Elastizität und Torsion

1 Einleitung

Ein Flachstab, der an den Enden aufliegt, biegt sich unter der Einwirkung einer Kraft, die in der Mitte des Stabes angreift, durch. Aus dieser Verformung und den geometrischen Daten des Stabes lässt sich der Elastizitätsmodul des Materials bestimmen. Wird ein Stab, der vertikal aufgehängt ist, zu Drehschwingungen angeregt, so lässt sich aus dem Zusammenhang zwischen Schwingungsdauer und den geometrischen Abmessungen des Stabes das für das Material spezifischen Schubmodul bestimmen.

2 Elastizität

Als Beispiel für die elastische Verformung eines Festkörpers wird zunächst die Durchbiegung von Flachstäben infolge einer angreifenden Kraft $\vec{F}$ untersucht (s. Abb. 1).

Der an den Enden aufliegende Stab wird dabei an der Oberseite zusammengedrückt und an der Unterseite gedehnt. An der Oberseite wirkt also eine *Druckspannung*, an der Unterseite eine *Zugspannung*. Den Übergang bildet die in der Mitte liegende Schicht des Stabes, die so genannte *neutrale Faser*. Diese Schicht bewahrt ihre ursprüngliche Länge. Die Längenänderungen der übrigen Schichten sind proportional zu den wirkenden Zug- und Druckspannungen, die Proportionalitätskonstante ist der Elastizitätsmodul E.

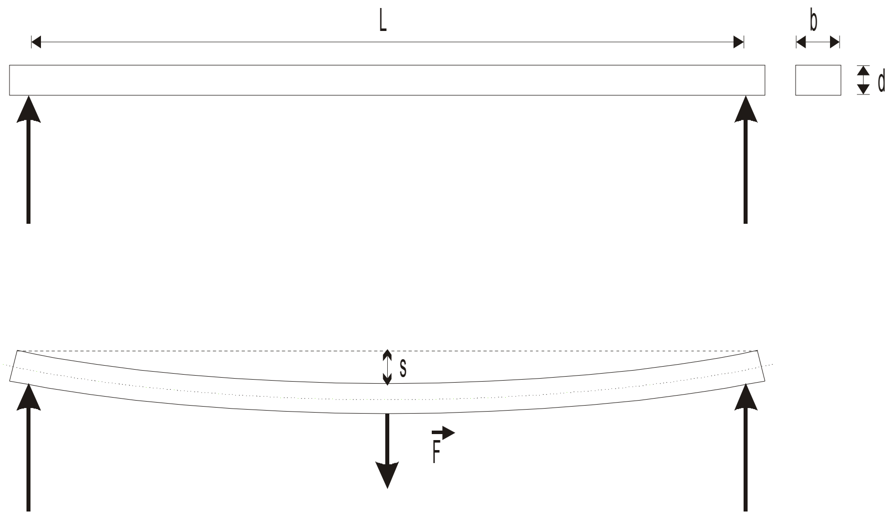

Abb. 1: Durchbiegung eines an den Enden aufliegenden Stabes

Der Zusammenhang zwischen dem Betrag der angreifenden Kraft F (in der Mitte zwischen den Auflagepunkten) und Durchbiegung s eines Stabes der Dicke d, Breite b und Länge L ist durch die Beziehung

$$s = \frac{1}{4E} \cdot \left(\frac{L}{d}\right)^3 \cdot \frac{1}{b} \cdot F \tag{1}$$

gegeben, in der die Materialkonstante E den Elastizitätsmodul darstellt.

2.1 Messungen zur Elastizität

- Für die Materialien Stahl, Aluminium und Messing werden die Abmessungen (Breite und Dicke) der verwendeten Flachstäbe bestimmt und der eingestellte Abstand der Auflagepunkte L notiert.

Da die Flachstäbe durch den Gebrauch bereits etwas durchgebogen sind, muss auch die Anfangsdurchbiegung gemessen werden.

- Die Durchbiegung s wird daher einmal ohne Zusatzgewichte (m_0 = 10g – Eigengewicht der Konstruktion, Anfangsdurchbiegung) und einmal mit sinnvoll gewähltem Zusatzgewicht (m_1) für jedes Material gemessen.
  Die Masse der verwendeten Zusatzgewichte (m_1) wird ebenfalls notiert.

- Die Mess- bzw. Ablesegenauigkeit der verwendeten Messinstrumente wird für die spätere Fehlerrechnung ebenfalls notiert.

Überlegen Sie sich vor den Messungen, welche Werte hier sinnvoll sind (größere Durchbiegungen führen zu kleineren Fehlern).

ACHTUNG: Es wird nicht die tatsächliche Durchbiegung der Stäbe, sondern die hierzu proportionale Laserauslenkung gemessen. Daher muss auch ein apparaturspezifischer Umrechnungsfaktor notiert werden.

- Notieren Sie den apparaturspezifischen Umrechnungsfaktor.

2.2 Auswertung zur Elastizität

Aus den gemessenen Werten sollen die Elastizitätsmodule der drei Materialien mit Fehler errechnet werden.

- Die Differenz der gemessenen Laserauslegungen wird zunächst in die tatsächliche Durchbiegung s umgerechnet.
- Berechnen Sie die Elastizitätsmodule unter Verwendung von Formel (1).
- Die Berechnung des Fehlers erfolgt nach Fehlerfortpflanzung! Geben Sie sowohl die allgemeine Formel als auch die Formel mit den ausgeführten Ableitungen an.
- Die errechneten Werte (mit Fehler) werden den Literaturwerten tabellarisch gegenübergestellt. Diskutieren Sie die Abweichungen.

3 Torsion

Im zweiten Teil des Versuches wird die Torsion von dünnen Stäben untersucht. Wirkt über eine am unteren Ende des Stabes befestigte Querstange ein Drehmoment auf den am oberen Ende fest eingespannten Stab, so wird das untere Ende um einen Winkel ϕ verdreht (Abb. 2). Für kleine Auslenkungen, solange die so ge-

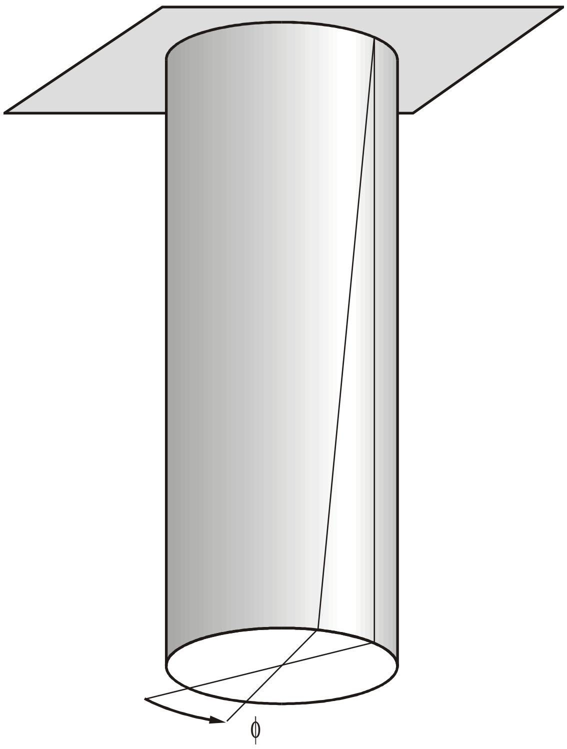

Abb. 2: Torsion eines einseitig befestigten Stabes

nannte *Fließgrenze* des Materials noch nicht erreicht ist, ist das wirkende Drehmoment proportional zum ausgelenkten Winkel:

$$T = D_T \cdot \varphi \ , \qquad (2)$$

wobei das Drehmoment über einen Hebelarm $\vec{r}$ mit einer Kraft $\vec{F}$ ausgeübt werden kann:

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (3)$$

Die Proportionalitätskonstante D_T heißt Winkelrichtmoment und ist für einen runden Stab mit Radius R und Länge l gegeben durch

$$D_T = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R^4}{l} \cdot G \ , \qquad (4)$$

wobei die Materialkonstante G als Torsions- oder Schubmodul bezeichnet wird. Analog zum Aufgabenteil 2 kann hier das Schubmodul G von verschiedenen Materialien bestimmt werden.

Verdreht man den Stab aus Abb. 2 mittels einer Querstange um den Winkel ϕ_0 und lässt man dann los, führt der Stab eine Torsionsschwingung aus. Für diese Schwingung gilt bei kleinen Auslenkwinkeln ϕ_0 die Differenzialgleichung

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + D_T \cdot \varphi = 0 \ . \qquad (5)$$

Die Schwingung kann durch die Funktion

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right) \qquad (6)$$

beschrieben werden.

Die Schwingungsdauer T_0 ist vom Trägheitsmoment I und vom Winkelrichtmoment D_T abhängig und wir durch folgende Beziehung festgelegt:

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{D_T}} \ . \qquad (7)$$

Bei Kenntnis des Winkelrichtmoments D_T lässt sich also über die Schwingungsdauer T_0 des Drehpendels das Trägheitsmoment I bestimmen (und umgekehrt).

3.1 Messungen zur Torsion

- Die Abmessungen der verwendeten Stäbe (Länge und Durchmesser) werden bestimmt und ein Fehler für die Ablesegenauigkeit der verwendeten Messinstrumente wird notiert.

Für die folgenden Messungen werden die Stäbe mit einer Länge von 0,5 m und einem Durchmesser von 2 mm verwendet:

- Für die vier Materialien (Aluminium, Kupfer, Messing und Stahl) wird die Auslenkung in Abhängigkeit der Kraft notiert.
  Die Kraft wird von 0 N bis 1 N in 0,1 N-Schritten variiert.
  Der Kraftmesser (Federwaage) greift in einem Abstand von 0,15 m vom Stab am Querbalken an. Kraft und Kraftarm sollten immer einen rechten Winkel bilden, damit das Drehmoment in einfacher Weise berechnet werden kann. Die Winkelscheibe wird so eingestellt, dass bei 0 N auch 0° angezeigt werden.

- Für Stahl soll die Schwingungsdauer bestimmt werden.
  Hierzu wird die Schwingungsdauer für n=1, 3, 5, …, 15 Perioden gemessen.

Nun werden die Aluminium-Stäbe mit gleichem Durchmesser aber verschiedener Länge verwendet:

- Bestimmen Sie für jede Länge die Schwingungsdauer.
  Im Gegensatz zur vorherigen Messung, wird hier bei einer festen (und sinnvollen) Periodenanzahl n die Schwingungsdauer gemessen. Die Schwingungsdauer wird drei mal pro Länge gemessen. Die Länge wird ebenfalls notiert.

Zuletzt werden die Aluminium-Stäbe mit gleicher Länge aber verschiedenem Durchmesser verwendeten:

- Bestimmen Sie für jeden Durchmesser die Schwingungsdauer.
  Wie bei der vorherigen Messung, wird hier bei einer festen (und sinnvollen) Periodenanzahl n die Schwingungsdauer gemessen. Die Schwingungsdauer wird drei mal pro Durchmesser gemessen. Der Durchmesser wird ebenfalls notiert.

3.2 Auswertung zur Torsion

- Rechnen Sie alle Winkel ins Bogenmaß um.

- Bestimmen Sie das Winkelrichtmoment D_T nach Formel (2) mit Hilfe einer linearen Regression durch den Ursprung für alle Materialien. Das Drehmoment T wird nach Formel (3) aus der gemessenen Kraft berechnet.
  Der Fehler auf das Winkelrichtmoment D_T ergibt sich aus der linearen Regression.
  Stellen Sie die Regressionsgerade mit den Messwerten in einem Diagramm graphisch da.

- Berechnen Sie das Schubmodul G für alle Materialien nach Formel (4).
  Der Fehler wird nach Fehlerfortpflanzung berechnet! Geben Sie sowohl die allgemeine Formel als auch die Formel mit den ausgeführten Ableitungen an.
  Die errechneten Werte mit Fehlern werden den Literaturwerten tabellarisch gegenübergestellt.
  Diskutieren Sie die Abweichungen.

- Berechnen Sie das Trägheitsmoment I des Querbalkens nach Formel (7).
  Verwenden Sie das bereits berechnete Winkelrichtmoment von Stahl und die Schwingungsdauer $T_{0,}$ die sich aus einer linearer Regression über die gemessenen Schwingungsdauern T_n ergibt.
  Die Berechnung des Fehlers erfolgt nach Fehlerfortpflanzung! Geben Sie sowohl die allgemeine Formel als auch die Formel mit den ausgeführten Ableitungen an.

Zu guter Letzt soll die Abhängigkeit der Schwingungsdauer T_0 von der Länge l (bzw. vom Radius R) der Stäbe untersucht werden. Dazu wird Formel (4) in Formel (7) eingesetzt. Da nun nur die Länge variiert wird, können die anderen Größen zu einer Konstanten C zusammengefasst werden.

$$T_0 = C \cdot l^x$$

Wird nun auf beiden Seiten der Gleichung der Logarithmus gebildet, so folgt:

$$\log(T_0) = \log(C) + x \cdot \log(l)$$

Nun kann mit linearer Regression mit y-Achsenabschnitt die Potenz der Länge errechnet und überprüft werden.

- Berechnen Sie aus den drei gemessenen Schwingungsdauern T_n für jede Länge den Mittelwert und daraus die Schwingungsdauer T_0.

- Berechnen Sie die Logarithmen von T_0 und l und führen Sie eine lineare Regression mit y-Achsenabschnitt durch. Stellen Sie den Wert mit Fehler dem erwarteten Wert gegenüber und diskutieren Sie das Ergebnis.

Selbiges ist für den Radius durchzuführen.

- Berechnen Sie aus den drei gemessenen Schwingungsdauern T_n für jeden Radius (es wurde der Durchmesser gemessen) den Mittelwert und daraus die Schwingungsdauer T_0.

- Berechnen Sie die Logarithmen von T_0 und R und führen Sie eine lineare Regression mit y-Achsenabschnitt durch. Stellen Sie den Wert mit Fehler dem erwarteten Wert gegenüber und diskutieren Sie das Ergebnis.

3.3 Allgemeine Aufgaben

Zur Vorbereitung wird erwartet, dass die Praktikanten eine Vorlage anfertigen, in der während der Durchführung des Versuches die Messdaten nur noch eingefügt werden müssen.