraus, daß aus den Meßreihen die Mittelwerte der verschiedenen Meßgrößen bekannt sind:  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$ , ebenso die Standardabweichungen der Mittelwerte  $\sigma_{\bar{x}_1}, \dots, \sigma_{\bar{x}_m}$ . Die beste Schätzung für den Mittelwert von  $z$  ist dann

$$\bar{z} = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m), \quad (9)$$

was unmittelbar plausibel ist. Die optimale Schätzung für den Fehler von  $\bar{z}$  ist die Standardabweichung  $\sigma_{\bar{z}}$ . Sie berechnet sich nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz, das im Praktikum eine sehr große Rolle spielt:

$$\begin{aligned}\sigma_{\bar{z}} &= \sqrt{\sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j} \right)^2 \cdot \sigma_{\bar{x}_j}^2} \\ &= \sqrt{\left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1} \right)^2 \cdot \sigma_{\bar{x}_1}^2 + \dots + \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_m} \right)^2 \cdot \sigma_{\bar{x}_m}^2}.\end{aligned}\quad (10)$$

Hierbei bedeutet  $\partial/\partial x_j$  die partielle Ableitung nach  $x_j$  (Sie wird genauso gebildet, wie die normale Ableitung), und der Querstrich zeigt an, daß in den in Klammern stehenden Ausdrücken die Mittelwerte der Meßgrößen eingesetzt werden sollen. Beispiel gefällig?

Die Dichte  $\rho$  soll für einen Würfel berechnet werden. Hierzu wird die Kantenlänge  $a$  und die Masse  $m$  gemessen. Die Formel für die Dichte ist

$$\rho = \frac{m}{a^3}.$$

Um die Dichte auszurechnen werden die Mittelwerte von  $m$  und  $a$  benutzt:

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{m}}{\bar{a}^3}$$

Die Fehler  $\sigma_{\bar{m}}$  und  $\sigma_{\bar{a}}$  der Mittelwerte werden nach Gl. (8) berechnet. Gehen wir davon aus, daß sie schon bekannt sind. Der Fehler der Dichte berechnet sich nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz Gl. (10):

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho} &= \sqrt{\left( \frac{\partial \rho}{\partial m} \right)^2 \cdot \sigma_m^2 + \left( \frac{\partial \rho}{\partial a} \right)^2 \cdot \sigma_a^2} \\ &= \sqrt{\left( \frac{1}{a^3} \right)^2 \cdot \sigma_m^2 + \left( \frac{-3m}{a^4} \right)^2 \cdot \sigma_a^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{a^6} \cdot \sigma_m^2 + \frac{9m^2}{a^8} \cdot \sigma_a^2}\end{aligned}$$

Um den Fehler des Dichte-Mittelwertes zu bekommen werden die Mittelwerte der Meßgrößen, sowie deren Standardabweichungen eingesetzt:

$$\sigma_{\bar{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{\bar{a}^6} \cdot \sigma_{\bar{m}}^2 + \frac{9\bar{m}^2}{\bar{a}^8} \cdot \sigma_{\bar{a}}^2}.$$

## 5.2 Maximaler Fehler

Es kann unter Umständen vorkommen, daß eine der Voraussetzungen (oder beide) für das Fehlerfortpflanzungsgesetz nicht erfüllt sind. Wenn das der Fall ist kann Gl. (10) nicht benutzt werden, um den Fehler der physikalischen Größe  $z$  anzugeben. Das heißt aber nicht, daß Sie überhaupt keinen Fehler angeben können (Sie kommen nicht drum herum), sondern hier ist die Angabe des Maximalfehlers  $\Delta z$  sinnvoll. Er schreibt sich mathematisch so:

$$\begin{aligned}\Delta z &= \sum_{j=1}^m \left| \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \Delta x_j \right| \\ &= \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 \right| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \Delta x_m \right|\end{aligned}\quad (11)$$

Die Betragstriche stehen da, weil die partielle Ableitung von  $f$  negativ sein kann, die Beiträge aus den einzelnen Größen sich aber positiv addieren müssen.

Für diejenigen Meßgrößen  $x_j$ , deren Mittelwerte und Standardabweichungen aus einer Meßreihe bekannt sind, wird als Fehler

$$\Delta x_j = \sigma_{\bar{x}_j},$$

also die Standardabweichung des Mittelwertes eingesetzt. Für alle anderen Meßgrößen muß ein realistischer Schätzwert für den Fehler verwendet werden (Ein Beispiel zu diesen Schätzwerten finden Sie auf Seite 5.).

Als kleines Exempel bleiben wir bei der Dichte-Berechnung von der vorigen Seite:

Der einzige Unterschied zur Rechnung im vorherigen Beispiel-Kasten soll sein, daß die Fehler der Masse  $m$  und der Kantenlänge  $a$  nicht aus Meßreihen bestimmt wurden (Standardabweichungen), sondern Schätzwerte  $\Delta m$  und  $\Delta a$  sind. Auch damit könnte man das Fehlerfortpflanzungsgesetz benutzen, bekäme dann aber nicht die Standardabweichung von  $\bar{z}$ , sondern nur eine Abschätzung des Fehlers  $\Delta \bar{z}$ . Hier interessiert uns jedoch ausdrücklich der maximale Fehler der Dichte  $\rho$ , der mit Gl. (11) berechnet wird:

$$\begin{aligned}\Delta \rho &= \left| \frac{\partial \rho}{\partial m} \cdot \Delta m \right| + \left| \frac{\partial \rho}{\partial a} \cdot \Delta a \right| \\ &= \left| \frac{1}{a^3} \cdot \Delta m \right| + \left| \frac{-3m}{a^4} \cdot \Delta a \right| \\ &= \frac{1}{a^4} \cdot (a \cdot \Delta m + 3m \cdot \Delta a)\end{aligned}$$

Die Betragsstriche konnten im letzten Schritt ebenso wie das Minuszeichen weggelassen werden, weil  $m$ ,  $a$  und ihre Fehler  $\Delta m$  und  $\Delta a$  größer als Null sind. Der Maximalfehler des Dichte-Mittelwertes ergibt sich durch Einsetzen der Mittelwerte für  $m$  und  $a$ :

$$\Delta \bar{\rho} = \frac{1}{\bar{a}^4} \cdot (\bar{a} \cdot \Delta m + 3\bar{m} \cdot \Delta a)$$

## 6. Lineare Regression

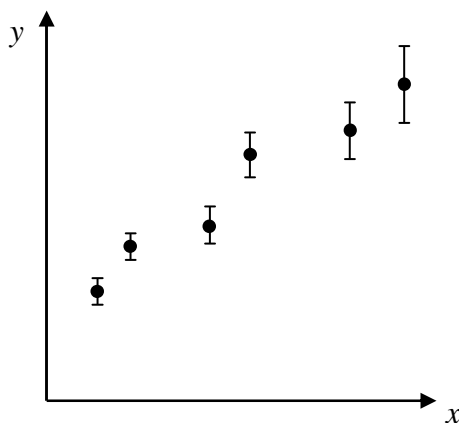
Häufig hängen zwei physikalische Größen  $x$  und  $y$  linear voneinander ab, so daß sie über eine Geradengleichung

$$y = a \cdot x + b \quad (12)$$

miteinander verknüpft sind.  $a$  ist die Steigung,  $b$  der  $y$ -Achsenabschnitt, und beide sind konstant.

Ein Experiment läuft häufig so ab, daß man die Größe  $x$  nacheinander auf  $N$  verschiedene Werte  $x_i$  einstellt und die Werte  $y_i$  an einem Meßgerät abliest, wobei jeder Wert  $y_i$  mit einem Zufallsfehler behaftet ist. Was den Experimentator interessiert sind die Parameter  $a$  und  $b$  (häufig Material- oder Naturkonstanten), und wie man an diese kommt, darum geht es in diesem Abschnitt.

Nach  $N$  Messungen mit verschiedenen  $x_i$  haben wir eine Meßreihe. Häufig findet man Praktikanten in lebhafte Diskussionen verstrickt, ob die Meßwerte, die in dieser Meßreihe stehen, denn nun einen linearen Zusammenhang zeigen oder nicht. Viel Zeit und Nerven kann man sich hier sparen, wenn man sich an ein bewährtes Hausmittel erinnert: Hinzeichnen! Stehen die Datenpunkte  $(x_i, y_i)$  in einem Diagramm, so ist wesentlich besser zu erkennen, auf was für einer Kurve diese Punkte liegen, und hier sind wir am entscheidenden Punkt: Selbst wenn sich theoretisch ein linearer Zusammenhang der Größen  $x$  und  $y$  herleiten läßt, finden wir doch, daß die Meßpunkte  $(x_i, y_i)$  nicht so ganz auf einer Geraden liegen. Das liegt natürlich am Fehler der Werte  $y_i$ . Auch die Meßwerte  $x_i$  haben in der Realität natürlich Fehler, wir nehmen hier aber ausdrücklich an, daß diese Fehler vernachlässigbar sind. Man kann bei der linearen Regression den Fehler von  $x_i$  grundsätzlich auch mit berücksichtigen, dann erhöht sich aber der Rechenaufwand dramatisch und ist dem Praktikum nicht mehr angemessen.



Typische Lage von Datenpunkten, wenn die Theorie einen linearen Zusammenhang zwischen  $x$  und  $y$  liefert. Nur die Fehler der  $y$ -Koordinaten sind berücksichtigt (Fehlerbalken).

Die Aufgabe ist jetzt, eine Gerade zu finden, die, salopp gesagt, gut zu den Meßpunkten paßt, und deren Parameter  $a$  und  $b$  sind.

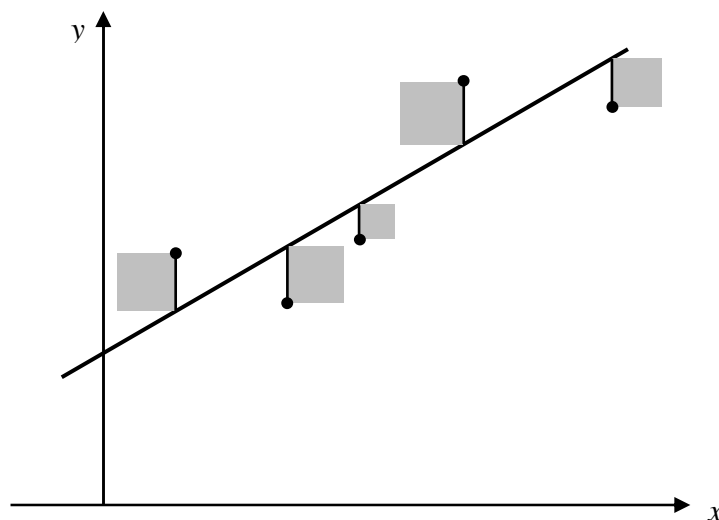
In der einfachsten Variante kann man diese Gerade näherungsweise auf zeichnerischen Wege finden, indem man mit einem Lineal eine Gerade so in das Diagramm einzeichnet, daß nach dem Augenschein eine „ausgleichende“ Gerade entsteht. Dabei wird weniger die *Anzahl* der Punkte über und unter der Geraden, sondern vielmehr deren *Abstand* zur Geraden berücksichtigt. Diese Art, eine Ausgleichsgerade zu finden, ist sicher vielen von Ihnen aus der Schule bekannt. Aber Achtung: Die verbreitete Version, daß man nur den ersten und den letzten Datenpunkt zu einer Geraden verbinden müsse, ist falsch! Sie muß auch falsch sein, denn um eine Ausgleichsgerade zu finden müssen natürlich alle Wertepaare berücksichtigt werden (Leider gibt es anscheinend Lehrer, die von der falschen Methode so überzeugt sind, daß sie

sie sogar unterrichten). Im nächsten Schritt ist es dann leicht,  $b$  an der  $y$ -Achse abzulesen und mittels eines eingezeichneten Steigungsdreiecks die Steigung  $a$  zu bestimmen.

So weit, so gut. Es gibt natürlich auch eine mathematische, quantitative Methode, um die gesuchte Geradengleichung zu finden. Das Verfahren heißt lineare Regression und basiert auf der Forderung, daß die Summe aus den Abstands-*Quadraten* der Meßpunkte zu der Geraden minimal wird (damit sind die Abstände der  $y$ -Koordinaten gemeint):

$$\sum_{i=1}^N [y_i - (a \cdot x_i + b)]^2 = \text{minimal} \quad (13)$$

Daran sehen Sie, daß es sich im Prinzip um eine Extremwertaufgabe handelt. Sie fragen sich bestimmt, warum die Summe der Quadrate und nicht die Summe der einfachen Abstände genommen wird. Die Antwort liegt in den Tiefen der mathematischen Statistik: Der Satz von Gauß-Markov besagt, daß man das bestangepaßte Modell, d.h. Geradengleichung, erhält, wenn die Methode der kleinsten Quadrate benutzt wird.



Methode der kleinsten Quadrate: Die Abstandsquadrate sind hier als graue Flächen gezeichnet. Die Regressionsgerade ist diejenige Gerade, für die die Summe der grauen Flächen am kleinsten ist. Die Fehlerbalken der Datenpunkte sind für die bessere Übersichtlichkeit weggelassen worden.

Nach einer längeren Rechnung, die ich hier nicht detailliert aufführen will, ergeben sich als Lösung der Extremwertaufgabe Gl. (13) folgende beste Schätzwerte  $a'$  und  $b'$  der Parameter  $a$  und  $b$ :

$$a' = \frac{S_{xy}}{S_x^2}; \quad b' = \bar{y} - a' \cdot \bar{x} \quad (14)$$

mit folgenden Definitionen:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i; & \bar{y} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \\ S_{xy} &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}); & S_x^2 &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \end{aligned} \quad (15)$$

Wir sind hier in der verrückten Situation, daß wir Mittelwerte für  $x$  und  $y$  ausrechnen müssen, obwohl die  $x$ -Werte absichtlich während der Versuchsreihe verändert werden, sich also die Größen  $x$  und  $y$  laufend ändern.

Ich gebe Ihnen an dieser Stelle die herzliche Bitte mit auf den Weg, in Ihren Versuchsauswertungen auch immer alle Zwischenwerte (15) aufzuschreiben, wenn Ihnen eine lineare Regression begegnet – es erleichtert die Nachvollziehbarkeit und die Fehlersuche erheblich.

Haben wir jetzt alles? Nicht ganz! Die Schätzwerte (14) für die Parameter  $a$  und  $b$  reichen zwar schon aus, um die Geradengleichung der Regressionsgeraden hinzuschreiben, allerdings sind diese – wie sollte es anders sein – fehlerbehaftet. Und wenn wir auf dem Wege der linearen Regression z.B. eine physikalische Konstante bestimmen wollen, ist deren Fehlerwert von allergrößtem Interesse.

Aus Gl. (11) und Anwendung der Fehlerfortpflanzung (die Einzelheiten überspringen wir hier wieder, weil man wirklich nichts Neues draus lernt) findet man als beste Schätzung für den Fehler von  $y$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N [y_i - (a' \cdot x_i + b')]^2} . \quad (16)$$

Dies ist die Standardabweichung der *Einzelmessung*. Ein Blick zurück zu Gl. (7) in Kapitel 4 sagt Ihnen, daß dort die Standardabweichung der Einzelmessung etwas anders definiert worden ist, indem dort nämlich durch  $N-1$  geteilt wurde. Machen Sie sich aber klar, daß dort die Abweichung der Einzelmessung *vom Mittelwert* behandelt wurde, während es hier um die Abweichung der Einzelmessung *von der Regressionsgeraden* geht. Im ersten Fall haben wir nur einen Parameter  $x$  variiert, im zweiten Fall jonglieren wir mit zwei Parametern  $a$  und  $b$ . Dies erklärt den kleinen Unterschied. Beachten Sie auch, daß Gl. (16) nicht etwa den  $y$ -Fehler angibt, der als Fehlerbalken ins Diagramm eingezeichnet wird!

Als beste Abschätzungen der Fehler  $\sigma_{a'}$  und  $\sigma_{b'}$  der Schätzwerte  $a'$  und  $b'$  ergeben sich nun

$$\begin{aligned} \sigma_{a'} &= \sigma_y \cdot \sqrt{\frac{N}{N \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \\ &= \sigma_y \cdot \sqrt{\frac{1}{\sum x_i^2 - N \cdot \bar{x}^2}} \\ &= \sigma_y \cdot \sqrt{\frac{1}{\sum (x_i - \bar{x})^2}} \end{aligned} \quad (17)$$

für den Fehler der Geradensteigung und

$$\begin{aligned} \sigma_{b'} &= \sigma_y \cdot \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \\ &= \sigma_y \cdot \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \frac{\sum x_i^2}{\sum x_i^2 - N \cdot \bar{x}^2}} \\ &= \sigma_y \cdot \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \frac{\sum x_i^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}} \end{aligned} \quad (18)$$

für den Fehler des y-Achsenabschnitts. Alle Summen laufen von  $i=1$  bis  $N$ .

Liegt eine Ursprungsgerade der Form  $y = a \cdot x$  vor, gelten folgenden Formeln für die Berechnung der Steigung

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (19)$$

und den Fehler der Steigung.

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{1}{n-1} \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}}, \text{ wobei } d_i = y_i - a \cdot x_i \text{ ist.} \quad (20)$$

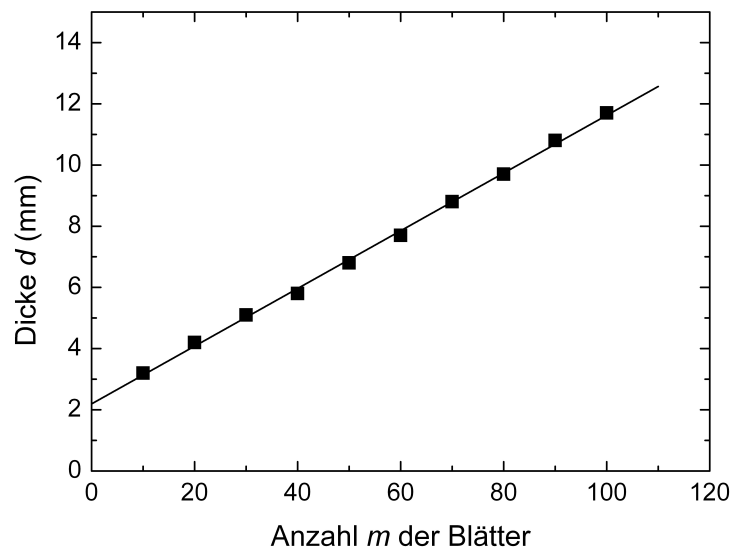
Vor diesen ganzen Formeln sollten Sie keinen großen Respekt haben, es ist viel einfacher, als es aussieht. Da Sie im Praktikum recht oft mit der linearen Regression konfrontiert werden ist an dieser Stelle wieder ein Beispiel angebracht: Haben Sie sich schon einmal gefragt, wie dick ein Blatt Papier in Ihrem Lehrbuch ist? Vermutlich nicht (Warum sollten Sie auch?), dennoch haben wir hier ein gutes Beispiel für etwas, das man nicht besonders gut direkt messen, wohl aber mittels linearer Regression bestimmen kann.

-----Beispiel-----

Ein Buch ist ein bisschen wie Quantenphysik: Die Dicke des Buches ist quantisiert, und ein „Buchquant“ ist die Dicke eines Blattes. Mit einem Messschieber wird die Dicke gemessen, nicht eines einzelnen Blattes, auch nicht des ganzen Buches, sondern von 10, 20, 30, usw. Blättern einschließlich des hinteren Buchdeckels (warum ich den mitnehme wird noch deutlich werden). Hier die Messreihe, bei der  $m$  die Anzahl der Blätter ist:

Anzahl $m$	Dicke $d$ (mm)	Zuerst werden die Zwischenergebnisse ausgerechnet: Mit Formel (6) bekommen wir die Mittelwerte von $m$ und $d$ :
10	3,2	$\bar{m} = 55$ und $\bar{d} = 7,38$ mm.
20	4,2	
30	5,1	Als nächstes bekommen wir nach Gl. (15)
40	5,8	$S_{md} = 86,4444$ mm und $S_m^2 = 916,6666$ .
50	6,8	
60	7,7	Die optimalen Abschätzungen der Parameter $a$ und $b$ ergeben sich schließlich nach Gl.(14) zu
70	8,8	
80	9,7	
90	10,8	
100	11,7	
		$a' = 0,0943$ mm und $b' = 2,1935$ mm.

Dies reicht schon aus, um eine Grafik mit der Regressionsgeraden zu zeichnen:



Die Grafik wurde mit dem Programm Origin erstellt. Programme wie Excel oder Origin können die gesamte lineare Regression selbst durchführen und liefern nicht nur das Diagramm, sondern auch  $a'$ ,  $b'$  und deren Fehler.

Die Geradengleichung, die wir bekommen, lautet nun

$$d = 0,0943 \text{ mm} \cdot m + 2,1935 \text{ mm}.$$

Jetzt fehlen noch die Fehlerangaben. Hierzu eine Tabelle mit Zwischenwerten:

$m_i^2$	$(m_i - \bar{m})^2$	$(d_i - (a' \cdot m_i + b'))^2 \text{ (mm}^2\text{)}$
100	2025	0,00405
400	1225	0,01457
900	625	0,00604
1600	225	0,02732
2500	25	0,01172
3600	25	0,02289
4900	225	0,00003
6400	625	0,00139
8100	1225	0,01433
10000	2025	0,00588

Nur die Werte in der rechten Spalte haben Einheiten, denn  $m$  ist ja nur eine Anzahl.



Zuerst erhalten wir mit Formel (16)

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{1}{8} \cdot \sum_{i=1}^{10} [d_i - (a' \cdot m_i + b')]^2} = 0,173 \text{ mm.}$$

Die Gleichungen (17) und (18), ich benutze jeweils die unterste Variante, liefern als Fehler

$$\sigma_{a'} = 0,0019 \text{ mm und } \sigma_{b'} = 0,12 \text{ mm}$$

Zusammengefasst bekommen wir also:

$$a' = (0,0943 \pm 0,0019) \text{ mm}$$

$$b' = (2,19 \pm 0,12) \text{ mm}$$

Die Steigung  $a'$  gibt an, wie dick ein Blatt des Buches (durchschnittlich) ist. Wir haben also das Buchquant bestimmt, und das noch mit Fehlerangabe! Der  $y$ -Achsenabschnitt  $b'$  gibt die Dicke des unteren Buchdeckels an, also die Dicke, wenn Null Blatt Papier gemessen werden. Beides zusammen ergibt die Buchgleichung

$$\text{Buchdicke } D = a' \cdot m + 2b'.$$

Im rechten Summanden steht ein Faktor 2, weil man ja auch noch den oberen Buchdeckel zur gesamten Dicke rechnen muss.

Die Buchgleichung in diesem Beispiel entspricht einem Naturgesetz, und  $a'$  und  $b'$  entsprechen Materialparametern. Sie gelten immer nur für ein bestimmtes Buch, in diesem Fall war es Kohlrausch, Praktische Physik, 22. Auflage, B. G. Teubner, Stuttgart, 1968.

-----Beispielende-----

Bis hierhin haben wir die allgemeine Form der linearen Regression besprochen. Es gibt einen wichtigen Spezialfall, bei dem man etwas andere Formeln benutzen darf und sich einige Arbeit sparen kann: Wenn der  $y$ -Achsenabschnitt Null ist und sich daher die Regressionsgerade als  $y = a \cdot x$  schreiben läßt. Aber Achtung! Überlegen Sie sich vorher gründlich, ob das wirklich der Fall ist! Diese einfache Variante dürfen Sie nicht benutzen, wenn der  $y$ -Achsenabschnitt nur klein, aber vorhanden ist. Er muß *exakt* Null sein, wie etwa beim Zusammenhang zwischen der Länge einer Strecke und der Zeit, die ein Lichtstrahl braucht, um sie zurückzulegen. Für eine solche lineare Regression *durch Null* gelten folgende Formeln, mit denen man die beste Schätzung  $a'$  der Steigung und deren Fehler bekommt:

Die Standardabweichung der Einzelmessung von der Regressionsgeraden ist analog zu Gl. (16)

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^N [y_i - a' \cdot x_i]^2} \quad (21)$$

Hier wird in der Wurzel jedoch durch  $N-1$  geteilt, weil wir es nur mit einem Parameter zu tun haben. Die beste Schätzung für die Steigung ist

$$a' = \frac{\sum x_i \cdot y_i}{\sum x_i^2}, \quad (22)$$

und als beste Schätzung des Fehlers ergibt sich

$$\sigma_{a'} = \sigma_y \cdot \sqrt{\frac{1}{\sum x_i^2}}, \quad (23)$$

wobei die Summen immer von  $i=1$  bis  $N$  laufen.

Manchmal geben Rechenprogramme außer Steigung und  $y$ -Achsenabschnitt auch noch einen Koeffizienten aus, der meist  $R$  heißt. Es handelt sich dabei um den Pearson'schen empirischen Korrelationskoeffizienten. Er ist definiert als

$$R = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_x^2 \cdot S_y^2}} \quad (24)$$

mit den Definitionen Gl. (15) und  $S_y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2$ .  $R$  kann Werte zwischen -1 und 1 annehmen und dient zur Überprüfung, ob die gemessenen Daten tatsächlich einen linearen Zusammenhang haben. Für  $R=+1$  oder  $-1$  liegen alle Meßpunkte exakt auf einer Geraden. Das Vorzeichen gibt nur an, ob deren Steigung positiv oder negativ ist. Für  $R=0$  besteht überhaupt kein linearer Zusammenhang. Die Betonung liegt hier auf linear, denn die Größen  $x$  und  $y$  können dann sehr wohl noch nichtlinear und im Diagramm auch deutlich erkennbar korreliert sein.

Literaturhinweise:

Kamke,

Der Umgang mit experimentellen Daten, insbesondere Fehleranalyse, im physikalischen Anfänger-Praktikum: Eine elementare Einführung.

Verlag und Herausgeber: Wolfgang Kamke

ISBN: 978-3-00-031620-3

→ Eine hervorragende Einführung. Ausführlich ohne ein dickes Lehrbuch zu sein und für Einsteiger sehr gut verständlich. Auch zum späteren Nachschlagen geeignet.

Bronstein, Semendjajew, Musiol, Mühlig,

Taschenbuch der Mathematik.

Verlag Harri Deutsch

ISBN: 3-8171-2005-2

→ Die Mutter aller Mathe-Formelsammlungen! Was hier nicht drinsteht ist unlösbar oder trivial.